

FLORENTIN SMARANDACHE

PROBLEME COMPILATE ȘI REZOLVATE

de  
geometrie și trigonometrie



Chișinău 1998

**UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA**  
**Catedra de geometrie**

**FLORENTIN SMARANDACHE**

**PROBLEME COMPILATE ȘI REZOLVATE**  
de  
**geometrie și trigonometrie**

**Chișinău 1998**

**FLORENTIN SMARANDACHE**

**University of New Mexico**

**Department of Mathematics**

**Gallup, NM87301, USA**

**PROBLEME COMPILATE ȘI REZOLVATE**

**de geometrie și trigonometrie, Chișinău:**

**U.S.M., 1998. - 168 pag.**

**©U.S.M., 1998**

## CUPRINSUL

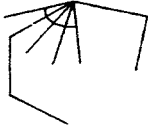
1. Geometrie (clasa a IX-a) .....	4
2. Geometrie și trigonometrie .....	27
3. Probleme diverse .....	47
4. Probleme recapitulative .....	56
5. Geometrie spațială .....	61
6. Drepte și plane .....	85
7. Probleme recapitulative .....	97
8. Proiecții .....	128
9. Geometrie și trigonometrie (clasa a X-a) .....	144

Geometrie, cls. a IX-a

Probleme

1) Măsura unui unghi al unui poligon regulat este de 4 ori mare decît măsura unui unghi exterior. Cîte laturi are poligonul?

Soluție:



$$\frac{180(n-2)}{n} = 4 \frac{180}{5} \Rightarrow n = 10.$$

2) Cîte laturi are un poligon convex dacă toate unghiurile sale exterioare sunt optuze?

Soluție:

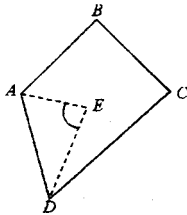
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } n = 3 \\ \Rightarrow \\ x_1; x_2; x_3 \nrightarrow \text{ext} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 > 90 \\ x_2 > 90 \\ x_3 > 90 \end{array} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 > 270 \text{ deci } n = 3 \text{ este posibil}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } n = 4 \\ \Rightarrow \\ x_1; x_2; x_3; x_4 \nrightarrow \text{ext} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 > 90 \\ \vdots \\ x_4 > 90 \end{array} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 360 \text{ imposibil}$$

Deci  $n = 3$ .

3) Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarea a 2 consecutive formează un unghi a cărui măsură este egală cu semisuma măsurilor celorlalte 2 unghiuri.

Soluție:



$$m(\widehat{AEB}) = \frac{m(\widehat{D}) + m(\widehat{C})}{2}$$

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

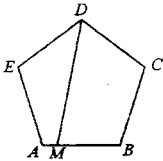
$$\frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} = 180^\circ - \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

$$m(\widehat{AEB}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2} - \frac{m(\widehat{B})}{2} =$$

$$= 180^\circ - 180^\circ + \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2} = \frac{m(\widehat{C}) + m(\widehat{D})}{2}$$

4) Arătați că o suprafață pentagonală convexă poate fi descompusă în două suprafețe patrulare.

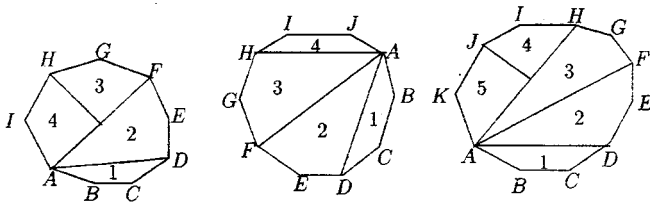
**Soluție:**



Fie  $\widehat{EDC} \Rightarrow A, B \in \text{int. } \widehat{EDC}$ . Fie  $M \in |AB| \Rightarrow M \in \text{int. } \widehat{EDC} \Rightarrow |DM \subset \text{int. } \widehat{EDC} |EA| \cap |DM| = \emptyset \Rightarrow DEAM$  patrulater. La fel  $DCBM$

5) Care este numărul minim de suprafețe patrulare în care se descompune o suprafață poligonală convexă cu 9, 10, 11 vîrfuri?

**Soluție:**



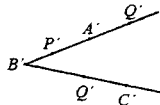
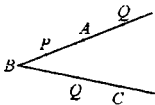
9 vîrfuri - 4 patrulare    10 vîrfuri - 4 patrulare    11 vîrfuri - 5 patrulare

6) Dacă  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$  atunci  $\exists$  o funcție bijectivă  $f = \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$  a.i. pentru  $\forall 2$  puncte  $P, Q \in \widehat{ABC}$ ,  $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$  și reciproc.

**Soluție:**

Presupunem că  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ . Construim o funcție  $f : \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$  a.i.

$$\begin{cases} f(B) = B' \\ \text{dacă } P \in |BA, f(P) \in B'A' \\ P \in |BC, f(P) \in B'C' \end{cases} \quad \text{a.i. } \|BP\| = \|B'P'\| \text{ unde } P' = f(P)$$



Funcția astfel construită este o bijecție, întrucît la argumente  $\neq$  corespund valori  $\neq$  și  $\forall$  punct de pe  $A'B'C'$  este imaginea unui singur punct din  $\widehat{ABC}$  (din axioma de construire a segmentelor).

Dacă  $P, Q \in$  acestei semidrepte

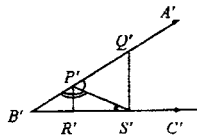
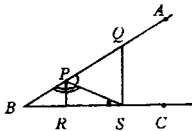
$$\left. \begin{aligned} \|BP\| &= \|B'P'\| \\ \|BQ\| &= \|B'Q'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|PQ\| = \|BQ\| - \|BP\| = \|B'Q'\| - \|B'P'\| = \|P'Q'\| = \|f(P), f(Q)\|$$

Dacă  $P, Q \in$  la semidrepte  $\neq$

$$\left. \begin{aligned} \|BP\| &= \|B'P'\| \\ \|BQ\| &= \|B'Q'\| \\ \widehat{PBQ} &\equiv \widehat{P'B'Q'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle PBQ \equiv \triangle P'B'Q' \Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\| = \|f(P), f(Q)\|$$

Reciproc:

Fie  $f: \widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$  a.î.  $f$  bijectivă și  $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$ .



Fie  $P, Q \in |BA$  și  $RS \in |BC$

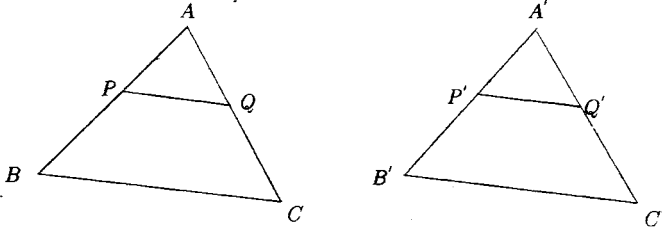
$$\left. \begin{aligned} \|PQ\| &= \|P'Q'\| \\ \|PS\| &= \|P'S'\| \\ \|QS\| &= \|Q'S'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle PQS \equiv \triangle P'Q'S' \Rightarrow \widehat{QPS} \equiv \widehat{Q'P'S'} \Rightarrow \widehat{BPS} \equiv \widehat{B'P'S'} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \|PS\| &= \|P'S'\| \\ \|RP\| &= \|R'P'\| \\ \|RS\| &= \|R'S'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle PRS \equiv \triangle P'R'S' \Rightarrow \widehat{PSB} \equiv \widehat{P'S'B'} \quad (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow \widehat{PBS} \equiv \widehat{P'B'S'}$  (ca dif. la  $180^\circ$ ) adică  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ .

7) Dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$  atunci  $(\exists)$  o funcție bijectivă  $f: ABC \rightarrow A'B'C'$  a.i. pt.  $(\forall)$  2 puncte  $P, Q \in ABC$ ,  $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$  și reciproc.

**Soluție:**



Fie  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

Construim o funcție  $f: ABC \rightarrow A'B'C'$  a.i.  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(C) = C'$  și

deci  $P \in |AB| \rightarrow P' = f(P) \in |A'B'|$  a.i.  $\|AP\| = \|A'P'\|$

$P \in |BC| \rightarrow P' = f(P) \in |B'C'|$  a.i.  $\|BP\| = \|B'P'\|$

$P \in |CA| \rightarrow P' = f(P) \in |C'A'|$  a.i.  $\|CP\| = \|C'P'\|$

Funcția astfel construită este bijectivă.

Fie  $P \in |AB|$  și  $Q \in |CA| \Rightarrow P' \in |A'B'|$  și  $Q' \in |C'A'|$

$$\left. \begin{array}{l} \|AP\| = \|A'P'\| \\ \|CQ\| = \|C'Q'\| \\ \|CA\| = \|C'A'\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|AQ\| = \|A'Q'\|; \hat{A} \equiv \hat{A}' \Rightarrow \triangle APQ \equiv \triangle A'P'Q' \Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\|$$

Raționament analog pentru  $(\forall)$  punctct  $P$  și  $Q$

**Reciproc:** se presupune că  $\exists$  o funcție bijectivă  $f: ABC \rightarrow A'B'C'$  cu propriet. din enunț.

Se notează  $f(A) = A''$ ,  $f(B) = B''$ ,  $f(C) = C''$  și rezultă  $\Rightarrow$  că  $\|AB\| = \|A''B''\|$ ,

$\|BC\| = \|B''C''\|$ ,  $\|AC\| = \|A''C''\| \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$

Deoarece  $f(ABC) = f(|AB| \cup |BC| \cup |CA|) = f(|AB|) \cup f(|BC|) \cup f(|CA|) =$   
 $= |A''B''| \cup |B''C''| \cup |C''A''| = A''B''C''$

Dar prin ip.  $f(ABC) = f(A'B'C')$  deci  $\triangle A''B''C'' = \triangle A'B'C'$

$$\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

8) Să se arate că dacă  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  atunci  $[ABC] \sim [A'B'C']$ .



**Soluție:**

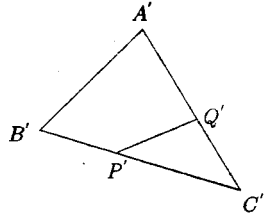
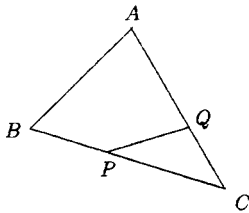
Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  atunci  $(\exists) f : ABC \rightarrow A'B'C'$  și  $k > 0$  a.î.  $\|PQ\| = k\|f(P), f(Q)\|$ ,  
 $P, Q \in ABC$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|} = \frac{\|CA\|}{\|C'A'\|} = k \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'; \hat{B} \equiv \hat{B}'; \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \|AB\| &= k\|A'B'\| \\ \|BC\| &= k\|B'C'\| \\ \|CA\| &= k\|C'A'\| \end{aligned}$$

Construim o funcție  $f : ABC \rightarrow A'B'C'$  a.î.  $f(A) = A'$ ;  $f(B) = B'$ ;  $f(C) = C'$

dacă  $P \in |BC| \rightarrow P' \in |B'C'|$  a.î.  $\|BP\| = k\|B'P'\|$

dacă  $P \in |CA| \rightarrow P' \in |C'A'|$  a.î.  $\|CP\| = k\|C'P'\|$ ;  $k$  - constantă de asemănare



Fie  $P, Q \in AB$  a.î.  $P \in |BC|, Q \in |AC| \Rightarrow P' \in |B'C'|$  și  $\|BP\| = k\|B'P'\|$

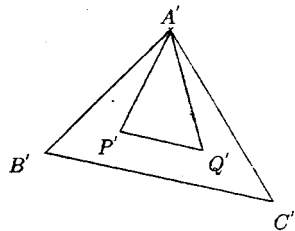
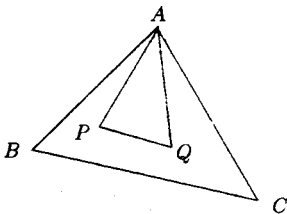
$Q' \in |A'C'|$  și  $\|CQ\| = k\|C'Q'\|$  (1)

$$\begin{aligned} \text{Cum } \|BC\| &= k\|B'C'\| \Rightarrow \|PC\| = \|BC\| - \|BP\| = k\|B'C'\| - k\|B'P'\| = \\ &= k(\|B'C'\| - \|B'P'\|) = k\|P'C'\| \quad (2) \quad \hat{C} \equiv \hat{C}' \quad (3) \end{aligned}$$

Din (1), (2) și (3)  $\Rightarrow \triangle PCQ \sim \triangle P'C'Q' \Rightarrow \|PQ\| = k\|P'Q'\|$

Raționament asemănător pentru  $P, Q \in ABC$

Extindem funcția bijectivă construită anterior și la interioarele celor 2 triunghi: în felul următor:



Fie  $P \in \text{int. } ABC$  și construim  $P' \in \text{int. } A'B'C'$  a.î.  $\|AP\| = k\|A'P'\|$ .

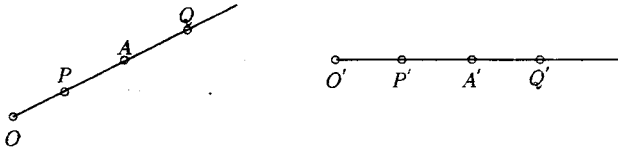
Fie  $Q \in \text{int. } ABC \rightarrow Q' \in \text{int. } A'B'C'$  a.i.  $\widehat{BAQ} \equiv \widehat{B'A'Q'}$  și  $\|AQ\| = k\|A'Q'\|$  (2)

Din (1) și (2)  $\Rightarrow \frac{\|AP\|}{\|A'P'\|} = \frac{\|AQ\|}{\|A'Q'\|} = k$ ,  $\widehat{PAQ} \equiv \widehat{P'A'Q'} \Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle A'P'Q' \Rightarrow$

$\|PQ\| = k\|P'Q'\|$ , dar  $P, Q \in [ABC]$  deci  $[ABC] \sim [A'B'C']$

9) Să se arate că oricare două semdrepte sunt mulțimi congruente. Aceiași proprietate pentru drepte.

