

**Author name**

Giuliano Bettini

**Title**

**Clifford Algebra and Dirac equation for TE, TM in waveguide.**

**Abstract**

Following Hestenes and others we explore the possibility that the electron is a (sort of) bound electromagnetic wave.

To do this a waveguide analogy is considered. The E, H field components in waveguide satisfy the second order Klein Gordon equation. The question is if a (first order) Dirac equation is involved.

Making use of Clifford Algebra, by first it is shown that a spinor  $\psi$  satisfying Dirac equation describes, through the relativistic energy impulse four vector, the energy propagation of the electromagnetic field into a waveguide and in free space. At the same time  $\psi$  automatically describes TE and TM modes (TEM in free space), each with Right or Left polarization.

It is shown that this description with Dirac equation has been implicit in the waveguide theory all the time. The equivalence is embedded in the usual V and I mode description.

The Dirac equation for TE, TM modes opens new interesting interpretations. For example the effect on  $\psi$  of a gauge transformation with the electromagnetic gauge group generator ( $i\sigma_3$  in the Hestenes notation) is readily interpreted as a modification of the TE, TM group velocity. This acts as the electromagnetic force on a charge, and requires two opposite sign of (fictitious) charges for TE or TM.

Obviously this suggest an analogy with electron, positron and possibly neutrino for the TEM.

# Algebra di Clifford ed equazione di Dirac per i campi in guida

## Introduzione e sommario

Come è noto le componenti di campo e.m. in guida d'onda, se si considera la dipendenza dalla coordinata di propagazione e si trascura l'andamento sul piano trasverso, obbediscono ad una equazione del 2° ordine che matematicamente parlando è la equazione di Klein Gordon come per una particella relativistica.

Essendo questa una equazione relativistica del 2° ordine ci si chiede se ci siano, e quali siano, le corrispondenti equazioni relativistiche del 1° ordine.

Tali equazioni nella teoria dei campi elettromagnetici o delle guide d'onda non esistono. Ci sono già, è vero, equazioni relativistiche del 1° ordine e sono le equazioni di Maxwell, ma queste al 2° ordine danno l'equazione d'onda e non l'equazione di Klein Gordon

Per analogia con una particella relativistica (elettrone), potrebbe comparire l'equazione di Dirac. Pur ignorando le caratteristiche del campo sul piano trasverso essa potrebbe rappresentare globalmente la propagazione (impulso, energia, polarizzazione, energia nello stato di quiete ovvero massa, velocità), trattando quindi il campo come una particella, un piccolo corpo rigido.

Si mostra che in effetti tali equazioni esistono e sono le equazioni di Dirac ([1],.....,[4])

Le soluzioni  $\psi$  per i modi TE e TM corrispondono rispettivamente alla soluzione di onda piana per l'elettrone e per il positrone libero (v. A1). Il campo e.m. è rappresentato da un'onda piana equivalente che viaggia in un mezzo dispersivo presentante una risonanza alla frequenza di taglio della guida. La stessa soluzione si applica ai modi TEM e corrisponde alla equazione di Dirac del neutrino.

La  $\psi$  così trovata descrive contemporaneamente propagazione e polarizzazione, Si mostra difatti che  $\psi$  interpreta anche ed estende la rappresentazione della polarizzazione mediante il vettore di Jones, vettore bidimensionale complesso che viene generalizzato e identificato con uno spinore di Dirac e reinterpretato con l'algebra di Clifford.

In particolare il vettore di Stokes si identifica esattamente con lo "spin vector" della meccanica quantistica e lo spinore  $\psi$  viene identificato con l'operatore di rotazione che posiziona il vettore di spin sulla sfera di Poincaré.

Il medesimo spinore  $\psi$  operando una rotazione questa volta di Lorentz sul versore  $\hat{T}$  dell'asse tempo genera il quadrivettore di energia e impulso del campo che si propaga. Esso pure genera, se normalizzato a 1, la quadri-velocità. Da questo segue anche una interpretazione del campo legata alla cinematica relativistica di un "piccolo corpo rigido" (Hestenes).

Riassumendo tutte le grandezze in uso nello studio della propagazione in guida e nella teoria della polarizzazione radar si possono riformulare con questa trattazione.

La base fisica della riformulazione a ben riflettere sta nell'aver introdotto una descrizione del campo non più con un tensore ma con un quadrivettore di energia e impulso; e poi uno spinore  $\psi$  associato a tale quadrivettore.

Conseguentemente  $\psi$  fornisce tutte le caratteristiche globali della propagazione mentre non è in grado di descrivere le caratteristiche puntuali, cosa che peraltro non si propone. Dal punto di vista filosofico o epistemologico ciò che mi premeva dimostrare è che tutta una serie di proprietà attribuite alla meccanica quantistica non sono peculiari della meccanica quantistica, ma sono le stesse che si trovano per un campo elettromagnetico, qualora non si voglia o non si possa descriverne la struttura interna. Ciò fa la equazione di Dirac.

Infine è interessante notare quanto avviene per la equazione di Dirac in presenza di potenziale. La transizione da particella libera a particella in presenza di potenziale  $U$  ammette una rappresentazione equivalente, in guida, tramite una variazione di dimensione della guida stessa (v. A8), cosa che equivale a rallentare o accelerare il campo. Tuttavia ai TE e TM è necessario attribuire un cambio di segno in  $U$ , come se per essi fosse implicita una carica elettrica opposta.

## Equazioni di Maxwell con l'algebra di Clifford

Le equazioni di Maxwell si ottengono introducendo il numero di Clifford (v. A4) o "even number":

$$(1) \quad F = (E_t + jE_l) + Tji(H_t + jH_l)$$

(che in unità MKSA dovrebbe essere scritto con  $\sqrt{\epsilon}E$  e  $\sqrt{\mu}H$ ).

La condizione di analiticità

$$(2) \quad \partial^* F = 0$$

$$(3) \quad \partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

fornisce eguagliando le componenti:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) iH_l + \frac{\partial}{\partial z} iH_l + \frac{\partial}{\partial \tau} E_t = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) iH_l - \frac{\partial}{\partial z} iH_l + \frac{\partial}{\partial \tau} E_t = 0$$

(4)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) E_t + \frac{\partial}{\partial z} E_t + \frac{\partial}{\partial \tau} iH_t = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) E_t - \frac{\partial}{\partial z} E_t + \frac{\partial}{\partial \tau} iH_t = 0$$

dove si sono posti  $E_t$  etc eguali a:

$$E_t = E_x + iE_y$$

$$E_l = E_z + iE_\tau$$

(5)

$$H_t = H_x + iH_y$$

$$H_l = H_z + iH_\tau$$

Le (4) coincidono con le equazioni di Maxwell per il coniugato  $F^*$  (praticamente cambiando di segno alle componenti  $y, z$  di  $F$ ).

Si noti come questa proprietà corrisponda esattamente alla nota proprietà delle funzioni analitiche sul piano, alla quale questa si riduce nel caso bidimensionale: le condizioni di analiticità  $\partial^* f = 0$  coincidono con le equazioni di campo per il campo avente come componenti quelle di  $f^*$ .

Da un altro punto di vista, del tutto equivalente riguardo al risultato, si può invece dire “la analiticità per  $F$  comporta anche la analiticità per  $F\hat{i}$ ” che contiene così le componenti fisiche di  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ . E’

$$(6) \quad \partial^* F\hat{i} = 0$$

dove

$$(7) \quad F\hat{i} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} + \mathbb{T}ji(H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}) \rightarrow F\hat{i} = \vec{E} + \mathbb{T}ji\vec{H}$$

e dove quindi nella (7) le componenti  $y$  e  $z$  non sono più le medesime di (5) ma le stesse cambiate di segno.

Nella (7) ho anche posto  $E_r = 0$  e  $H_r = 0$  per avere le equazioni di Maxwell nello spazio vuoto; con  $E_r \neq 0$  e  $H_r \neq 0$  comparirebbero termini legati a densità di cariche e correnti elettriche e magnetiche.

(Nota: a rigore le vere qualità di  $\vec{E}, \vec{H}$  sono quelle di “time-like bivectors” (Hestenes, [3]), per cui andrebbe considerato  $F\hat{i}\hat{T}$  e non  $F\hat{i}$ , ma per non appesantire le notazioni uso la (7) che basta per gli attuali scopi).

È immediato e molto elegante dalla (7) ricavare le equazioni di Maxwell con div e rot. Si veda la Appendice 11.

Dall’even number  $F$  si possono formare vari “quadrati” ad esempio, con

$$F = E + \mathbb{T}jiH :$$

$$(8) \quad FF^* = (EE^* - HH^*) + \mathbb{T}ji(EH^* + HE^*) = (|\vec{E}|^2 - |\vec{H}|^2) + 2\mathbb{T}ji\vec{E} \cdot \vec{H}$$

ovvero

$$(9) \quad \frac{1}{2} FF^* = L + \mathbb{T}ji\vec{E} \cdot \vec{H}$$

invariante per trasformazioni di Lorentz e con  $L$  “densità di Lagrangiana” del campo elettromagnetico.

Un altro interessante “quadrato” è

$$(10) \quad \frac{1}{2} F \hat{T} F^* = \frac{1}{2} (E E^* + H H^*) \hat{T} + \frac{1}{2} T_{ji} (-E H^* + H E^*) \hat{T}$$

che sviluppando ulteriormente risulta:

$$(11) \quad \frac{1}{2} F \hat{T} F^* = \frac{1}{2} (|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2) \hat{T} - \vec{E} \times \vec{H}$$

ove compaiono densità di energia e impulso del campo elettromagnetico.

Costui è la quarta riga del tensore energetico del campo e fornisce densità di energia e quantità di moto.

## Equazione di Dirac con l'algebra di Clifford

L'equazione di Dirac si ottiene introducendo un "even number"  $\psi$  a 8 componenti esattamente strutturato come (1), salvo le diverse notazioni per le componenti. Poniamo

$$(12) \quad \psi = \psi_1 + j\psi_2 + Tj\psi_3 + T\psi_4$$

dove  $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$  sono numeri a indici  $1, i$ . L'equazione di Dirac è:

$$(13) \quad \partial^* \psi = -\hat{i}m\psi\hat{T}$$

o anche indifferentemente:

$$(14) \quad \partial_v \psi = -m\psi\hat{T}$$

$$(15) \quad \partial_v = \hat{i}\partial^* = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} + \frac{\partial}{\partial \tau}\hat{T}$$

Sviluppando ed eguagliando le componenti si ottengono le equazioni di Dirac in forma estesa:

$$(16) \quad \begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_4 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 = 0 \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_2 = 0 \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 = 0 \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_1 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_4 = 0 \end{aligned}$$

Un confronto con le (4) per  $m=0$  (equazioni del neutrino)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_3 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_4 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_2 = 0$$

(16bis)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial}{\partial z}\psi_1 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_3 = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial z}\psi_2 + \frac{\partial}{\partial \tau}\psi_4 = 0$$

fornisce l'identificazione formale

$$E_t = \psi_1$$

$$E_l = \psi_2$$

(17)

$$iH_t = \psi_3$$

$$iH_l = \psi_4$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x + iE_y \\ E_z + iE_\tau \\ i(H_x + iH_y) \\ i(H_z + iH_\tau) \end{bmatrix}$$

Dall'even number  $\psi$  si possono formare vari "quadrati" ad esempio il modulo

$$(19) \quad \psi\psi^*$$

oppure la quadrivelocità  $\hat{u}$  (v.A3)

$$(20) \quad \psi\hat{T}\psi^* = \hat{u} \quad \hat{u}^2 = -1$$

vera se  $\psi$  è unitario ossia se  $\psi$  è un "rotore"

$$(21) \quad \psi = R \quad RR^* = 1$$

Le condizioni di invarianza relativistica per la (13), ossia di invarianza per rotazioni spaziotemporali del riferimento di un angolo  $\varphi$ , fanno sì che  $\psi$  si trasformi con gli angoli metà  $\varphi/2$ . Ciò comporta (l'uno fatto è conseguenza dell'altro e viceversa) che tutte le grandezze tipo  $\psi \hat{T} \psi^*$  si trasformano come vettori (v.A6). In particolare se  $\psi$  è unitario le grandezze

$$\begin{aligned}
 \psi \hat{i} \psi^* &= \hat{e}_1 \\
 \psi \hat{j} \psi^* &= \hat{e}_2 \\
 \psi \hat{k} \psi^* &= \hat{e}_3 \\
 \psi \hat{T} \psi^* &= \hat{e}_0 = \hat{u}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

formano un sistema di assi ruotato rispetto a  $\hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$ .

