

Essai sur les Nombres Premiers n^2+1

Note: On tente de démontrer la conjecture des nombres premiers $(n^2 + 1)$.

Essay on Primes Numbers n^2+1

Abstract: We try to prove the conjecture on Prime Numbers (n^2+1) .

Etude.

Conjecture : Il y a un nombre infini de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$.

Démonstration par l'absurde.

On suppose qu'il y en a seulement un nombre fini et on essaie d'arriver à une contradiction d'où la pose de l'hypothèse ci-dessus :

A) Il existe un entier N pair tel que :

- 1) $N^2 + 1$ est premier,
- 2) $\forall m \geq 1, (N + 2 \times m)^2 + 1 = x_m \times y_m$ tel que $x_m < y_m$ et $x_m \neq 1$.

B) Soit $\forall t \geq 1$, le polynôme à valeurs entières $Q(t) = (N + 2 \times t)^2 + 1$.

Ces valeurs sont non premières d'après l'hypothèse.

Or d'après le théorème de Lagrange tout entier est somme de 4 carrés.

Il s'ensuit que $\forall t \geq 1, Q(t) = a_t^2 + b_t^2 + c_t^2 + d_t^2$.

Détermination des entiers a_t, b_t, c_t, d_t .

De $Q(t) = x_t \times y_t$ avec $x_t = u_t^2 + v_t^2, y_t = w_t^2 + z_t^2$

où u_t et w_t sont pairs, nous tirons les égalités :

$$a_t = u_t \times w_t, b_t = u_t \times z_t,$$

$$c_t = v_t \times w_t \text{ et } d_t = v_t \times z_t \text{ est impair,}$$

$$a_t \times d_t = b_t \times c_t.$$

La dernière relation amène à considérer les triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont de longueurs a_t et d_t (resp. b_t et c_t) et dont l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{a_t^2 + d_t^2}$ (resp. $\sqrt{b_t^2 + c_t^2}$).

Ces 2 hypoténuses sont alors vues comme les côtés d'un triangle rectangle d'hypoténuse de longueur $L_t = \sqrt{a_t^2 + d_t^2 + b_t^2 + c_t^2}$.

Nous procédons de même avec $\sqrt{(N^2 + 1)}$ et $\sqrt{(2 \times t)^2 + 4 \times N \times t}$

avec pour résultat un triangle rectangle d'hypoténuse dont la longueur est

$$\text{aussi } L_t = \sqrt{(N^2 + 1) + (2 \times t)^2 + 4 \times N \times t}.$$

On construit maintenant le cercle (C_t) de centre O et de diamètre $E_t F_t$ dont la longueur est L_t (cf. figure).

Les sommets de l'angle droit des 2 triangles rectangles inscrits dans (C_t) sont notés G et H, ce qui donne :

$$OF_t = OG = OH.$$

La loi du cosinus appliquée aux triangles OHF_t et OGF_t induit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} OH^2 + OF_t^2 - 2 \times OH \times OF_t \times \cos \alpha_t &= a_t^2 + d_t^2, \\ OG^2 + OF_t^2 - 2 \times OG \times OF_t \times \cos \beta_t &= N^2 + 1 \end{aligned}$$

A partir de la relation $OF_t = OG = OH$, on obtient :

$$N^2 + 1 = \frac{(1 - \cos \beta_t)}{(1 - \cos \alpha_t)} \times (a_t^2 + d_t^2).$$

Ce qui entraîne que $\frac{(1 - \cos \beta_t)}{(1 - \cos \alpha_t)} = \gamma_t / \delta_t$ tel que $(\gamma_t, \delta_t) = 1$

et ainsi δ_t divise $(a_t^2 + d_t^2)$ d'où $\delta_t = h_t^2 + k_t^2$.

Alors $a_t^2 + d_t^2 = (h_t^2 + k_t^2) \times (m_t^2 + n_t^2)$.

Donc $N^2 + 1 = \gamma_t \times (m_t^2 + n_t^2)$ où $\gamma_t = (p_t^2 + q_t^2)$.

Il y a alors 2 possibilités :

$\alpha)$ $m_t^2 + n_t^2 \neq 1$ alors la primalité de $N^2 + 1$ est violée,

$\beta)$ $m_t^2 + n_t^2 = 1$ alors $N^2 + 1 = p_t^2 + q_t^2$.

Comme t est arbitraire, on a ainsi une famille infinie de cercles concentriques

(C_t) de centre O de diamètres de longueur $L_t = \sqrt{a_t^2 + d_t^2 + b_t^2 + c_t^2}$

vérifiant la relation : $\forall t \geq 1, N^2 + 1 = p_t^2 + q_t^2$.

Or d'après le théorème de Fermat tout nombre premier $p \equiv 1 \pmod{4}$ est somme de 2 carrés d'une seule façon.