**Soluție:**



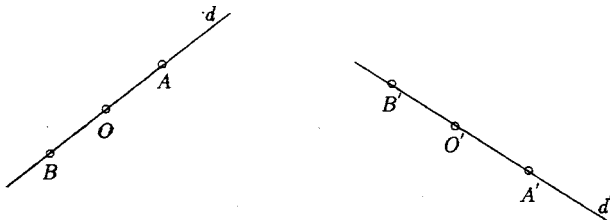
a) Fie  $|OA$  și  $|O'A'$  două semdrepte. Fie  $f : |OA \rightarrow |O'A'$  a.i.  $f(O) = O'$  și  $f(P) = P'$  cu  $\|OP\| = \|O'P'\|$ . Punctul  $P'$  astfel construit este unic și deci dacă  $P \neq Q \Rightarrow \|OP\| \neq \|OQ\| \Rightarrow \|O'P'\| \neq \|O'Q'\| \Rightarrow P' \neq Q'$  și  $(\forall)P' \in |O'A' (\exists)$  un singur punct  $P \in |OA$  a.i.  $\|OP\| = \|O'P'\|$

Funcția construită este bijectivă.

Dacă  $P, Q \in |OA$ ,  $P \in |OQ \rightarrow P'Q' \in |O'A'$  a.i.  $\|OP\| = \|O'P'\|$ ;  $\|OQ\| = \|O'Q'\| \Rightarrow \|PQ\| = \|OQ\| - \|OP\| = \|O'Q'\| - \|O'P'\| = \|P'Q'\| (\forall)P, Q \in |OA$

$\Rightarrow$  cele două semdrepte sunt congruente.

b) Fie două drepte  $d$  și  $d'$ .



Fie  $O \in d$  și  $O' \in d'$ . Construim o funcție  $f : d \rightarrow d'$  a.i.  $f(O) = O'$  și  $f(|OA) = |O'A'$  și  $f(|OB) = |O'B'$  ca la punctul anterior. Se arată la fel că  $f$  este bijectivă și că  $\|PQ\| = \|P'Q'\|$

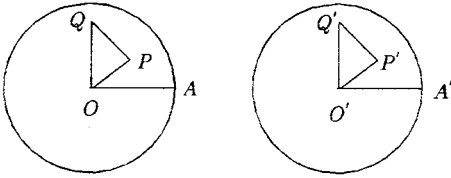
cind  $P$  și  $Q$  aparțin aceleiași semidrepte. Dacă  $P, Q$  aparțin la semdrepte diferite:

$$\left. \begin{aligned} \|OP\| &= \|O'P'\| \\ \|OQ\| &= \|O'Q'\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|PQ\| = \|OP\| + \|OQ\| = \|O'P'\| + \|O'Q'\| = \|P'Q'\|$$

și deci cele două drepte sunt congruente.

10) Să se arate că două discuri având aceeași rază sunt mulțimi congruente.

**Soluție:**



Construim o funcție  $f : D \rightarrow D'$

a.î:  $f(O) = O', f(A) = A'$  și un

punct  $(\forall) P \in D \rightarrow P' \in D'$

considerate în sens pozitiv. Din

ax. de construcție a segmentelor

și unghiurilor  $\Rightarrow$  că funcția astfel

construită este bijectivă, stabilind o corespondență biunivocă între elementele celor două mulțimi.

Fie  $Q \in D \rightarrow Q' \in D'$  a.î.  $\|OQ'\| = \|OQ\|$ ;  $\widehat{AOQ} \equiv \widehat{A'O'Q'}$

Cum:  $\|OP\| = \|O'P'\|$

$\|OQ\| = \|O'Q'\|$

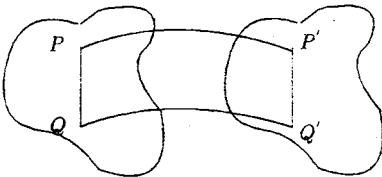
$\widehat{POQ} \equiv \widehat{P'O'Q'}$  (dif. de unghiuri congruente)

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OPQ \equiv \triangle O'P'Q' \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|PQ\| = \|P'Q'\|, (\forall) P, Q \in D \Rightarrow D \equiv D'$

11) Dacă funcția  $f : M \rightarrow M'$  este o izometrie, atunci funcția inversă  $f^{-1} : M' \rightarrow M$  este o asemenea izometrie.

**Soluție:**



$f : M \rightarrow M'$  este o izometrie  $\Rightarrow f$  este bijectivă

și  $(\forall) P, Q \in M$  avem  $\|PQ\| = \|f(P), f(Q)\|$   $f$ -

bijectivă  $\Rightarrow f$  - inversabilă și  $f^{-1}$ - bijecție.

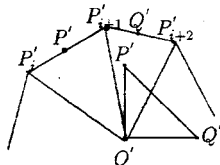
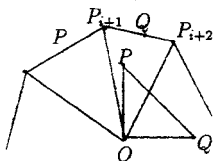
$$\left. \begin{aligned} \|P'Q'\| &= \|f(P); f(Q)\| = \|PQ\| \\ \|f^{-1}(P'); f^{-1}(Q')\| &= \|f^{-1}(f(P)); f^{-1}(f(Q))\| = \|PQ\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|P'Q'\| = \|f^{-1}(P'), f^{-1}(Q')\|$ ,  $(\forall) P', Q' \in M$ , deci  $f^{-1} : M' \rightarrow M$  este o izometrie.

12) Dacă poligoanele convexe  $L = P_1, P_2, \dots, P_n$  și  $L' = P'_1, P'_2, \dots, P'_n$  au  $|P_i, P_{i+1}| \equiv |P'_i, P'_{i+1}|$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n-1$  și  $P_i \widehat{P}_{i+1} P_{i+2} \equiv P'_i \widehat{P'_{i+1}} P'_{i+2}$   $(\forall) i = 1, 2, \dots, n-2$  atunci  $L \equiv L'$  și  $[L] \equiv [L']$

**Soluție:**

Construim o funcție  $f$  a.i.  $f(P_i) = P'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  și dacă  $P \in |P_i, P_{i+1}|$



Funcția construită anterior o prelungim și la interiorul poligonului astfel: Fie  $O \in \text{int.} L \rightarrow O' \in \text{int.} L'$  a.i.  $OP_i P_{i+1} \equiv O'P'_i P'_{i+1}$  și  $\|OP_i\| = \|O'P'_i\|$  aceste puncte le unim cu vîrfurile poligonului. Se demonstrează ușor că triunghiurile astfel obținute sunt congruente respectiv.