Questo stabilisce una relazione con la cinematica relativistica di un piccolo corpo rigido (Hestenes). Le (22) se  $\psi$  è funzione del tempo ad esempio comprensiva di un termine

$$e^{\hat{i}\hat{j}\alpha} = e^{i\alpha}$$

(rotazione secondo il bivettore  $\hat{i}\hat{j}$ ) allora le (22) determinano la posizione e il movimento di un sistema di assi  $e_\mu$  rotanti rispetto agli assi fissi  $\hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$ , dove  $\psi \hat{T} \psi^* = \hat{e}_0 = \hat{u}$  è la quadrivelocità e  $\psi \hat{k} \psi^* = \hat{e}_3 = \hat{s}$  è lo spin.

## Il quadrivettore energia e impulso

La chiave di volta fisica o fisico matematica di tutta la faccenda è la seguente. Un oggetto dotato o meno di massa ha un impulso  $p_i$  nel linguaggio della relatività (tensori, quadrivettori, eccetera) che vale:

$$(23) \quad p_i = mu_i$$

dove  $m$  è la massa a riposo e  $u_i$  è la quadrivelocità.  $m$  è uno scalare e  $u_i$  e  $p_i$  si trasformano come quadrivettori.

In parole povere con questa descrizione l'oggetto è trattato come un tutto unico, la sua costituzione interna viene ignorata, ed è descritto da un quadrimpulso  $p_i$  che è un quadrivettore.

Anche un impulso radar o un pacchetto d'onde che si propaga in guida è a modo suo un oggetto che si propaga, dotato nel suo complesso di impulso ed energia. Pertanto ci si può proporre di rappresentarlo globalmente come un oggetto che si propaga, ignorandone la costituzione interna, e descrivendolo complessivamente con un quadrimpulso.

Ora la grandezza  $\frac{1}{2}F\hat{T}F^*$  è o sarebbe fortemente candidata a rappresentare ciò, se

non fosse che  $\frac{1}{2}F\hat{T}F^*$  non è un quadrivettore ma è una riga del  tensore  densità di impulso ed energia, vale a dire non si trasforma come (e non è) un quadrivettore.

Le grandezze  $F\hat{T}F^*$  e  $\psi\hat{T}\psi^*$  sono peraltro visibilmente simili sia nella forma che nella sostanza, e  $\psi\hat{T}\psi^*$  se  $\psi$  è uno spinore si trasforma come un quadrivettore (v.A6).

Pertanto una grandezza strutturata come  $\psi\hat{T}\psi^*$  è un buon candidato per rappresentare energia e impulso del campo elettromagnetico considerato come un tutto unico, ignorandone la costituzione interna.

La grandezza  $\frac{1}{2}F\hat{T}F^*$  fa la stessa cosa ma dandone una descrizione interna punto per punto, cosa che stiamo ipotizzando preclusa.

Si noti invece (Pauli, [5]) che l'integrale di volume di  $\frac{1}{2}F\hat{T}F^*$  dà impulso ed energia totali ed esse formano un quadrivettore.

## Le grandezze V ed I in guida d'onda

Nella teoria delle guide d'onda si introduce, con un certo grado di arbitrarietà che resta a disposizione, un set di grandezze V ed I, tensione e corrente, anche se per l'appunto (Franceschetti) "nei modi non TEM non è più immediata la identificazione di V ed I".

Si pone per quanto riguarda i campi trasversali

$$\vec{E}_t(x, y, z) = V(z)\vec{e}(x, y)$$

(24)

$$\vec{H}_t(x, y, z) = I(z)\vec{h}(x, y)$$

con la condizione

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_s \vec{E}_t \times \vec{H}_t \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*)$$

(25)

Il significato fisico delle (24) è che in V ed I si ignora volutamente l'andamento dettagliato di  $\vec{E}_t$  ed  $\vec{H}_t$  sul piano trasverso, ponendolo eguale a costante.

Il significato della (25) è che si impone tuttavia che le grandezze V ed I riproducano correttamente il valore dell'energia totale che si propaga.

Posto

$$\frac{V}{I} = Z$$

(26)

esiste però un grado di arbitrarietà in V ed I. E' possibile alterare V ed I e contemporaneamente  $\vec{e}, \vec{h}$  nel modo seguente:

$$V' = \alpha V, \vec{e}' = \frac{1}{\alpha} \vec{e}$$

(27)

$$I' = \frac{1}{\alpha} I, \vec{h}' = \alpha \vec{h}$$

mantenendo la condizione

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(VI^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V'I'^*)$$

(28)

Con i nuovi valori risulta

$$(29) \quad Z' = \frac{V'}{I'} = \alpha^2 \frac{V}{I} = \alpha^2 Z$$

La nuova scelta lascia inalterati sia il valore dei campi trasversi che il valore dell'energia che si propaga, che hanno un significato fisico indipendente da ogni scomposizione.

Le varie scelte dipendono quindi dalla definizione, arbitraria, della impedenza  $V/I$ .

## Confronto fra le equazioni per V ed I e l'equazione di Dirac

Possiamo ora porre a confronto le equazioni di V ed I per un modo in guida con le equazioni fra due singole componenti della  $\psi$  di Dirac.

Per esempio le equazioni per un TE, con le convenzioni di segno IEEE  $e^{+i\omega t}$ , sono:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= -i\omega\mu I \\ (30) \quad \frac{dI}{dz} &= -i\omega\epsilon \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) V \end{aligned}$$

Cerchiamo una soluzione di onda piana delle equazioni di Dirac con la dipendenza  $e^{+i\omega t}$  e per propagazione lungo z. Cerchiamo inoltre la soluzione nella forma  $\psi_2, \psi_4 = 0$  e con le sole  $\psi_3$  e  $\psi_1$  differenti da zero. Le equazioni (16) forniscono (posto  $c=1$  e  $\omega_0 = m$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + (i\omega + i\omega_0)\psi_1 &= 0 \\ (31) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + (i\omega - i\omega_0)\psi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tentiamo una soluzione nella forma

$$\begin{aligned} \psi_3 &= Ae^{i\omega t - ik_z z} \\ (32) \quad \psi_1 &= Be^{i\omega t - ik_z z} \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (31) si ottiene

$$\begin{aligned} -ik_z A + (i\omega + i\omega_0)B &= 0 \\ (33) \quad -ik_z B + (i\omega - i\omega_0)A &= 0 \end{aligned}$$

da cui con un po' di passaggi si trova necessario:

$$(34) \quad k_z^2 = \omega^2 - \omega_0^2$$

e infine (A arbitrario, A=1):

$$\psi_3 = e^{i\omega t - ik_z z}$$

(35)

$$\psi_1 = \frac{k_z}{\omega + \omega_0} e^{i\omega t - ik_z z}$$

Questa è in meccanica quantistica la classica soluzione per il positrone (positrone =  $e^{+i\omega t}$  con le convenzioni di segno della meccanica quantistica).

Le soluzioni V ed I delle (30) per il modo TE non sono queste, ma è facile mostrare che in effetti sono queste, la apparente diversità dipende soltanto da una arbitraria definizione di tensione e corrente e di impedenza secondo le (27) (29).

Per chi avesse familiarità con le linee di trasmissione può essere di aiuto una digressione di elettrotecnica, chi non ne avesse voglia può saltare direttamente alle (41).

Le equazioni (30) possono essere pensate come quelle della propagazione in una linea dispersiva con taglio a  $\omega_0$ .

Le equazioni di una linea sono

$$\frac{dV}{dz} = -ZI$$

(36)

$$\frac{dI}{dz} = -YV$$

dove Z e Y dipendono dalla linea e  $\sqrt{Z/Y}$  è l'impedenza caratteristica della linea.

Con le (30) quindi si assume implicitamente

$$Z = i\omega\mu$$

(37)

$$Y = i\omega\epsilon \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

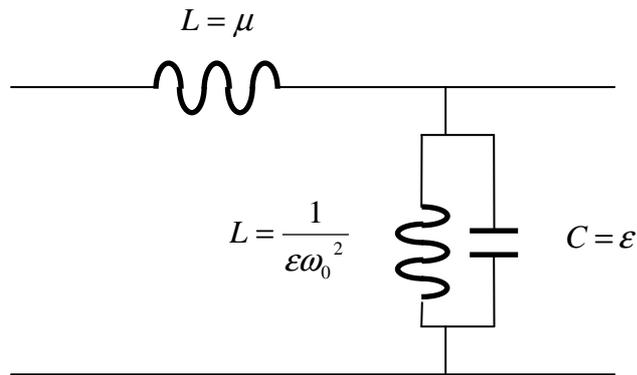
e l'impedenza caratteristica

$$(38) \quad \sqrt{Z/Y} = \sqrt{\frac{\mu/\epsilon}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

è pari all'impedenza  $Z_{TE}$  del modo (“scelta di Schelkunoff”):

$$(39) \quad \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} = Z_{TE}$$

La linea equivalente contiene una Z serie e una Y parallelo così fatte



La linea è dispersiva poiché l'impedenza caratteristica (38) non è costante ma dipende dalla frequenza. La linea risuona a:

$$(40) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

Si ponga ora nelle (27)

$$(41) \quad \alpha = \frac{\sqrt{\omega + \omega_0}}{\sqrt{\omega}}$$

Sostituendo nella (30) si ha

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{dV'}{dz} + (i\omega + i\omega_0)\mu I' &= 0 \\ \frac{dI'}{dz} + (i\omega - i\omega_0)\epsilon V' &= 0 \end{aligned}$$

E la nuova Z vale per la (29)

$$(43) \quad Z' = \frac{V'}{I'} = \frac{\omega + \omega_0}{\omega} Z_{TE}$$

E dunque le equazioni per tensione e corrente sono effettivamente le equazioni di Dirac per  $\psi_3$  e  $\psi_1$ , non senza avere notato che le equazioni valgono per grandezze equidimensionali  $\sqrt{\mu}I'$  e  $\sqrt{\epsilon}V'$ , giustamente, essendo  $\psi_3$  e  $\psi_1$  equidimensionali.

Non è ancora dimostrato che con le grandezze V ed I si possa formare uno spinore completo  $\psi$  a 8 componenti, o 4 componenti complesse  $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ , ma la cosa è facilmente fattibile e viene fatta in Appendice. Anticipiamo qualche conclusione. Cominciamo a considerare la soluzione a riposo per il positrone che per le (35) è  $\psi_3 = e^{+i\omega t}$ ,  $\psi_1 = 0$ . Per la linea ciò significa che c'è tensione V e non c'è corrente I, ma riguardando il significato originario di V ed I nelle (24) possiamo anche dire che c'è campo elettrico trasversale e non c'è campo magnetico trasversale. In queste condizioni cioè le grandezze V ed I o campo elettrico trasversale e campo magnetico trasversale descrivono un'onda piana equivalente TE che non si propaga, essendo zero il vettore di Poynting (\*vedi nota).

Possiamo dare una interpretazione elettrica di  $\psi$  associandogli esplicitamente un vettore campo elettrico  $\vec{E}_t = \psi \hat{i} = e^{i\omega t} \hat{i}$ , "fittizio" in quanto definito con gli stessi gradi di arbitrarietà con i quali era definito V.

Il campo elettrico ruota sul piano trasverso con  $e^{+i\omega t}$ .

Tuttavia ora  $e^{+i\omega t}$  assume il significato concreto di rotazione fisica e ci informa che il campo elettrico trasversale sta ruotando in un ben preciso senso.