Conclusion.

La proposition « le polynôme $Q(t)$ est un nombre composé pour tout $t \geq 1$ » est infirmée.

Il existe donc au moins une valeur de t tel que $Q(t)$ est premier.

On pose alors $N_1 = N + 2 \times t$ et donc $N_1^2 + 1$ est premier.

On repart en A) et on remplace N par N_1 dans l'hypothèse et le processus recommence pour aboutir aux mêmes conclusions avec un entier N_2 , puis N_3 , N_4, \dots, N_i , etc...

Comme le processus est sans fin, on aboutit au

Théorème : L'ensemble des nombres premiers de la forme $(n^2 + 1)$ est infini.

Bibliographie.

A. Ferrer : Les Nombres Premiers, Librairie Vuibert, 1947.

madanibouabdallah@hotmail.fr

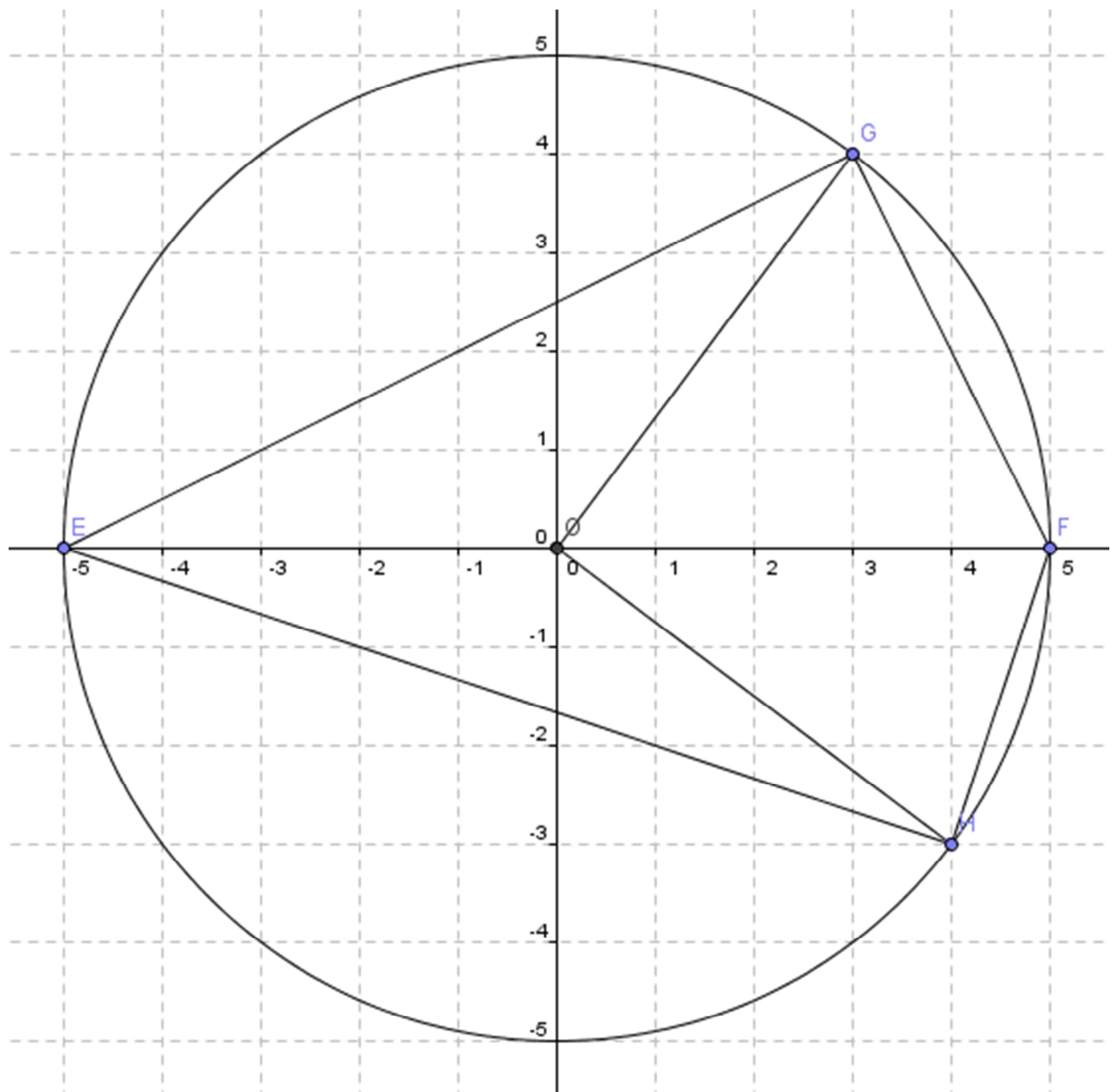


Figure du cercle (C_t)