Construim funcția  $g : [L] \rightarrow [L']$  a.i.

$$g(P) = \begin{cases} f(P), & \text{dacă } P \in L \\ O', & \text{dacă } P = O \\ P', & \text{dacă } P \in [P_i O P_{i+1}] \text{ a.i. } P_i \widehat{O} P \equiv P'_i \widehat{O'} P' \quad (\forall) i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Funcția astfel construită este bijectivă  $(\forall) P, Q \in [L]$  se poate demonstreze prin congruența triunghiurilor  $POQ$  și  $P'O'Q'$  că  $\|PQ\| = \|P'Q'\|$  deci  $[L] = [L']$

**$\Rightarrow$  DACĂ DOUĂ POLIGOANE CONVEXE SE DESCOMPUN ÎN ACELAȘI NUMĂR DE TRIUNGHURI RESPECTIV CONGRUENTE, ELE SÎNT CONGRUENTE**

13) Să se arate că raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul lor de asemănare.

**Soluție:**

$$L = P_1 P_2 \dots, P_n$$

$$L' = P'_1 P'_2 \dots, P'_n$$

$L \sim L' \Rightarrow (\exists) K > 0$  și  $f: L \rightarrow L'$  a.î.  $\|PQ\| = k \|f(P) f(Q)\| (\forall) P, Q \in L$ , iar  $P'_i = f(P_i)$

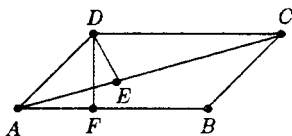
Luînd succesiv în rolul lui  $P$  și  $Q$  virfurile obținem:

$$\left. \begin{aligned} \|P_1 P_2\| = k \|P'_1 P'_2\| &\Rightarrow \frac{\|P_1 P_2\|}{\|P'_1 P'_2\|} = k \\ \|P_2 P_3\| = k \|P'_2 P'_3\| &\Rightarrow \frac{\|P_2 P_3\|}{\|P'_2 P'_3\|} = k \\ \vdots & \\ \|P_{n-1} P_n\| = k \|P'_{n-1} P'_n\| &\Rightarrow \frac{\|P_{n-1} P_n\|}{\|P'_{n-1} P'_n\|} = k \\ \|P_n P_1\| = k \|P'_n P'_1\| &\Rightarrow \frac{\|P_n P_1\|}{\|P'_n P'_1\|} = k \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\|P_1 P_2\|}{\|P'_1 P'_2\|} = \frac{\|P_2 P_3\|}{\|P'_2 P'_3\|} = \dots = \frac{\|P_1 P_2\| + \|P_2 P_3\| + \dots + \|P_{n+1} P_n\| + \|P'_n P'_1\|}{\|P'_1 P'_2\| + \|P'_2 P'_3\| + \dots + \|P'_{n+1} P'_n\| + \|P'_n P'_1\|} = \frac{P}{P'}$$

14) Paralelogramul ABCD are  $\|AB\| = 6$ ,  $\|AC\| = 7$  și  $d(D, AC) = 2$ . Să se afle  $d(D, AB)$ .

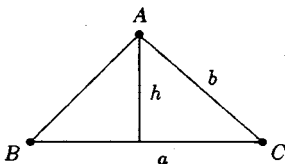
**Soluție:**



$$\begin{aligned} \sigma[ADC] &= \frac{2 \cdot 7}{2} = 7 \\ \sigma[ABCD] &= 2 \cdot 7 = 14 = 6 \|DF\| \\ \Rightarrow \|DF\| &= \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

15) Dintre triunghiurile  $ABC$  cu  $\|BC\| = a$  și  $\|CA\| = b$ ,  $a$  și  $b$  fiind numere date, să se afle un triunghi de arie maximă.

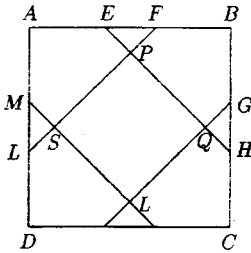
**Soluție:**



$$\begin{aligned} h &= b \cdot \sin C \leq b \\ \sigma[ABC] &= \frac{a \cdot h}{2} \text{ este max cînd } h \text{ este max.} \\ h \text{ max} &= b \text{ cînd } \sin C = 1 \\ \Rightarrow m(C) = 90 &\Rightarrow ABC \text{ este dr. \u00een } C. \end{aligned}$$

16) Se consideră un pătrat  $ABCD$  și punctele  $E, F, G, H, I, K, L, M$  care împart fiecare latură în trei segmente congruente. Să se arate că  $PQRS$  este un pătrat și că aria lui este egală cu  $\frac{2}{9}\sigma[ABCD]$ .

**Soluție:**



$$\|MD\| = \|DI\| \Rightarrow MDI - \Delta \text{ tr. isoscel}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{DMI}) = m(\widehat{MID}) = 45^\circ$$

$$\text{La fel } m(\widehat{FLA}) = m(\widehat{AFL}) = m(\widehat{BEH}) = m(\widehat{EHB}).$$

$$\|RK\| \Rightarrow \|SP\| = \|PQ\| = \|QR\| = \|RS\| \Rightarrow SRQP \text{ este pătrat.}$$

$$\|AB\| = a, \|AE\| = \frac{2a}{3}, \|MI\| = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$2\|RI\|^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow \|RI\|^2 = \frac{a^2}{18} \Rightarrow \|RI\| = \frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\|SR\| = \frac{2a\sqrt{2}}{3} - 2 \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{3};$$

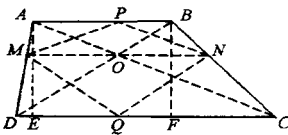
$$\sigma[SRQP] = \frac{2a^2}{9} = \frac{2}{9}\sigma[ABCD]$$

17) Diagonalele trapezului  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ) se taie în  $O$ .

- a) Să se arate că triunghiurile  $AOD$  și  $BOC$  au aceeași arie;  
 b) Paralela prin  $O$  la  $AB$  taie  $AD$  și  $BC$  în  $M$  și  $N$ . Să se arate că  $\|MO\| = \|ON\|$ .

**Soluție:**

a)



$$\left. \begin{aligned} \sigma[ACD] &= \frac{\|DC\| \cdot \|AE\|}{2} \\ \sigma[BCD] &= \frac{\|DC\| \cdot \|BF\|}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\|AE\| = \|BF\|$$

$$\Rightarrow \sigma[ACD] = \sigma[BCD]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma[AOD] &= \sigma[ACD] - \sigma[COD] \\ \sigma[BOC] &= \sigma[BCD] - \sigma[COD] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma[AOD] = \sigma[BOC]$$

b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma[AOD] &= \sigma[AMO] + \sigma[MOD] \\ \sigma[AMO] &= \sigma[MPO] = \frac{\|MO\| \cdot \|OP\|}{2} \\ \sigma[MOD] &= \sigma[MOQ] = \frac{\|OM\|^2 \cdot \|OQ\|}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma[AOD] = \frac{\|OM\|(\|OP\| + \|OQ\|)}{2} = \frac{\|OM\| \cdot h}{2}$$

$$\text{La fel } \sigma[BOC] = \frac{\|ON\| \cdot h}{2}$$

$$\sigma[AOD] = \sigma[BOC] \Rightarrow \frac{\|OM\| \cdot h}{2} = \frac{\|ON\| \cdot h}{2} \Rightarrow \|OM\| = \|ON\|$$

18)  $E$  fiind mijlocul laturii neoparalele  $[AD]$  a trapezului  $ABCD$ , să se arate că  $\sigma[ABCD] = 2\sigma[BCE]$ .