In questo caso dunque quella che era la soluzione originaria della linea con "V complesso" viene arricchita da una informazione di polarizzazione. Orbene l'equazione di Dirac ha 2 distinte soluzioni a riposo per il positrone, soluzioni a spin opposto che sono

-solo  $\psi_3 \neq 0$

-solo  $\psi_4 \neq 0$

e queste corrispondono a un TE sinistro e un TE destro.

Se si ripete la trattazione dei modi TE, qui fatta, con la linea equivalente ai modi TM, si trova a riposo una soluzione con sola corrente, solo campo magnetico trasversale rotante. In conclusione si trova che l'equazione di Dirac completa ha 4 distinte soluzioni a riposo:

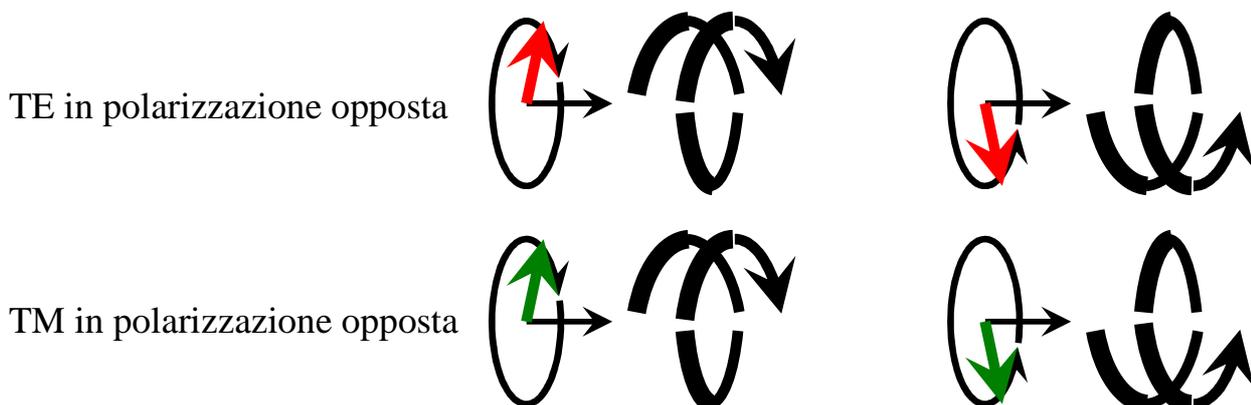
-solo  $\psi_1 \neq 0$

-solo  $\psi_2 \neq 0$

-solo  $\psi_3 \neq 0$

-solo  $\psi_4 \neq 0$

e queste forniscono i TE e i TM nei due sensi di polarizzazione.



La descrizione del campo elettromagnetico con uno spinore  $\psi$  dunque non solo si mostra essere equivalente alla descrizione con V ed I complessi ma si arricchisce di un ben preciso significato fisico dovuto all'algebra di Clifford. In sostanza la scrittura convenzionale di V ed I con esponenziali ( $e^{+i\omega t}$  per esempio, con le convenzioni IEEE) diventa di per sé la rappresentazione di un ente fisico rotante.

V (Volt) diventa  $\vec{E}_t$  (Volt/metro) e I (Ampere) diventa  $\vec{H}_t$  (Ampere/metro) e la linea equivalente diventa un mezzo equivalente in cui si propaga un'onda piana equivalente al modo, ma che viaggia in un mezzo dispersivo.

Se si riflette questa generalizzazione spinoriale non è che una piccola variante rispetto al punto di vista di Schroedinger, solo che la variante tiene conto della polarizzazione, ed è relativistica.....(non per niente sono le equazioni di Dirac).

---

\*Nota: mentre a riposo la corrispondenza  $V \rightarrow \vec{E}_t \rightarrow TE$  è fisicamente ragionevole, la corrispondenza  $TE \leftrightarrow \text{positrone} \leftrightarrow (\psi_3 \neq 0)$  è ambigua perché dipende dalle convenzioni sugli esponenziali che sono (.....ovviamente) opposte. Per la IEEE le frequenze positive sono  $e^{+i\omega t}$  mentre in meccanica quantistica le energie (frequenze) positive sono  $e^{-i\omega t}$ . Se la matematica del positrone diventasse la matematica dell'elettrone il TE a riposo sarebbe rappresentato da  $(\psi_1 \neq 0)$ , più simpaticamente simile alla identificazione formale (18).

## La polarizzazione radar

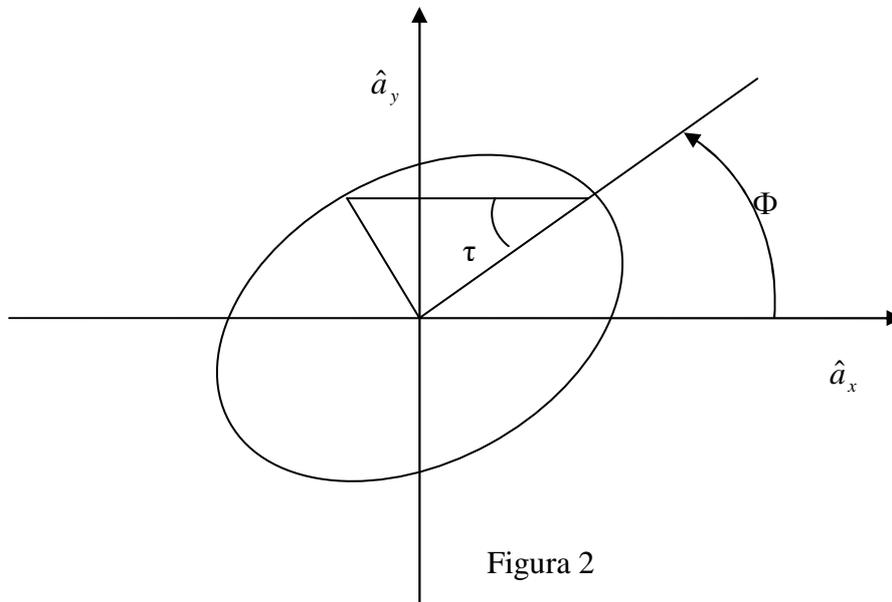
Le notazioni della polarizzazione radar propongono, per esempio, una scrittura del campo elettrico con il vettore di Jones

$$(44) \quad \vec{E} = \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tau \\ i \sin \tau \end{bmatrix} e^{i\omega t} \right\}$$

Ossia (si noti con la solita convenzione  $e^{+i\omega t}$  della IEEE):

$$(45) \quad \vec{E} = \text{Re} \left[ (\cos \Phi \cos \tau - i \sin \Phi \sin \tau) e^{i\omega t} \right] \hat{a}_x + \text{Re} \left[ (\sin \Phi \cos \tau + i \cos \Phi \sin \tau) e^{i\omega t} \right] \hat{a}_y$$

da cui l'ellisse di polarizzazione rappresentato in figura 2.



Mostreremo che la polarizzazione è rappresentabile in algebra di Clifford con il numero (“Clifford number” a 4 componenti  $1, i, j, ij$ )

$$(46) \quad \psi = e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-i\omega t}$$

Una notazione simile compare nei testi sulla polarizzazione radar, con le matrici di Pauli ad esponente, ma la ...”piccola” differenza consiste nel fatto che qui (46) è uno spinore soluzione della equazione di Dirac a riposo, quindi in grado di descrivere completamente il quadrivettore del campo elettromagnetico in qualunque condizione di moto.

In più se si calcola la posizione ruotata del versore  $\hat{k}$  ossia  $\hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^*$ , quello che secondo Hestenes è il versore di spin, vedremo che  $\hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^*$  ha un posizionamento nello spazio in una maniera che riproduce la sfera di Poincaré.

Le dimostrazioni sono presto fatte.

Il fatto che (46) sia uno spinore soluzione a riposo delle equazioni di Dirac (16) è dimostrato nei paragrafi successivi e comunque è direttamente verificabile per sostituzione.

Per associargli un campo elettrico, per ragioni che verranno giustificate in seguito uso la seguente regola. Anzitutto si separa  $\psi$  in componenti “spin up” e “spin down”:

$$(47) \quad \psi = \psi_+ + \psi_-$$

dove:

$$(48) \quad \begin{aligned} \psi_+ &= \frac{1}{2}(\psi - i\psi i) \\ \psi_- &= \frac{1}{2}(\psi + i\psi i) \end{aligned}$$

(Questo naturalmente introduce una ulteriore rassomiglianza fra la (46) e una funzione d’onda, tutta da apprezzare e interpretare. Da un punto di vista puramente matematico le (48) separano le componenti che rispettivamente commutano e anticommutano con  $i$ ).

Ciò fatto, si associa a  $\psi$  un campo elettrico (o in generale elettromagnetico) con le :

$$(49) \quad \vec{E} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{i} \qquad (49bis) \quad \vec{E} + \tau j i \vec{H} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{i}$$

E’ ora verificabile che (46) è fornisce una espressione completa della polarizzazione. Se si sviluppa difatti ulteriormente (45) si ottiene:

$$(51) \quad \vec{E} = (\cos \Phi \cos \tau \cos \omega t + \sin \Phi \sin \tau \sin \omega t) \hat{a}_x + (\sin \Phi \cos \tau \cos \omega t - \cos \Phi \sin \tau \sin \omega t) \hat{a}_y,$$

mentre se si sviluppa la (46) con la (49) si ottiene dopo numerosi passaggi

$$(52) \quad \vec{E} = \sqrt{2}(\cos \Phi \cos \tau \cos \omega t + \sin \Phi \sin \tau \sin \omega t) \hat{i} + \sqrt{2}(\sin \Phi \cos \tau \cos \omega t - \cos \Phi \sin \tau \sin \omega t) \hat{j}$$

ossia la stessa cosa della (51) (salvo un  $\sqrt{2}$  di diversa normalizzazione).

Chiaramente con questo abbiamo riprodotto la fisica del moto ellittico di  $\vec{E}$  e quindi abbiamo riprodotto l’ellisse e le convenzioni di figura 2.

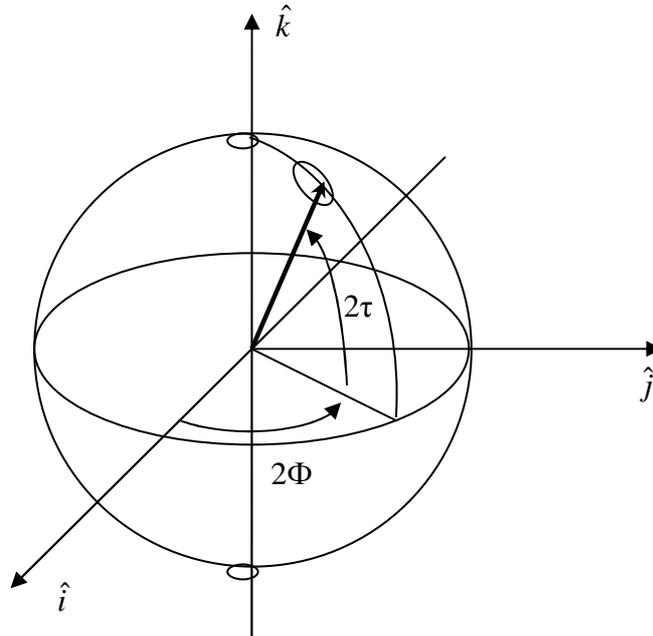
Lo stesso spinore  $\psi$  si porta dietro in modo obbligato una posizione di  $\hat{e}_3$  nello spazio fisico x,y,z.

E' difatti:

$$(53) \quad \hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^*$$

da cui con qualche passaggio si ottiene:

$$(54) \quad \hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^* = (\cos 2\Phi \cos 2\tau) \hat{i} + (\sin 2\Phi \cos 2\tau) \hat{j} + (\sin 2\tau) \hat{k}$$



Viene così evocato qui il vettore di Stokes di componenti  $g_1 g_2 g_3$ . Qui però  $g_1 g_2 g_3$  non è uno spazio astratto ma è uno spazio fisico, quello della posizione di  $\hat{e}_3 = \psi \hat{k} \psi^*$  che altro non è che  $\hat{k}$  ruotato mediante  $\psi$  o secondo Hestenes l'asse di rotazione del corpo rigido (!!).

Anche questi aspetti sono tutti da apprezzare e interpretare e vengono ripresi in seguito.

Possiamo seguire i passaggi espliciti che portano  $\hat{k}$  in  $\hat{e}_3$  mediante successive rotazioni.

$$\begin{aligned}
 (55) \quad \psi \hat{k} \psi^* &= e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-i\alpha} \hat{k} e^{+i\alpha} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\tau} e^{i\Phi} = \\
 &= e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} \hat{k} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\tau} e^{i\Phi} = \\
 &= e^{-i\Phi} e^{-j\tau} \left( \hat{k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) e^{j\tau} e^{i\Phi} = \\
 &= e^{-i\Phi} e^{-j\tau} \hat{i} e^{j\tau} e^{i\Phi} = \\
 &= e^{-i\Phi} \hat{i} e^{j2\tau} e^{i\Phi}
 \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio ruota  $\hat{i}$  di  $2\tau$  verso  $\hat{k}$ , e il tutto poi viene ruotato di  $2\Phi$  verso  $\hat{j}$ .  
(Attenzione alle differenze quali  $\hat{j}$  e  $j$ , poiché  $j = \hat{i}\hat{k}$ ).

## Il mapping fra spinori e onde piane

Abbiamo notato che in base alle (24) con le grandezze “complesse”  $V$  ed  $I$  (a indici  $1,i$ ) si introducono grandezze complesse  $(1,i)$  che sono in realtà campi. Sono campi trasversali, rispettivamente elettrico e magnetico, precisamente campi costanti in  $x,y$  e funzione solo di  $z$ . Sono campi “fittizi” almeno quanto lo sono le grandezze  $V, I$ , ma tuttavia adeguati allo scopo di descrivere correttamente il trasporto di energia in guida,

Accade che a riposo  $V$ , ovvero  $E$ , ha due soluzioni  $(1,i)$  corrispondenti alle due polarizzazioni circolari di un TE.

Altre due soluzioni ci sono per i TM, per un totale di due soluzioni elettriche e due magnetiche, in tutto 4 soluzioni  $(1,i)$ .

Resta da stabilire come associare queste 4 componenti  $(1,i)$  alle componenti  $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$  di uno spinore  $\psi$ .

In altre parole si tratta di stabilire cosa in  $\psi$  è “elettrico” e cosa è “magnetico”.

In un paragrafo precedente ho notato che “la corrispondenza  $TE \leftrightarrow \text{positrone} \leftrightarrow (\psi_3 \neq 0)$  è ambigua” e che” se la matematica del positrone diventasse la matematica dell’elettrone il TE a riposo sarebbe rappresentato da  $(\psi_1 \neq 0)$ , più simpaticamente simile alla identificazione formale (18)”.

Per seguire la identificazione formale (18) assumo che le componenti  $1,i,j,ij$  di  $\psi$  corrispondano a campi elettrici.

A questo punto si presenta una seconda difficoltà,

La equazione di Dirac per onda piana a riposo ha le seguenti 4 soluzioni

$$\begin{aligned}
 \psi &= e^{-i\alpha z} & \psi_1 &\neq 0, \text{ elettrone} \\
 \psi &= je^{-i\alpha z} & \psi_2 &\neq 0, \text{ elettrone} \\
 \psi &= Tjje^{+i\alpha z} & \psi_3 &\neq 0, \text{ positrone} \\
 \psi &= Tji(je^{+i\alpha z}) & \psi_4 &\neq 0, \text{ positrone}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Si noti che  $Tji$

$$Tji = \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}
 \tag{57}$$

è lo “immaginario dello spaziotempo”, ha quadrato  $-1$   $(Tji)^2 = -1$  e commuta in modo innocuo con tutti gli elementi  $1, i, j, T, ij, iT, jT, Tji$  dell’algebra even. Viene indicato a volte come “ $i$ ” nelle notazioni di Hestenes o di Cambridge.

Prendiamo le due soluzioni “elettrone”

$$(58) \quad \begin{aligned} \psi &= e^{-i\alpha t} & \psi_1 &\neq 0, \text{ elettrone} \\ \psi &= j e^{-i\alpha t} & \psi_2 &\neq 0, \text{ elettrone} \end{aligned}$$

Le due soluzioni hanno componenti  $1, i, j, ij$ .

La prima delle due con componenti  $1, i$  si interpreta in modo naturale come campo elettrico trasversale, basta porre  $\vec{E}_i = \psi \hat{i} = e^{-i\alpha t} \hat{i}$ .

Per la seconda a componenti  $j, ij$  non si riesce ad avere una interpretazione come campo trasversale. Non se ne vede una ragione.

Peraltro certamente in meccanica quantistica essa rappresenta la soluzione elettrone a spin opposto. Per ricondurla a componenti  $1, i$  e farla ruotare in senso opposto basta moltiplicarla per  $-j$  da destra. La formula finale è la (49).

Pertanto il mapping che abbiamo stabilito con le (47)..(49) fra l’even number  $\psi$  e il vettore fisico  $\vec{E}$  è così fatto, che le posizioni  $j, ij$  corrispondono ancora a componenti trasversali  $1, i$ , ma ruotanti in senso opposto.

Lo stesso dicasi per le componenti di  $\psi$  con un  $Tji$  davanti, che hanno il medesimo significato ma sono componenti magnetiche. Come dire che il mapping (49) vale anche se  $\psi$  è a 8 componenti, e in questo fornisce non solo  $\vec{E}$  ma anche  $\vec{H}$  nella forma

$$(49bis) \quad \vec{E} + Tji\vec{H} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j)\hat{i}$$

## Sintesi

Possiamo ora tirare le somme e ripercorrere a ritroso il cammino fatto. Partendo questa volta dalla equazione di Dirac si arriva in un attimo alla rappresentazione completa del campo elettromagnetico nei vari modi TE e TM e nelle varie polarizzazioni.

$\psi = e^{-i\alpha x}$  e  $\psi = je^{-i\alpha x}$  sono soluzione della equazione di Dirac per onda piana a riposo. (n.b.: il discorso si ripete con le stesse soluzioni aventi un  $T_{ji}$  davanti).

Pertanto è pure soluzione

$$(59) \quad \psi = \cos \rho e^{-i\alpha x} + \sin \rho (je^{-i\alpha x})$$

o qualunque altra combinazione lineare del tipo ( $\psi\psi^* = 1$ ):

$$(60) \quad \psi = e^{-i\Phi} \cos \rho e^{-i\alpha x} + e^{-i\Phi} \sin \rho (je^{-i\alpha x})$$

che è una lecita combinazione lineare delle due soluzioni di base che compaiono nella (59) ed è, per comodità, normalizzata a 1.

La (60) può essere riscritta indifferentemente:

$$\psi = e^{-i\Phi} (\cos \rho + j \sin \rho) e^{-i\alpha x} = e^{-i\Phi} e^{j\rho} e^{-i\alpha x}$$

oppure:

$$(61) \quad \psi = e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-i\alpha x}$$

pur di porre

$$(62) \quad \rho = -\tau + \frac{\pi}{4}$$

A parte la irrilevanza delle notazioni (usare  $\rho$  oppure  $\tau$  significa avere, per esempio, la circolare  $e^{-i\alpha x}$  per  $\rho = 0$  oppure per  $\tau = \frac{\pi}{4}$ ) la (60) così riespressa contiene il termine di polarizzazione impiegato nella teoria della polarizzazione radar vale a dire (“dropping the propagation factor” come dicono i libri) il fattore:

$$(63) \quad e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Tuttavia adesso (63) ha ben altri significati.

Con un fattore di propagazione  $e^{-i\alpha x}$  diventa soluzione della equazione di Dirac, la (61) per un campo elettrico in polarizzazione ellittica, a riposo.

Con un fattore di propagazione  $e^{+i\alpha x}$  e un  $Tj$

$$(64) \quad \psi = Tj e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{+i\alpha x}$$

diventa soluzione della equazione di Dirac per un campo magnetico in polarizzazione ellittica, a riposo.

Con un fattore di propagazione (v. A5)

$$(65) \quad \psi = (1 + Tj) e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-i\alpha x + ik_z z}$$

diventa “una polarizzazione  $e^{-i\Phi} e^{-j\tau} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-i\alpha x}$  portata alla velocità della luce”. E’ insomma la soluzione di  $\partial^* \psi = 0$ . In termini di meccanica quantistica un neutrino o meglio una acconcia collezione di neutrini. In termini di campo elettromagnetico un TEM che si propaga nella direzione positiva dell’asse  $z$ .

Pertanto riassumendo lo stesso fattore di polarizzazione (63) compare in tutte le formule (61) (64) (65) salvo che ora non siamo più in presenza di scritte convenzionali della polarizzazione ma di soluzioni della equazione di Dirac.

(Da un punto di vista radar la (63) può essere considerato il segnale in banda base depurato del “coho”).

(61) e (64) possono “andare in moto” a velocità  $v$  restando soluzioni della equazione di Dirac, mentre la (65) non ha un riferimento a riposo, è per così dire inevitabilmente in moto a velocità  $c$ .

Se si resta in base circolare è immediato nei vari casi ricavare il campo elettromagnetico nella usuale forma  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$ .

Ad esempio da (61) si ha in sequenza

$$(66) \quad \psi = e^{-i\Phi} e^{j\rho} e^{-i\alpha x} = \cos \rho e^{-i\Phi} e^{-i\alpha x} + \sin \rho e^{-i\Phi} e^{+i\alpha x} j$$

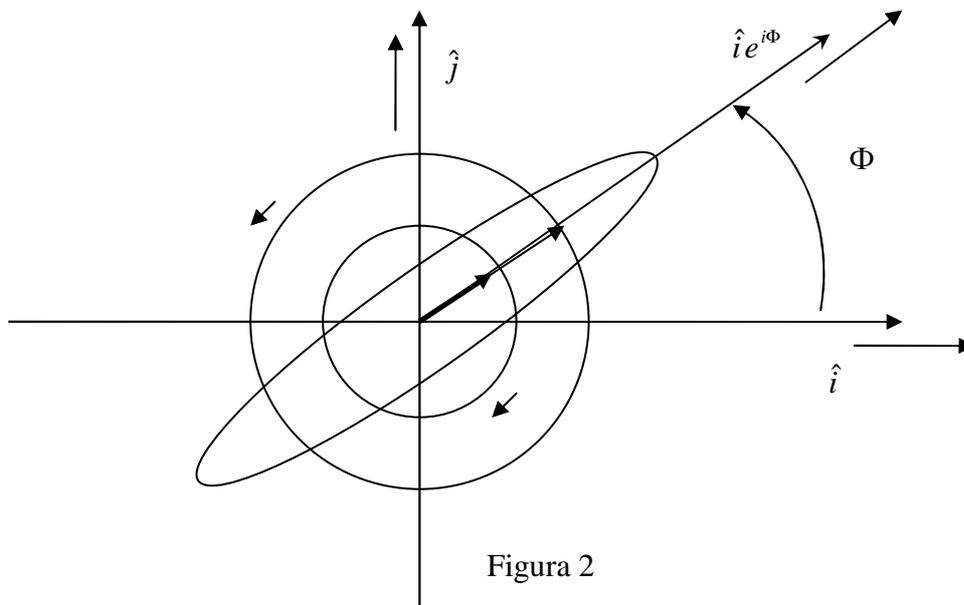
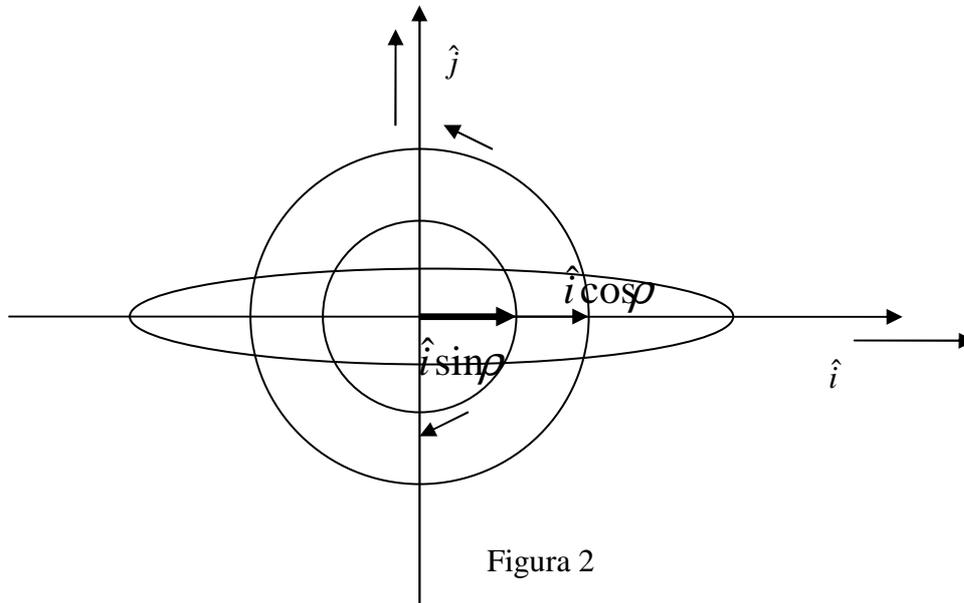
da cui a occhio si riconoscono le componenti che rispettivamente commutano e anticommuto con  $i$