**Soluție:**

$$\|AE\| = \|ED\|$$

Ducem  $MN \perp AB$ ;  $DC$

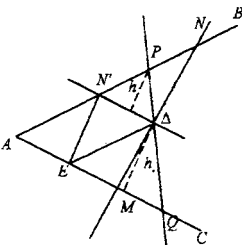
$$\|EN\| = \|EM\| = \frac{h}{2}$$

$$\sigma[BEC] = \frac{(\|AB\| + \|DC\|) \cdot h}{2} - \frac{\|DB\| \cdot h}{4} - \frac{\|DC\| \cdot h}{4} = \frac{(\|AB\| + \|DC\|) \cdot h}{4} = \frac{1}{2}\sigma[ABCD]$$

$$\text{Deci } \sigma[ABCD] = 2\sigma[BEC].$$

19) Se dau: un unghi  $\widehat{BAC}$  și un punct  $D$  în interiorul lui o dreaptă prin  $D$  taie laturile unghiului în  $M$  și  $N$ . Să se determine dreapta  $MN$  a.i. aria  $\triangle AMN$  să fie minimă.

**Soluție:**



$\sigma[AEDN']$  este ct. pentru că  $A, E, D, N'$  sunt fixe.

Fie o dreaptă oarecare prin  $D$  și ducem  $\|$  la laturile  $ND$  și  $DE$ . Oricum duce prin  $D$  o dreaptă  $\sigma[QPA]$  este formată din:  $\sigma[AEDN] + \sigma[NPO] + \sigma[DEQ]$ .

În toate triunghiurile  $PAQ$  avem  $\sigma[AEDN]$  constant.

Să studiem

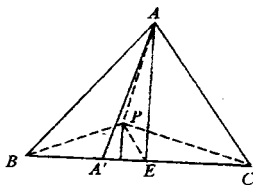
$$\sigma[PN'D] + \sigma[DEQ] = \frac{\|N'D\| \cdot h_1}{2} + \frac{\|EQ\| \cdot h_2}{2} =$$

$$= \frac{\|N'D\|}{2} \left( h_1 + \frac{\|EQ\|}{\|ND\|} \cdot h_2 \right) = \frac{\|N'D\|}{2} \cdot \left( h_1 + \frac{h_2}{h_1} \cdot h_2 \right) = \frac{\|N'D\|}{2h_1} [(h_1 - h_2)^2 + 2h_1h_2]$$

este minim cînd  $h_1 = h_2 \Rightarrow D$  se află la mijlocul lui  $|PQ|$ . Construcția este deci:  $\triangle ANM$  unde  $NM \parallel EN'$ . În acest caz avem  $|ND| \equiv |DM|$ .

20) Să se construiască un punct  $P$  în interiorul triunghiului  $ABC$ , a.i. triunghiurile  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  să aibe arii egale.

**Soluție:**



$$\sigma[ABC] = \frac{\|BC\| \cdot \|AA'\|}{2}$$

Fie mediana  $|AE|$  și  $P$  centrul de greutate al triunghiului.

$$\text{Fie } PD \perp BC \quad \sigma[BPC] = \frac{\|BC\| \cdot \|PD\|}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BC \\ PD \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel PD \Rightarrow \triangle PDE \sim \triangle AA'E$$

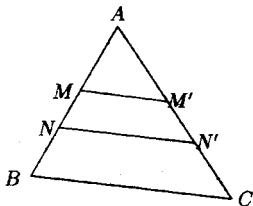
$$\Rightarrow \frac{\|PD\|}{\|AA'\|} = \frac{\|PE\|}{\|AE\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \|PD\| = \frac{\|AA'\|}{3} \Rightarrow \sigma[BPC] = \frac{\|BC\| \cdot \frac{\|AA'\|}{3}}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\|BC\| \cdot \|AA'\|}{2} = \frac{1}{3} \sigma[ABC]$$

La fel se demonstrează că  $\sigma[PAC] = \sigma[PAB] = \frac{1}{3} \sigma[ABC]$  deci punctul este centrul de greutate.

21) Să se descompună o suprafață triunghiulară în trei suprafețe de aceeași arie, prin paralele la o latură a triunghiului.

**Soluție:**



Fie  $M, N \in AB$  a.i.  $M \in |AN|$

Ducem  $MM' \parallel BC$

$MN' \parallel BC$

$$\triangle AMM' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{\sigma[AMM']}{\sigma[ABC]} = \left( \frac{\|AM\|}{\|AB\|} \right)^2$$

$$\sigma[AMM'] = \frac{1}{3} \sigma, \left( \frac{\|AM\|}{\|AB\|} \right)^2 = \frac{1}{3},$$

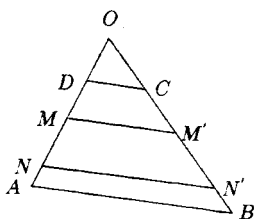


$$\|AM\| = \frac{\|AB\|}{\sqrt{3}}; \triangle ANN' \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\sigma[ANN']}{\sigma[ABC]} &= \left( \frac{\|AN\|}{\|AB\|} \right)^2 \\ \sigma[ANN'] &= \frac{2}{3}\sigma[ABC] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left( \frac{\|AN\|}{\|AB\|} \right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \|AN\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\|AB\|$$

22) Rezolvați problema analogă pentru un trapez.

**Soluție:**



$$\|OD\| = a, \|OA\| = b$$

$$\sigma[\triangle CMM'] = \sigma[MM'N'N] = \sigma[NN'BA] =$$

$$= \frac{1}{3}\sigma[ABCD]$$

$$\triangle ODC \sim \triangle OAB \rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OAB]} = \frac{\|OD\|^2}{\|OA\|^2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OAB] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad (1)$$

$$\triangle ODC \sim \triangle OMM' \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OMM']} = \left( \frac{\|OD\|}{\|OM\|} \right)^2 \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[OMM'] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{\|OM\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DCMM']} = \frac{a^2}{\|OM\|^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\frac{1}{3}\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{\|OM\|^2 - a^2} \quad (2)$$

$$\triangle ONN' \sim \triangle ODC$$

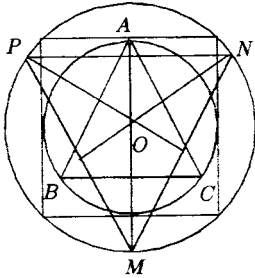
$$\frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DNN']} = \frac{\|OD\|}{\|ON\|} = \frac{a^2}{\|ON\|} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[ONN'] - \sigma[ODC]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2} \Rightarrow (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\sigma[DCN'N]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2 - a^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ODC]}{\frac{2}{3}\sigma[ABCD]} = \frac{a^2}{\|ON\|^2 - a^2}$$

$$\text{împărțim (1) la (3): } \frac{2}{3} = \frac{\|ON\|^2 - a^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow 3\|ON\|^2 - 3a^2 = 2b^2 - 2a^2 \Rightarrow \|ON\|^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{3}$$

23) Prolungim razele duse la vîrfurile unui triunghi ecuilateral înscris într-un cerc  $L(O, r)$ , pînă la intersecția cu cercul care trece prin vîrfurile unui pătrat circumscris cercului  $L(O, r)$ . Să se arate că punctele astfel obținute sunt vîrfurile unui triunghi de aceeași arie cu hexagonul înscris în  $L(O, r)$ .

**Soluție:**



$$\|OA\| = r \rightarrow \|DE\| = 2r$$

$$\sigma_{\text{hexagon}} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$DEFO \text{ pătrat înscris în cercul de rază } R \Rightarrow \\ \Rightarrow l_4 = R\sqrt{2} = \|DE\| \Rightarrow P\sqrt{2} = 2r \Rightarrow R = r\sqrt{2}$$

$$\|OM\| = R = r\sqrt{2}$$

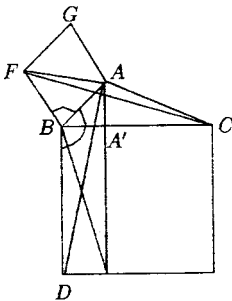
$$\sigma[OMN] = \frac{\|OM\| \cdot \|ON\| \sin 120}{2} = \frac{r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma[MNP] = 3\sigma[OMN] = 3 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \sigma[MNP] = \sigma_{\text{hexagon}}$$

24) Să se demonstreze teorema catetei cu ajutorul ariilor.

**Soluție:**



$$\|AB\|^2 = \|BC\| \cdot \|BA'\|$$

Construim pătratele  $BCED$  pe ip. și  $ABFG$  pe catetă.

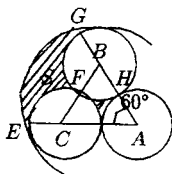
Ducem  $AA' \perp BC$

$$\sigma[ABFG] = \|AB\|^2$$

$$\sigma[A'BDH] = \|BD\| \cdot \|BA'\| = \|BC\| \cdot \|BA'\| \dots$$

25) Se consideră un  $\triangle$  echilateral  $ABC$  cu  $\|AB\| = 2a$ . Aria suprafeței hașurate determinată de cercurile  $L(A, a)$ ,  $L(B, a)$ ,  $L(C, a)$ ,  $L(A, 3a)$  este egală cu aria sectorului de cerc determinat de arcul mic  $\widehat{EF}$  al cercului  $L(C, a)$ .

**Soluție:**



$$\sigma(s_1) = \sigma[ABC] - 3\sigma[\text{sect. } ADH]$$

$$\sigma[ABC] = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

$$\sigma[\text{sect. } ADH] = \frac{r^2}{2}m(\widehat{DH})$$

$$m(\widehat{DH}) = \frac{\pi}{180}m(\widehat{DH}) = \frac{\pi}{180} \cdot 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\sigma[\text{sect. } ADH] = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{2}$$

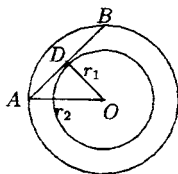
$$\sigma[s_1] = a^2\sqrt{3} - 3 \frac{\pi a^2}{6} = a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma[s_2] &= \sigma[\text{sect. } AEG] - \sigma[ABC] - \sigma[\text{sect. } ECF] - \sigma[\text{sect. } GBF] = \frac{(3a)^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 60 - a^2\sqrt{3} - \\ &- \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 120 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{2\pi a^2}{3} - a^2\sqrt{3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \sigma[s_1] + \sigma[s_2] = \frac{3\pi a^2}{2} - \frac{2\pi a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{2\pi a^2}{6} = \frac{\pi a^2}{3}$$

26) Să se arate că aria "coroanei circulare" cuprinse între cercurile  $L(O, r_2)$  și  $L(O, r_1)$  este egală cu aria unui disc având diametrul segmentul de tangentă la cercul  $L(O, r_1)$  cu extremitățile pe cercul  $L(O, r_2)$ .

**Soluție:**



$$\|AD\|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$\sigma[L(O, r_1)] = \pi r_1^2$$

$$\sigma[L(O, r_2)] = \pi r_2^2$$

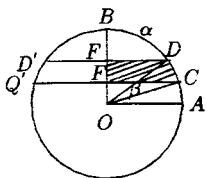
$$\sigma[\text{coroană circ.}] = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad (1)$$

$$\sigma[\text{disc. diam. } \|AB\|] = \pi \|AD\|^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad (2)$$

$$(1); (2) \Rightarrow \sigma[\text{disc}] = \sigma[\text{coroană}]$$

27) Fie  $[OA]$ ,  $[OB]$  două raze  $\perp$  ale unui cerc de centru  $O$ . Pe arcul mic  $\widehat{AB}$  se iau punctele  $C$  și  $D$  a.i.  $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$  și fie  $E, F$  proiecțiile lui  $CD$  pe  $OB$ . Să se arate că aria suprafeței marginite de  $[DF]$ ,  $[FE]$ ,  $[EC]$  și arcul  $\widehat{CD}$  este egală cu aria sectorului determinat de arcul  $\widehat{CD}$  al cercului  $C(O, \|OA\|)$ .

**Soluție:**



$$\sigma[CDEF] = \frac{\sigma[CDD'C']}{2}$$

$$\sigma[CDD'C'] = \sigma_{\text{seep}}[CDBD'C'] - \sigma[\text{seg } DBD']$$

$$\text{Notăm: } m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{CD}) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\sigma_{\text{sect.}} = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$$

$$\sigma_{\text{A}}[CDBD'C'] = \frac{r^2}{2}[\pi - 2\alpha - \sin(\pi - 2\alpha)] = \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$\sigma_{\text{A}} = [DBD'] = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$\sigma[CDD'C'] = \sigma[CDBD'C'] - \sigma[DBD'] = \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) - \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) =$$

$$= \frac{r^2}{2}(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha - 2\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{r^2}{2}(\pi - 4\alpha)$$

$$\Rightarrow \sigma[DCEF] = \frac{\sigma[CDD'C']}{2} = \frac{r^2}{4}(\pi - 4\alpha) = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \quad (1)$$

$$\sigma[\text{sect } COD] = \frac{r^2}{2}m(\widehat{CD}) = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \quad (2)$$

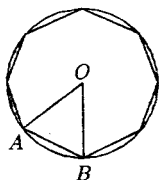
$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \sigma[CDEF] = \sigma[\text{sect. } COD].$$

$$\|O_1F\| = \|OE\|$$

$$\sigma[\text{pătrat}] = \|DE\|^2 = \|OA\|^2 = \frac{bc}{2} = V[ABC]$$

28) Să se afle aria octogonului regulat înscris într-un cerc de rază  $r$ .