$$(67) \quad \begin{aligned} \psi_+ &= \cos \rho e^{-i\Phi} e^{-i\alpha x} \\ \psi_- &= \sin \rho e^{-i\Phi} e^{+i\alpha x} j \end{aligned}$$

e usando la già citata  $\vec{E} + Tji\vec{H} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j)\hat{i}$  si ottiene un campo  $\vec{E}$

$$(68) \quad \vec{E} = \cos \rho \hat{i} e^{+i\Phi} e^{+i\alpha x} + \sin \rho \hat{i} e^{+i\Phi} e^{-i\alpha x}$$

Sono chiaramente evidenziate due circolari opposte che per  $t = 0, \Phi = 0$  partono dall'asse  $\hat{i}$ , mentre per  $\Phi \neq 0$  partono dall'asse  $\hat{i}e^{i\Phi}$ .



Esaminiamo invece la (65). Trattando per esempio il caso di circolare pura si ha

$$(69) \quad \psi = (1 + \Gamma_j) e^{-i\alpha x + ik_z z}$$

e quindi con qualche rapido passaggio (è  $\psi \equiv \psi_+$  perché commuta con  $i$ )

$$(70) \quad \vec{E} + \Gamma_j i \vec{H} = \psi_+ \hat{i} = (e^{-i\alpha x + ik_z z} + \Gamma_j e^{-i\alpha x + ik_z z}) \hat{i} = e^{-i\alpha x + ik_z z} \hat{i} + \Gamma_j i e^{-i\alpha x + ik_z z} \hat{j}$$

Si tratta di due vettori elettrico e magnetico di eguale ampiezza e corotanti, solo che per  $t=0$   $z=0$  uno (elettrico) parte da  $\hat{i}$  e l'altro da  $\hat{j}$ . La situazione che viene rappresentata quindi è quella di un'onda piana con vettore di Poynting diretto secondo le  $z$  positive e con rotazione destra (R) nelle convenzioni IEEE.

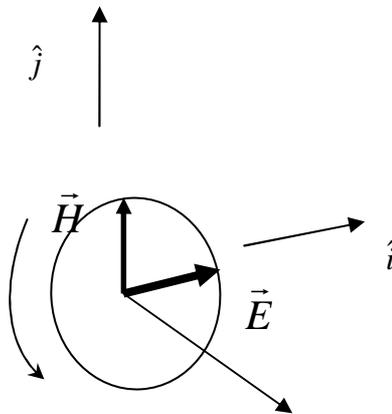


Figura 2

## Conclusioni

Come ho accennato nell'introduzione mi interessavano in particolare le considerazioni filosofiche. Per essere più espliciti, non potendo mostrare che l'elettrone è un campo elettromagnetico, ho inteso dimostrare che un campo elettromagnetico si può descrivere come l'elettrone con l'equazione di Dirac. La polarizzazione radar viene reinterpretata con possibili conseguenze teoriche e/o pratiche, e l'algebra di Clifford trova qui una delle applicazioni in cui se ne può meglio apprezzare il significato geometrico (per altre considerazioni vedi A9, A10).

## A1

Fermo restando il significato fisico inambiguo della applicazione di una equazione di Dirac ad uno spinore che caratterizza TEM TE e TM, non saprei dire se abbia qualche base l'analogia TE↔elettrone e/o TM↔positrone. E' possibile che l'analogia posi sul fatto che a riposo per un TE o TM:

$$(71) \quad \psi\psi^* = E^2 - H^2$$

Quindi per un TE o TM laddove ci fosse solo E o solo H:

$$(72) \quad \psi\psi^* = E^2 > 0$$

$$(73) \quad \psi\psi^* = -H^2 < 0$$

Siccome  $\psi\psi^*$  è invariante per trasformazioni di Lorentz, questo valore a riposo è valido sempre. Quindi le (72) e (73) ci informano che esistono due diverse entità di tal fatta.

Da un altro punto di vista, stante la ortogonalità dei modi TE e TM anche per una medesima frequenza di taglio, e dato che un campo è sviluppabile in TE e TM, può darsi che le equazioni ci stiano informando su tutti i possibili stati di base esistenti, punto e basta.

Un'altra ragione per la analogia potrebbe risiedere nella "carica" positiva o negativa che occorre affibbiare ai TE e TM per descrivere il loro comportamento quando vengono accelerati o rallentati.

Questa analogia (vedi dopo, A8) si nota dipendere dal segno opposto nell'esponente di  $e^{i\alpha}$ .

## A2

E' interessante notare che  $\hat{i}$   $\hat{j}$   $\hat{k}$  sono isomorfi con le matrici di Pauli

$$(74) \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Difatti:

$$(75) \quad \sigma_\mu^2 = 1 \quad \sigma_i \sigma_k = -\sigma_k \sigma_i \quad \sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$$

e queste coincidono esattamente con le formule (vedi dopo, A4)

$$(76) \quad \hat{i}^2 = 1 \quad \hat{j}^2 = 1 \quad \hat{k}^2 = 1 \quad \hat{j}\hat{i} = -\hat{i}\hat{j} \quad \text{etc} \\ \hat{i}\hat{j} = I\hat{k} \quad \text{con } I = \hat{i}\hat{j}\hat{k}$$

(Si noti che  $I = \hat{i}\hat{j}\hat{k}$  gioca a tutti gli effetti un ruolo di immaginario puro nell'algebra degli  $\hat{i}$   $\hat{j}$   $\hat{k}$ , poiché commuta ed ha quadrato -1).

Così pure sono isomorfi con le matrici di Pauli:

$$(77) \quad \hat{i}\hat{T} \quad \hat{j}\hat{T} \quad \hat{k}\hat{T}$$

Invece  $i$  ,  $j$  ,  $ji$  sono isomorfi con i simboli di Hamilton, vedi (88) (89), quindi  $1a + ib + jc + jid$  è un quaternione di Hamilton.

### A3

Ricordo che l'asse tempo  $\hat{T}$  ruotato mediante una trasformazione di Lorentz diventa la quadrivelocità  $\hat{u}$  ( $\hat{T}^2 = -1, \hat{u}^2 = -1$ ).

Difatti sia per esempio:

$$(78) \quad R = e^{-\hat{k}\hat{T}\frac{\varphi}{2}}$$

e si ruoti  $\hat{T}$  facendo

$$(79) \quad R\hat{T}R^* = e^{-\hat{k}\hat{T}\frac{\varphi}{2}}\hat{T}e^{\hat{k}\hat{T}\frac{\varphi}{2}} = \hat{T}e^{\hat{k}\hat{T}\varphi}$$

Ma risulta sviluppando l'esponenziale

$$(80) \quad \hat{T}e^{\hat{k}\hat{T}\varphi} = \hat{T} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \hat{k}\hat{T} \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

dove

$$(81) \quad \varphi = \operatorname{arcth} \frac{v}{c}$$

per cui la

$$(82) \quad \hat{u} = \hat{T}e^{\hat{k}\hat{T}\varphi} = \left( \frac{\hat{T}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \hat{k} \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

è la quadrivelocità del corpo. Il suo quadrato vale  $(-1)$  per qualunque velocità  $v$ . Nel caso della (82) il movimento è sull'asse  $z$  essendo stata operata una trasformazione di Lorentz (rotazione) secondo il bivettore  $\hat{k}\hat{T}$  normale al piano  $(z, \tau)$ .

## A4

Impiego un'algebra basata su 4 elementi  $\hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$  versori degli assi nello spaziotempo (a volte indicati secondo gli autori con  $e_1, e_2, e_3, e_0$ ). Essi hanno le seguenti proprietà:

$$(83) \quad \hat{i}^2 = 1 \quad \hat{j}^2 = 1 \quad \hat{k}^2 = 1 \quad \hat{T}^2 = -1 \quad \hat{j}\hat{i} = -\hat{i}\hat{j} \text{ etc}$$

ed eventualmente adopero i simboli  $i \ j \ T$  per generalizzare l'usuale unità immaginaria  $i$  del piano  $xy$

$$(84) \quad i = \hat{i}\hat{j} \quad j = \hat{i}\hat{k} \quad T = \hat{i}\hat{T}$$

Il tutto, unito alla regola riguardante i coniugati

$$(85) \quad (AB)^* = B^* A^*$$

genera tutte le proprietà che interessano.

E' sufficiente difatti ammettere che  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  non cambiano per coniugazione (come è intuitivo che debba essere) per ricavare per esempio, o ritrovare, la usuale regola per il coniugato  $i^*$ :

$$(86) \quad i^* = (\hat{i}\hat{j})^* = \hat{j}^* \hat{i}^* = \hat{j}\hat{i} = -\hat{i}\hat{j} = -i$$

e così pure si ricava

$$(87) \quad j^* = -j \quad T^* = -T$$

Valgono, conseguentemente a (83) e (84), le:

$$(88) \quad i^2 = -1 \quad j^2 = -1 \quad T^2 = 1$$

$$(89) \quad ij = -ji \quad iT = -Ti \quad jT = -Tj$$

L'algebra a 16 elementi

$1, \hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$  (4 elementi),  $\hat{i}\hat{j} \hat{i}\hat{T}$  etc. (6 elementi),  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$  etc. (4 elementi),  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$

contiene una subalgebra pari a 8 elementi ("even subalgebra of a Clifford algebra", Hestenes)

$$1, \hat{i}\hat{j} \hat{i}\hat{T} \text{ etc. (6 elementi), } \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$$

riscrivibile a piacimento come formata da tutti i possibili prodotti fra  $i \ j \ T$

$$1, i, j, T, ij, iT, jT, Tji$$

L'elemento  $Tji$  conseguentemente alle precedenti proprietà gode delle:

$$(90) \quad (Tji)^* = Tji$$

$$(91) \quad (Tji)^2 = -1$$

Il complesso

$$(92) \quad z = x + iy \quad (\bar{x} = \hat{i}z = x\hat{i} + y\hat{j})$$

si generalizza nello spaziotempo con

$$(93) \quad z = x + iy + jz + T\tau \quad (\bar{x} = \hat{i}z = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + \tau\hat{T})$$

(senza confondere gli  $z$  a primo e secondo membro, sorry).

Vale la proprietà

$$(94) \quad zz^* = x^2 + y^2 + z^2 - \tau^2 \quad (\bar{x}^2 = \bar{x}\bar{x} = zz^*)$$

Sul piano  $xy$  i simboli o operatori

$$(95) \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

servono rispettivamente a esprimere la derivata e le condizioni di Cauchy Riemann.