**Soluție:**



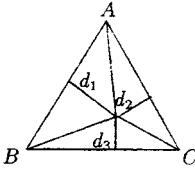
$$\mu(\widehat{AOB}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma[AOB] = \frac{r^2 \sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{r^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{r^2 \sqrt{2}}{4}$$

$$\sigma(\text{ortogon}) = 8 \cdot \frac{r^2 \sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}r^2$$

29) Să se arate, folosind arii, ca suma distanțelor unui punct variabil situat în interiorul triunghiului echilateral  $ABC$  la laturile lui este constant.

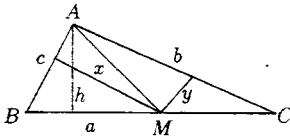
**Soluție:**



$$\begin{aligned} \sigma[ABC] &= \sigma[AMB] + \sigma[AMC] + \sigma[MBC] \Rightarrow \\ &\Rightarrow ah_a = ad_3 + ad_2 + ad_1 \Rightarrow \\ d_1 + d_2 + d_3 &= h_a \text{ (} a \text{ este latura } \triangle \text{ echilateral)} \\ &\Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (pt. c\u0103 } h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

30) Se consider\u0103 un triunghi dat  $ABC$  \u0219i un punct variabil  $M \in [BC]$ . S\u0103 se arate c\u0103 \u00eentre distan\u021bele  $x = d(M, AB)$  \u0219i  $y = d(M, AC)$  exist\u0103 o rela\u021bie de forma  $kx + ly = 1$ , unde  $k$  \u0219i  $l$  sunt constante.

**Solu\u021bie:**



$ABC - \triangle \text{ dat} \Rightarrow a, b, c, h$  sunt constante

$$\sigma[ABC] = \frac{ah}{2}$$

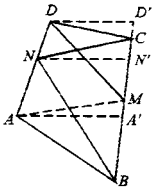
$$\sigma[ABC] = \sigma[AMB] + \sigma[AMC] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ah}{2} = \frac{cx}{2} + \frac{by}{2} \Rightarrow cx + by = ah \Rightarrow \frac{c}{ah}x + \frac{b}{ah}y = 1 \Rightarrow kx + ly = 1$$

$$\text{unde } k = \frac{c}{ah} \text{ \u0219i } l = \frac{b}{ah}.$$

31) Fie  $M$  \u0219i  $N$  mijloacele laturilor  $[BC]$  \u0219i  $[AD]$  ale patrulaterului convex  $ABCD$  \u0219i  $\{P\} = AM \cap BN$  \u0219i  $Q = CN \cap MD$ . S\u0103 se arate c\u0103 aria patrulaterului  $PMQN$  este egal\u0103 cu suma ariilor triunghiurilor  $ABP$  \u0219i  $CDQ$ .

**Solu\u021bie:**



Ducem  $AA' \perp BC$ ;  $NN' \perp BC$ ;  $DD' \perp BC \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} AA' \parallel NN' \parallel DD' \\ \|AN\| = \|ND\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow MN' \text{ linie mijlocie \u00een trapezul } AA'D'D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|NN'\| = \frac{\|AA'\| + \|DD'\|}{2}$$

$$\sigma[BCN] = \frac{\|BC\| \cdot \|NN'\|}{2}$$

$$\sigma[BAM] + \sigma[MDC] = \frac{\|BM\| \cdot \|AA'\|}{2} + \frac{\|MC\| \cdot \|OD'\|}{2} \Rightarrow \|BM\| = \|MC\| = \frac{\|BC\|}{2} \Rightarrow$$

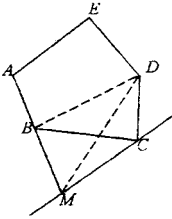
$$\Rightarrow \sigma[BAM] + \sigma[MDC] = \frac{\|BC\|}{2} \left( \frac{\|AA'\| + \|DD'\|}{2} \right) = \frac{\|BC\| \cdot \|NN'\|}{2} = \sigma[BCN]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma[BCN] &= \sigma[PMQN] + \sigma[BPM] + \sigma[MQC] \\ \sigma[BCN] + \sigma[MDC] &= \sigma[BAP] + \sigma[BPM] + \sigma[MQC] + \sigma[CDQ] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma[PMQN] = \sigma[BPA] + \sigma[CDQ].$$

31) Să se construiască un triunghi de aceeași arie cu un pentagon dat.

**Soluție:**



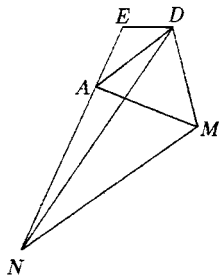
Se construiește întâi un patrulater care are aceeași arie cu pentagonul dat. Ducem prin  $C$  a paralelă la  $BD$  și prelungim  $|AB|$  pînă intersectează paralela în  $M$ .

$$\sigma[ABCDE] = \sigma[ABDE] + \sigma[BCD],$$

$$\sigma[BCD] = \sigma[BDM] \text{ (au vîrfurile pe o paralelă la bază).}$$

$$\text{Deci } \sigma[ABCDE] = \sigma[AMDE].$$

Apoi se consideră un triunghi care are aceeași arie cu patrulaterul  $AMDE$ .

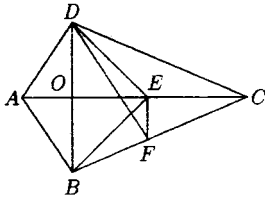


Ducem prin o paralelă la  $AD$ ,  $N$  aparține intersecție cu aceeași paralelă

$$\begin{aligned} \sigma[AMDE] &= \sigma[ADE] + \sigma[ADE] = \sigma[ADE] + \sigma[ADN] = \\ &= \sigma[EDN] \end{aligned}$$

32) Să se construiască o dreaptă care împarte o suprafață patrulateră convexă în două părți de aceeași arie.

Soluție:



$$\|AE\| = \|EC\|$$

$$\|EF\| \parallel BD \Rightarrow \sigma[BDF] = \sigma[BDE]$$

$$\sigma[ABFD] = \sigma[ABED] \quad (1)$$

$$\sigma[ADE] = \sigma[DEC] \text{ baze egale și aceeași înălțime}$$

$$\sigma[ABE] = \sigma[BEC]$$

$$\sigma[ABED] = \sigma[BEDC] \quad (2)$$

$\sigma[DEF] = \sigma[BEF]$  aceeași bază și virfurile pe drepte paralele la bază.

$$\sigma[DCF] \neq \sigma[DEC] + \sigma[ECF] + \sigma[DEF] \neq \sigma[DEC] + \sigma[ECF] + \sigma[BEF] = \sigma[BEDC] \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \sigma[ABFD] = \sigma[DCF]$$

33) Într-un pătrat de latură 1 se unește mijlocul fiecărei laturi cu extremitățile laturi opuse.

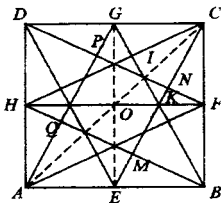
Să se afle aria octogonului interior convex care se formează în acest fel.