Questi si generalizzano in

$$(96) \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} - j \frac{\partial}{\partial z} - T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

e vale la proprietà

$$(97) \quad \partial\partial^* = \partial^*\partial = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Alternativamente al simbolo o operatore  $\partial^*$  che serve a esprimere la analiticità si può adoperare l'operatore che si ottiene moltiplicando per  $\hat{i}$  da sinistra

(nota: se  $\partial^* f = 0$  anche  $\hat{i}\partial^* f = 0$  e viceversa).

L'operatore così ottenuto

$$(98) \quad \hat{i}\partial^* = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} + \frac{\partial}{\partial \tau}\hat{T} = \bar{\partial}_v$$

è formalmente come si vede un quadrivettore, come  $\bar{x}$ .

Eccetera eccetera.

Questa algebra differisce dalla STA per la scelta della base con le proprietà (83). La scelta della STA è una base di vettori “spacelike”  $\gamma_k (k = 1,2,3)$  a modulo -1, e un vettore “timelike” a modulo 1. Si ha così una base nello spaziotempo che in luogo delle (83) ha le proprietà:

$$(99) \quad \gamma_k^2 = -1, \gamma_0^2 = 1$$

Così facendo per ottenere una base di tre versori degli assi x, y, z a modulo 1 si devono definire i tre bivettori (Hestenes, [3]):

$$(100) \quad \sigma_k = \gamma_k \gamma_0$$

Hestenes nota esplicitamente le opportunità dell'una o dell'altra scelta ([3], pag.25): “If instead we had chosen  $\gamma_k^2 = 1, \gamma_0^2 = -1$  we could entertain the solution  $\sigma_k = \gamma_k$ , which may seem more natural, because...”, perché i vettori nello spaziotempo sarebbero anche vettori dello spazio.

Preferisco mantenere questa scelta più adatta agli ingegneri (versori  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  a modulo 1, unità immaginaria  $i$ , numero complesso  $x + iy$ , eccetera).

Oltretutto (Doran,[2]) per qualunque delle due scelte le algebre pari sono isomorfe, per cui lavorando nell'algebra pari non cambia niente.

Vorrei infine notare che tutte le dizioni che ho usato come vettore, numero complesso, immaginario, versore eccetera eccetera richiamano mnemonicamente concetti del passato e ci possono talvolta aiutare ma sono sostanzialmente fuorvianti. Tutti gli enti che abbiamo introdotto sono semplicemente numeri, e se vogliamo possiamo correttamente chiamarli “Clifford numbers”, soggiacenti alle semplici regole, somma prodotto e divisione, dell'algebra di Clifford. Lo stesso discorso vale per i simboli quali l'asterisco  $()^*$  oppure  $\bar{()}$  oppure  $\hat{()}$  che qui hanno la sola funzione di richiamo mnemonico. Ciò che conta sono solo le proprietà dell'algebra che ho brevemente riassunto.

## A5

Le soluzioni spinoriali relative ai TEM hanno alcune proprietà particolari che conviene esaminare. Abbiamo visto che per i TE TM vale la equazione (con  $\omega_0$  pulsazione di taglio del modo):

$$(101) \quad \partial^* \psi = -\hat{i} m \psi \hat{T}$$

e per i TEM

$$(102) \quad \partial^* \psi = 0$$

Una soluzione di (102) è per esempio

$$(103) \quad \psi = (1 + Tj)e^{-i\alpha t + ik_z z}$$

che è “ciò che diventa la polarizzazione  $e^{-i\alpha t}$  portata alla velocità della luce”. In termini spinoriali un neutrino, in termini di campo e.m. lo spinore che descrive un TEM.

Si noti che formalmente la equazione per  $\psi$  è la stessa che vale per  $F$  campo elettromagnetico, ma è ovviamente diversa la regola di trasformazione di Lorentz oltre che il significato. L'onda piana, fittizia, equivalente allo spinore  $\psi$  si ottiene da

$$(104) \quad \vec{E} + Tj\vec{H} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j)\hat{i}$$

mentre se si trattasse di un campo e.m. il campo si otterrebbe da

$$(105) \quad F\hat{i} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} + Tj(H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k})$$

(la situazione non è molto diversa da quella che sul piano ammette come funzioni analitiche sia  $z$  che  $\sqrt{z}$ ).

La presenza del termine

$$(106) \quad (1 + Tj) = (1 + \hat{k}\hat{T})$$

nella (103) dà luogo ad alcune proprietà particolari ad esempio  $\psi\psi^* = 0$  e

$$(107) \quad \psi = \psi \hat{k}\hat{T}$$

Calcolando la quadrivelocità e lo spin mediante le solite relazioni:

$$(108) \quad \hat{u} = \psi \hat{T} \psi^* \quad \hat{s} = \psi \hat{k} \psi^*$$

si trova con qualche passaggio e usando la (107)

$$(109) \quad \hat{u} = -\hat{s}$$

Possiamo calcolare esplicitamente la quadrivelocità che corrisponde al segnale (103). In questo caso la normalizzazione di  $\psi$  a modulo 1 non è possibile perché  $\psi \psi^* = 0$ , ma uso una arbitraria normalizzazione di  $\psi$  con un  $\sqrt{2}$ . Si ha così

$$(110) \quad \psi \hat{T} \psi^* = 1/2 (1+Tj) e^{-i\alpha t + ik_z z} \hat{T} e^{+i\alpha t - ik_z z} (1-Tj) = 1/2 (1+Tj) \hat{T} (1-Tj)$$

e infine usando la (106)

$$(111) \quad \psi \hat{T} \psi^* = \hat{u} = \hat{T} - \hat{k}$$

Il modulo della quadrivelocità è giustamente zero e il suo significato è energia=impulso. Lo spin per la (109) vale

$$(112) \quad \hat{s} = \hat{k} - \hat{T}$$

ed è un quadrivettore a modulo nullo.

Se si considera l'altra soluzione a spin opposto cosa si trova?

La soluzione di (102) con  $\psi_2$  e  $\psi_4$  diversi da zero fornisce:

$$(113) \quad \psi = (1+Tj) j e^{-i\alpha t + ik_z z}$$

Questa è "ciò che diventa la polarizzazione  $j e^{-i\alpha t}$  portata a velocità  $c$ ".

Questa volta si trova invece della (107)

$$(114) \quad \psi \equiv -\psi \hat{k} \hat{T}$$

Calcoli analoghi ai precedenti conducono a

$$(115) \quad \hat{u} = \hat{s}$$

$$(116) \quad \hat{u} = \hat{T} - \hat{k}$$

$$(117) \quad \hat{s} = \hat{T} - \hat{k}$$

Il risultato è piuttosto logico perché la quadrivelocità non può differire da prima (viaggiando sempre l'impulso verso le z positive). Invece otteniamo una significativa informazione riguardo la polarizzazione cioè che lo spin nei due casi è opposto. Possiamo identificare le componenti di  $\hat{s}$  con le 4 componenti del vettore di Stokes della polarizzazione radar per le quali

$$(118) \quad g_0^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$$

## A6

Ripassiamo il significato del voler descrivere un tetravettore per mezzo di uno spinore ad esso associato.

Partiamo dallo studio di un moto piano con i numeri complessi, invece che tramite il vettore velocità tangente alla traiettoria. Ponendo

$$\vec{v} = \rho e^{i\varphi} \hat{i}$$

tutto lo studio cambia.

Invece dell'analisi in termini del **vettore** velocità

$$\vec{v}$$

si passa allo studio del **numero complesso**

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

e si assiste così a tutta la maniera affascinante (per chi lo è) con la quale la Matematica dei numeri complessi interviene in un problema di Fisica.

Possiamo dire (dopo Hestenes) che l'operazione che s'è fatta ha introdotto un'algebra di Clifford costruita sulla base dei due versori del piano:

$$\hat{i}, \hat{j}$$

e avendo identificato come “immaginario” il bivettore

$$i = \hat{i}\hat{j}$$

Lo spazio dei numeri complessi  $z$  viene così identificato come “even subalgebra of a Clifford algebra” di componenti, se così vogliamo chiamarle, “reale” 1 e “immaginaria”  $i$ . La cosa essenziale è che tutto è chiaro, tutti i ruoli, anche geometrici, sono chiariti. La dizione “complessi” o “immaginari” è sostanzialmente inutile o fuorviante.

Facciamo ora il salto successivo che è quello di passare dal piano 2D allo spazio 3D. Tutto si ripropone con in più il fatto, che considero del tutto irrilevante anche se necessario e illuminante se viene analizzato nei suoi significati, che ora il numero complesso deve venire applicato metà da destra e metà da sinistra. Tutto questo è noto.

Il numero ora ha 4 componenti e si chiama quaternione.

Con il solito linguaggio e con la chiarezza chiarificatrice che dobbiamo a David Hestenes (anche se con simboli miei) possiamo dire che questo introduce una “even subalgebra of a Clifford algebra” costruita su una base di 3 versori spaziali:

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

Le componenti dei quaternioni sono appunto le componenti “even” dell'algebra  $1, \hat{i}\hat{j}, \hat{i}\hat{k}, \hat{j}\hat{k}$ .

L'ultimo e decisivo step è quello di passare in 4D, ossia allo studio di un vettore dello spaziotempo o **quadrivettore** con il tramite d'un **numero complesso**, secondo la solita tecnica che già abbiamo visto sul piano 2D e nello spazio 3D.

E' necessario (e sufficiente) introdurre un'algebra di Clifford su una base di 3 versori di riferimento dello spazio e uno del tempo:

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{T}$$

e questo identifica una "even subalgebra of a Clifford algebra" a 8 componenti

$$1, \hat{i}\hat{j}, \hat{i}\hat{k}, \hat{j}\hat{k}, \hat{i}\hat{T}, \hat{j}\hat{T}, \hat{k}\hat{T}, \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$$

I numeri complessi  $\psi$  che così nascono sono gli spinori di Dirac salvo dettagli e/o notazioni. Anche ora il numero complesso deve venire applicato metà da destra e metà da sinistra. Per esempio se  $\vec{P}$  è un **quadrivettore** energia e impulso allora è  $\vec{P} = \psi\hat{T}\psi^*$  come accade con i quaternioni (salvo qui l'uso di  $\hat{T}$ ) eccetera.

L'essenziale è che tutto è chiaro, tutti i ruoli, anche geometrici, sono chiariti.

Notare che il sottocaso di componenti  $1, \hat{i}\hat{j}, \hat{i}\hat{k}, \hat{j}\hat{k}$  fornisce i già citati quaternioni nello spazio 3D mentre le componenti  $1, \hat{i}\hat{j}$  danno gli ordinari numeri complessi sul piano  $\hat{i}, \hat{j}$ .

Fra le varie conseguenze della rotazione nello spaziotempo c'è quella che ora per es. una quadrivelocità può essere ruotata con un bivettore tipo  $\hat{i}\hat{j}$  e allora ruota sul piano  $\hat{i}, \hat{j}$ , ma anche con un bivettore tipo  $\hat{i}\hat{T}$  e allora ruota sul piano  $\hat{i}, \hat{T}$  ovvero accelera o rallenta.

La legge di trasformazione "single-sidedly" degli spinori è riassunta efficacemente da Doran et. al. (v. per es. "States and Operators in the Spacetime Algebra", Found. Phys. 23(9), 1993).

Se un vettore esempio

$$(119) \quad \hat{s} = \psi\hat{k}\psi^*$$

viene ruotato attraverso  $R'(\_)R'^*$ , il risultato della rotazione è

$$(120) \quad \hat{s}' = R'\hat{s}R'^*$$

quindi il corrispondente spinore  $\psi$  deve trasformarsi con la legge

$$(121) \quad \psi' = R'\psi$$

"We use the term spinor to denote any object which transforms single-sidedly under a rotor R"

## A7

Dimostriamo che le equazioni delle linee di trasmissione equivalenti ai modi TE e TM in guida sono le equazioni di Dirac.

La trattazione dei TM assieme ai TE porta a queste equazioni (esempio da Franceschetti oppure [6], [7] ):

$$\begin{aligned} & \frac{dV}{dz} = -i\omega\mu I \\ \text{TE} & \quad \frac{dI}{dz} = -i\omega\epsilon \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) V \\ (122) & \\ \text{TM} & \quad \frac{dV}{dz} = -i\omega\mu \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) I \\ & \quad \frac{dI}{dz} = -i\omega\epsilon V \end{aligned}$$

Si ponga nelle (27) per quanto riguarda i TM

$$(123) \quad \alpha = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega + \omega_0}}$$

e così si ottiene con qualche passaggio un nuovo set di equazioni per i TM analoghe alla (41) per i TE.

Raggruppando il tutto

$$\begin{aligned} & \frac{dV'}{dz} + (i\omega + i\omega_0)\mu I' = 0 \\ \text{TE} & \\ & \frac{dI'}{dz} + (i\omega - i\omega_0)\epsilon V' = 0 \\ (124) & \\ & \frac{dV'}{dz} + (i\omega - i\omega_0)\mu I' = 0 \\ \text{TM} & \\ & \frac{dI'}{dz} + (i\omega + i\omega_0)\epsilon V' = 0 \end{aligned}$$

Nelle convenzioni in uso (es. Ramo) si ipotizza una dipendenza esponenziale  $e^{+i\omega t}$  quindi  $i\omega$  proviene da una derivata  $\frac{\partial}{\partial t}$  e pertanto possiamo riscrivere le formule per ciò che esse veramente significano (passo anche per semplicità a un sistema con V,I equidimensionali e  $c=1$ )

$$\frac{dV'}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega_0 \right) I' = 0$$

TE

$$\frac{dI'}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_0 \right) V' = 0$$

(125)

$$\frac{dV'}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_0 \right) I' = 0$$

TM

$$\frac{dI'}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega_0 \right) V' = 0$$

Ricordando le (24) possiamo esplicitare le varie  $V(z)$  ed  $I(z)$  nel loro significato di grandezze complesse  $(1, i)$  rappresentanti campi trasversali costanti, rispettivamente TE e TM

$$\frac{dE_{TE}}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega_0 \right) H_{TE} = 0$$

TE

$$\frac{dH_{TE}}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_0 \right) E_{TE} = 0$$

(126)

$$\frac{dE_{TM}}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_0 \right) H_{TM} = 0$$

TM

$$\frac{dH_{TM}}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega_0 \right) E_{TM} = 0$$

Le equazioni di Dirac per onda piana in  $z$  sono

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_2 = 0$$

(127)

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_4 = 0$$

Come sono raggruppabili le 4 grandezze  $(1, i)$  complesse  $H_{TE} E_{TE} H_{TM} E_{TM}$  in uno spinore di Dirac  $\psi = \psi_1 + j\psi_2 + Tj\psi_3 + T\psi_4$  dove  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  sono numeri a indici  $1, i$ ?

Usiamo per questo la corrispondenza (49bis) già stabilita fra spinori e campi che qui rammento e poi sviluppo per esteso. E'

$$(128) \quad \vec{E} + Tji\vec{H} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{i}$$

ed essendo

$$(129) \quad \psi = \psi_1 + j\psi_2 + Tj\psi_3 + T\psi_4$$

si ottiene dalle (48)

$$(130) \quad \psi_+ = (\psi_1 + Tj\psi_3)$$

$$(131) \quad \psi_- = (j\psi_2 + T\psi_4)$$

da cui

$$(132) \quad \vec{E} + Tji\vec{H} = \psi_+ \hat{i} + \psi_- (-j) \hat{i} = (\psi_1 + Tj\psi_3 + j\psi_2(-j) + T\psi_4(-j)) \hat{i}$$

Questa si può anche scrivere esplicitando i campi che corrispondono a  $\psi_+$  e  $\psi_-$

$$(133) \quad \vec{E} + Tji\vec{H} = F\hat{i} = (E_+ + TjiH_+ + E_- + TjiH_-) \hat{i}$$

Considerato il significato dei vari termini ci si accorge che così è scritto lo spinore  $\psi$  in modo diverso. Per confronto:

$$(134) \quad \begin{aligned} E_+ &= \psi_1 \\ TjiH_+ &= Tj\psi_3 \\ E_- &= j\psi_2(-j) \\ TjiH_- &= T\psi_4(-j) \end{aligned}$$

Ricavando  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  e sostituendo nelle equazioni di Dirac (127) si arriva con lunghi ma semplici passaggi a

$$\frac{diH_+}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega_0 \right) E_+ = 0$$

$$\frac{diH_-}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_0 \right) E_- = 0$$

(135)

$$\frac{dE_+}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\omega_0 \right) iH_+ = 0$$

$$\frac{dE_-}{dz} + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + i\omega_0 \right) iH_- = 0$$

che sono precisamente le equazioni (126) dei modi in guida di Franceschetti – Ramo ma sono anche le equazioni di Dirac dove semplicemente si è fatto il seguente cambio di denominazione nelle componenti di  $\psi$  :

$$(136) \quad \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_+ \\ jE_-j \\ iH_+ \\ ijH_-j \end{bmatrix}$$

## A8

Partiamo dalle equazioni di Dirac (127) per particella libera con le componenti  $\psi_1$  e  $\psi_3$

$$(137) \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im \right) \psi_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im \right) \psi_3 = 0$$

Queste possono rappresentare un TE o un TM secondo se risolte a riposo con  $\psi_1 \neq 0$  oppure con  $\psi_3 \neq 0$ .

Le equazioni di Dirac in presenza di energia potenziale  $U$  diventano per un elettrone

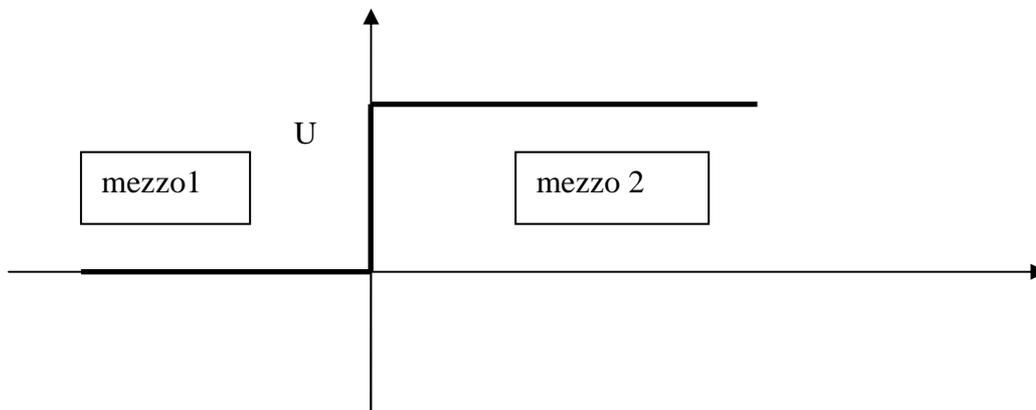
$$(138) \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + iU + im \right) \psi_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + iU - im \right) \psi_3 = 0$$

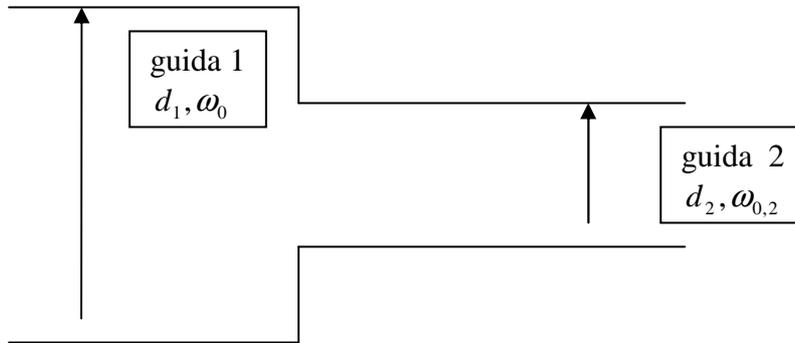
Queste risolte per  $\psi_1 \neq 0$  a riposo forniscono (ponendo  $m \rightarrow \omega_0$ )

$$(139) \quad \psi_1 = e^{-i\omega t + ik_z z} \quad \psi_3 = B e^{-i\omega t + ik_z z} \quad B = \frac{\sqrt{(\omega - U) - \omega_0}}{\sqrt{(\omega - U) + \omega_0}}$$

$$(140) \quad k_z^2 = (\omega - U)^2 - \omega_0^2$$



L'andamento (140) del  $k_z$  consente il calcolo della velocità nel mezzo 2 e però consente anche una analogia con la propagazione del TE in una guida 2 con una diversa frequenza di taglio (ovvero dimensione  $d_2$ )



Per questo si usi la  $v_g = \frac{d\omega}{dk_z}$ , formula per la velocità di gruppo in guida d'onda.

Dalla (140) si ricava

$$(141) \quad k_z = \sqrt{(\omega - U)^2 - \omega_0^2} \quad \text{e quindi}$$

$$(142) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{0,2}^2}{\omega^2}} \quad \text{dove}$$

$$(143) \quad \omega_{0,2} = \frac{\omega_0}{1 - \frac{U}{\omega}}$$

La (143) fornisce implicitamente la dimensione della guida 2 rispetto alla guida 1. Viceversa data una transizione fra una guida 1 di dimensione  $d_1$  e una seconda guida di dimensione  $d_2$  la (143) fornisce il valore di  $U$  da inserire nella equazione di Dirac per rappresentare questa transizione fra guide.

L'analogia fornisce utili indicazioni per la interpretazione del "paradosso di Klein". In breve per  $U = \omega - \omega_0$  la (143) fornisce  $\omega \equiv \omega_{0,2}$  vale a dire la guida 2 è al taglio e l'onda diventa evanescente. Se  $U$  cresce ulteriormente, per  $U = \omega$  la guida 2 si chiude completamente e una ulteriore crescita di  $U$  non ha più senso fisico. Esplicitamente  $d_2 = (1 - U/\omega)d_1$  e quindi per  $U \geq \omega$  la dimensione della seconda guida diventerebbe negativa ossia l'equazione (138) non è più rappresentativa del fenomeno.

Supponiamo ora che la stessa transizione fra guide del caso precedente interessi un TM invece che un TE.

Dal punto di vista elettromagnetico a parità di parametri  $\omega, \omega_0$  e di dimensione della guida 2 non fa differenza che si tratti di un TM o di un TE, nel senso che la velocità finale del campo nel mezzo 2 è la medesima. Tuttavia per ottenere questo è necessario come ora vedremo assumere al posto delle (138) altre equazioni nelle quali la energia potenziale va cambiata di segno, come avviene con il cambio di segno della carica elettrica ( $U = \pm eV$ ) nelle equazioni di Dirac. Precisamente le equazioni debbono diventare come quelle del positrone

$$(144) \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - iU + im \right) \psi_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - iU - im \right) \psi_3 = 0$$

Esse in effetti hanno soluzione

$$(145) \quad \psi_3 = e^{+i\omega t - ik_z z} \quad \psi_1 = B e^{+i\omega t - ik_z z} \quad B = \frac{\sqrt{(\omega - U) - \omega_0}}{\sqrt{(\omega - U) + \omega_0}}$$

$$k_z^2 = (\omega - U)^2 - \omega_0^2$$

Da queste discendono le stesse formule (141) (142) (143) e la stessa velocità nelle guida 2 che avrebbe avuto un TE.

## A9

Riassumendo, se si tratta un grumo di campo elettromagnetico come un tutt'uno senza guardarci dentro, esso si scopre che viene descritto da uno spinore di Dirac e dalla equazione di Dirac dell'elettrone.

Il semplice meccanismo, e la ragione per cui ciò avviene, è il seguente: descrivendo un assegnato campo elettromagnetico tramite energia e quantità di moto totali (i.e. l'integrale di volume delle densità date dal tensore energia e quantità di moto) esse formano un tetravettore.

A questo punto il gioco è fatto perché, come ben si vede nella STA o Space Time Algebra (Hestenes, Doran etc.) per dare un tetravettore si deve (o si può) dare uno spinore di Dirac.

Da qui svariate conseguenze e riflessioni, in varie direzioni.

Una, per esempio, riguarda il ruolo chiarificatore dell'entità "spinore". Si pensi ai quaternioni che, uno a destra e uno a sinistra, descrivono un vettore 3D. Ebbene come ben si vede con la matematica della STA gli spinori di Dirac, uno operante da destra e uno da sinistra, servono per dare un tetravettore, 4D (relativistico).

(il gioco dunque che ha fatto comparire spinori ed equazione di Dirac è stato proprio quello di voler descrivere l'assegnato campo elettromagnetico con un tetravettore, ossia tramite l'integrale di volume delle densità di impulso ed energia, ossia come un tutto unico, ossia senza guardarci dentro).

Nota:

la equazione di Dirac, cui soggiacciono gli spinori, si scopre essere elegantemente e niente altro che la equazione, relativistica e scritta in termini STA, delle usuali equazioni del campo e.m. in guida scritte in termini di V ed I.

Interessantissimo ripassare per esempio Franceschetti che mostra bene come V ed I nascano da integrali di volume, e come siano definite tramite una scelta a priori arbitraria della impedenza, una delle quali interpreta esattamente anche il "significato elettrico" dello spinore di Dirac.

Ci sono varie altre conseguenze. Ne rammento alcune.

Scegliamo come campo e.m. un campo in guida che possa viaggiare anche a velocità  $v$  differente da  $c$ ; lo spinore fornisce senza che gli sia stato richiesto due distinti tipi di campo, che si scoprono essere i TE e i TM, ciascuno in polarizzazione destra oppure sinistra, per un totale di 4 possibili soluzioni. Alla velocità della luce invece ne vengono fornite solo 2 (logico, perché un TE a questo punto è indistinto da un TM)

Vogliamo ora dare al nostro campo elettrico in guida la possibilità di andare più veloce o più lento, o di deviare? Nella equazione di Dirac, cui soggiacciono gli spinori, si deve introdurre un parametro di accoppiamento formalmente identico alla carica elettrica, dopodichè allargare o stringere la guida (cioè variare la velocità del campo) oppure incurvare la guida si fan comparire nella equazione con un vettore, analogo al potenziale vettore A, oppure uno scalare analogo al potenziale elettrico “phi”.

Dal lato del fisico, o del fisico matematico, emerge probabilmente la possibilità di chiarire alcune cose che riguardano i nostri metodi.

Esempio la equazione di Dirac, che è ancora oggetto di dibattito e di discussione (vedi es. [8],.....[12] oppure [13] D. Hestenes, “Mysteries and Insights of Dirac Theory”) fornisce in modo automatico una doppia possibilità di particella / antiparticella e un doppio stato di spin.

Ora è senz’altro rilevante che con l’ unica condizione matematica di descrivere un tetravettore con lo spinore ad esso associato, ne venga per il campo elettromagnetico in modo automatico una doppia possibilità di stato TE / TM e un doppio stato di polarizzazione circolare. Esiste cioè una completa analogia e non è la sola. Ne segue che l’equazione di Dirac si presta ad essere indagata anche in questo caso concreto piuttosto che nel caso, meno “accessibile”, dell’elettrone.

## A10

Fra le varie conseguenze io penso (ed è questa una delle tante ragioni che giustificano questo scritto) che lo studio dello scattering radar da un bersaglio, con le notazioni dell'algebra di Clifford ci possa far stabilire un parallelo fra le interazioni segnale/bersaglio e le interazioni elettrodeboli.

Le notazioni dell'algebra di Clifford non sono ovviamente essenziali ma per creare un parallelo potrebbero essere estremamente didattiche e "fisiche".

Potremmo forse approfondire, con un esempio concreto, ossia visibile, ossia.....

l'esempio dello scattering da un bersaglio radar, cosa sono le varie convenzioni metodologie formalismi regole particelle interazioni e chi più ne ha e più ne metta che compaiono nello Standard Model.

Entro in qualche dettaglio.

L'osservazione di base da cui partire è la seguente.

Abbiamo visto che  $\psi$  ha in definitiva il compito di fornire il quadrivettore  $\psi\hat{T}\psi^*$ .

Orbene uno spinore si assegna con 8 parametri mentre ne bastano 4 per assegnare un tetravettore. Esiste quindi una quadruplice arbitrarietà in  $\psi$  (Hestenes, [11], [14]), che è rappresentata dalla trasformazione a 4 parametri:

$$(146) \quad \psi' \rightarrow \psi e^{T_{ji}\beta + ij\nu - i\Phi + j\rho}$$

ed è infatti significativo che una arbitraria trasformazione di questo tipo lascia  $\psi\hat{T}\psi^*$  inalterato.

Ora il gruppo  $e^{T_{ji}\beta + ij\nu - i\Phi + j\rho}$  è il gruppo  $SU(2) \otimes U(1)$  ( $i, j, ij$  è  $SU(2)$ ). Ne segue che nella descrizione del campo elettromagnetico con un quadrivettore  $\psi\hat{T}\psi^*$  è possibile sottoporre  $\psi$  ad una trasformazione  $SU(2) \otimes U(1)$  senza alterare il quadrivettore energia e impulso.  $SU(2) \otimes U(1)$  agisce quindi come una "simmetria interna".

Potremmo allora supporre con un poco di fantasia:

a) che la (146) sia accettata come lecita trasformazione globale in una nuova equazione che la possa accettare ("a modification of the Dirac equation to accomodate the larger gauge group", Hestenes, [11]).

L'equazione di Dirac (13) infatti così come è formulata accetta solo l'"electromagnetic gauge group"  $e^{-i\Phi}$ .

La nuova equazione .....potrebbe essere (?) la equazione del un neutrino o radaristicamente del TEM ossia:

$$(147) \quad \partial^* \psi = 0;$$

b) che nella nuova equazione la trasformazione passando da globale a locale generi secondo le usuali tecniche dei campi di gauge le varie forze elettrodeboli agenti su un TEM/ neutrino e/o TE/TM, essendo tuttavia stavolta ben visibili i significati. Fermiamoci qui con l'immaginazione.

Come dice Hestenes per terminare uno dei suoi articoli più fantasiosi :

*"That's enough speculation for one paper!"*

## A11

Dalla:

$$(7) \quad F\hat{i} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} + Tji(H_x\hat{i} + H_y\hat{j} + H_z\hat{k}) \rightarrow F\hat{i} = \vec{E} + Tji\vec{H}$$

é immediato e molto elegante ricavare le equazioni di Maxwell con div e rot.

A questo serve una (lunga) premessa su una una proprietà del prodotto in Algebra di Clifford, proprietà che non ho citato in **A4**.

In Algebra di Clifford nasce in modo naturale un prodotto che congloba prodotto scalare e prodotto vettore.

Si parta dalla ovvia uguaglianza:

$$(147) \quad ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba)$$

Questa ovvietà assume una sua ragion d'essere per il fatto che in Algebra di Clifford ci sono elementi anticommutativi, per cui ha un senso parlare di  $ba$  distinto da  $ab$ . Essi sono anche potenzialmente opposti.

Una analisi di questa relazione con qualche esempio mostra subito che

$$(148) \quad \frac{1}{2}(ab + ba) = a \bullet b$$

è fra vettori l'usuale prodotto interno ed è uno scalare, mentre quello che è opportuno chiamare prodotto esterno:

$$(149) \quad \frac{1}{2}(ab - ba) = a \wedge b$$

ricorda, ma è bene non chiamarlo così, il prodotto vettore  $a \times b$ .

Infatti se  $a$  e  $b$  sono vettori,  $a \wedge b$  è un bivettore, mentre  $a \times b$  è un vettore.

Fra i due esiste la relazione:

$$(150) \quad a \wedge b = (\hat{i}\hat{j}\hat{k})(a \times b)$$

che si può anche adoperare invertita:

$$(151) \quad a \times b = -(\hat{i}\hat{j}\hat{k})(a \wedge b)$$

La (151) non è necessario mandarla a mente perché la si ricorda facilmente dall'esempio:

$$(152) \quad \hat{i}\hat{j} = (\hat{i}\hat{j}\hat{k})\hat{k}$$

che mette in relazione il bivettore  $\hat{i}\hat{j}$  con il vettore associato  $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ .

(Nota: qui intervengono le colpe e i meriti di Gibbs. Egli ha avuto la colpa e il merito di far intendere che  $a \wedge b$ , che nasce come bivettore, fosse un vettore, e infatti come tale egli tratta  $a \times b$ , e così pure lo trattano gli ingegneri per i quali  $\vec{E} \times \vec{H}$  è un vettore. Questo nasconde le vere qualità del prodotto fra due vettori ortogonali, che sono quelle di una entità bivettore. Ad ogni modo la relazione (151) mette le cose a posto). Estendiamo la (151) all'operatore vettoriale  $\vec{\partial}_v$  (in 3D):

$$(98) \quad \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \vec{\partial}_v$$

Da (147)...(150) abbiamo in successione:

$$(152) \quad \vec{\partial}_v a = \vec{\partial}_v \cdot a + \vec{\partial}_v \wedge a = \vec{\partial}_v \cdot a + (\hat{i}\hat{j}\hat{k})(\vec{\partial}_v \times a)$$

e pertanto gli operatori div e rot sono "embedded" nell' Algebra di Clifford, attraverso la relazione:

$$(153) \quad \vec{\partial}_v a = \text{div} a + (\hat{i}\hat{j}\hat{k})(\text{rota})$$

E' quindi immediato ricavare le equazioni di Maxwell con div e rot.

Le:

$$(6) \quad \partial^* F \hat{i} = 0 \rightarrow \hat{i} \partial^* F \hat{i} = 0$$

$$(7) \quad F \hat{i} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} + T_{ji}(H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}) \rightarrow F \hat{i} = \vec{E} + T_{ji} \vec{H}$$

comportano:

$$(154) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} + \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{T} \right) (\vec{E} + T_{ji} \vec{H}) = \left( \vec{\partial}_v + \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{T} \right) (\vec{E} + \hat{i}\hat{j}\hat{k} \hat{T} \vec{H}) = 0$$

Sviluppando e separando gli indici si arriva rapidamente a:

$$(155) \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial \tau}, \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau}, \text{div} \vec{E} = 0, \text{div} \vec{H} = 0$$

che sono le equazioni di Maxwell.

## Bibliografia

- [1] D. Hestenes “A unified language for Mathematics and Physics”, in “Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics”, NATO ASI Series, Reidel (1986)
- [2] C. Doran et al., “States and Operators in the Spacetime Algebra”, Found. Phys. 23(9), 1239 (1993)
- [3] D. Hestenes, “Space time algebra”, Gordon and Breach (1966)
- [4] S. Gull et al., “Imaginary numbers are not real – the geometric algebra of spacetime”, Found. Phys. 23(9):1175, (1993)
- [5] W. Pauli, “Teoria della relatività”, Boringhieri (1958)
- [6] M.I. Skolnik, “Radar Handbook”, Mc Graw Hill (1970)
- [7] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. van Duzer, “Fields and Waves in Communication Electronics”, John Wiley (1994)
- [8] D. Hestenes, “Quantum mechanics from self – interaction”, Found. Phys. 15, 63-87 (1985)
- [9] D. Hestenes, “Zitterbewegung modeling”, Found. Phys. 23, 365-387,(1993)
- [10] D Hestenes, “The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics”, Found. Phys. 20, 1213-1232 (1990)
- [11] D. Hestenes, “Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics”, in “Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics”, NATO ASI Series, Reidel (1986)
- [12] D. Hestenes, “Space-time structure of weak and electromagnetic interactions”, Found. Phys. 12, 153-168 (1982)
- [13] D. Hestenes, “Mysteries and Insights of Dirac Theory”, available on line at <http://modelingnts.la.asu.edu> .
- [14] D. Hestenes, “Spacetime calculus”, available on line at <http://modelingnts.la.asu.edu> .