Soluție:

$$\left. \begin{aligned} \triangle DCF \equiv \triangle CBE \Rightarrow \widehat{CFD} \equiv \widehat{CEB} \\ m(\widehat{CEB}) + m(\widehat{ECB}) = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow m(\widehat{CFN}) + m(\widehat{ECB}) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\widehat{CNF}) = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$$

$$\left. \begin{aligned} |CF| \equiv |EB| \\ m(\widehat{MBE}) = m(\widehat{NCF}) \\ m(\widehat{NEB}) + m(\widehat{CFN}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle DCF \equiv \triangle BME \Rightarrow \begin{aligned} |CN| \equiv |MB| \\ |NF| \equiv |ME| \end{aligned}$$



Se arată la fel că:

$$\left. \begin{aligned} |CN| \equiv |NB| \equiv |AQ| \equiv |DP| \\ |NF| \equiv |ME| \equiv |NQ| \equiv |PE| \\ |CE| \equiv |NB| \equiv |AG| \equiv |DF| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PN| \equiv |NM| \equiv |QM| \equiv |PQ|$$

$\Rightarrow MNPQ$  romb cu unghi drept  $\Rightarrow MNPQ$  pătrat.

$$\left. \begin{array}{l} |DG| \equiv |FB| \\ \widehat{DIG} \equiv \widehat{FIB} \\ \widehat{GDI} \equiv \widehat{FBI} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta DGI \equiv \Delta DFI \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |GI| \equiv |FI| \\ |GC| \equiv |CF| \\ |IC| \equiv |IC| \text{ com.} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta GIC \equiv \Delta FIC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{GCI} \equiv \widehat{FCI} \Rightarrow I \in |AC|$$

La fel se arată că toate virfurile octogonului aparțin axelor de simetrie ale pătratului, deci ortogonul este regulat.

$$\|CF\| = \frac{1}{2}, \|RF\| = \frac{1}{4}, \|CR\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

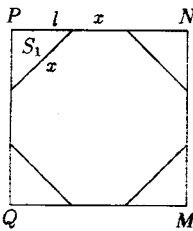
$$\|NF\| \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \|NF\| = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\|EC\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\|BM\| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \|BM\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\|MN\| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5-1-2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Consider separat pătratul



$$2l^2 = 2x^2$$

$$x = l\sqrt{2}$$

$$2l + l\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$l(2 + \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{5}(2 + \sqrt{2})}$$

$$\sigma[QMNP] = \frac{1}{5}$$

$$S_1 = \frac{x^2}{2}$$

$$S = \sigma[QMNP] - 4S_1 = \frac{1}{5} - 2l^2 = \frac{1}{5} - 2 \frac{1}{5(6+4\sqrt{2})} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5(3+2\sqrt{2})} =$$

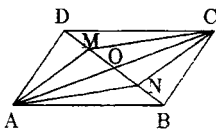
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3+2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2(1+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = \frac{2}{5} - \frac{(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8} = \frac{2}{5}(3-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4) =$$

$$= \frac{2}{5}(\sqrt{2}-1).$$



34) Diagonala  $[BD]$  a paralelogramului  $ABCD$  se împarte prin punctele  $M, N$  în 3 segmente. Să se arate că  $AMCN$  este un paralelogram și să se calculeze raportul dintre  $\sigma[AMCN]$  și  $\sigma[ABCD]$ .

**Soluție:**



$$\|OM\| = \|NM\| = \|NB\|$$

$$\|DC\| ? \Rightarrow \triangle MOC = \triangle NBA \Rightarrow \|MC\| = \|AN\|$$

$$\text{La fel se arată că } \triangle DAM = \triangle BCN \Rightarrow \|AM\| = \|NC\|$$

Deci  $AMCN$  este paralelogram.

$$\sigma[AOB] = \frac{\|OA\| \cdot \|OB\| \sin \alpha}{2}$$

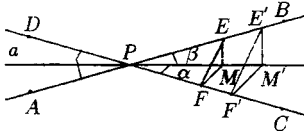
$$\sigma[AOD] = \frac{\|OA\| \cdot \|OD\| \sin(\pi - \alpha)}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma[ABCD] &= \|OA\| \cdot \|OB\| \sin \alpha + \|OA\| \cdot \|OD\| \sin \alpha = \|OA\| \cdot \sin \alpha (\|OA\| + \|OD\|) = \\ &= \|OA\| \cdot \|DB\| \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\sigma[AMCN] = \|OA\| \cdot \|MN\| \sin \alpha = \|OA\| \cdot \frac{\|DB\|}{3} \sin \alpha = \frac{\sigma[ABCD]}{3} \Rightarrow \frac{\sigma[AMCN]}{\sigma[ABCD]} = \frac{1}{3}$$

35) Se dau punctele  $A, B, C, D$  astfel încât  $AB \cap CD = \{p\}$ . Să se afle locul geometric al punctului  $M$  astfel ca:  $\sigma[ABM] = \sigma[CDM]$ .

**Soluție:**



Pentru a determinăm unghiul  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{\|EM\|}{\|MP\|}, \quad \sin \beta = \frac{\|MF\|}{PM}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\|EM\|}{\|MF\|} = k \Rightarrow \sin \alpha = k \sin(a - \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = k \sin a \cos \alpha + k \cos a \sin \alpha$$

$$\text{Notez } t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} = k \sin a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + k \frac{2t}{1+t^2} \cdot \cos a \Rightarrow kt^2 \cos a + 2(1-k \cos a) \cdot t -$$

$$-k \sin a = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{k \cos a - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 2k(1-\cos a)}}{k \cos a} \text{ deci am stabilit astfel pozițiile dreptelor locului geometric.}$$

$$\sigma[ABM] = \frac{\|AB\| \cdot \|ME\|}{2}$$

$$\sigma[CDM] = \frac{\|CD\| \cdot \|MF\|}{2}$$

$\sigma[ABM] = \sigma[CDM] \Rightarrow \|AB\| \cdot \|ME\| = \|CD\| \cdot \|MF\| \Rightarrow \frac{\|ME\|}{\|MF\|} = \frac{\|CD\|}{\|AB\|}$  constant pentru ca  $A, B, C, D$  - puncte fixe.

Trebuie deci găsit locul geometric al punctelor  $M$  astfel încît raportul distanțelor de la acest punct la două drepte concurente să fie constant.

$$\frac{\|ME\|}{\|MF\|} = k. \text{ Fie } M' \text{ încă un punct cu aceeași proprietate, adică}$$

$$\frac{\|M'E'\|}{\|M'F'\|} = k$$

$$\left. \begin{array}{l} ME \perp AB \\ M'E' \perp AB \\ MF \perp CD \\ M'F' \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ME \parallel M'E' \\ MF \parallel M'F' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{EMF} \equiv \widehat{E'M'F'} \\ \frac{\|ME\|}{\|MF\|} = \frac{\|M'E'\|}{\|M'F'\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MEF \sim \triangle M'E'F' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{FEM} \equiv \widehat{F'E'M'} \Rightarrow \widehat{PEF} \equiv \widehat{P'E'F'} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|PE\|}{\|PE'\|} = \frac{\|EF\|}{\|E'F'\|} \\ \frac{\|EF\|}{\|E'F'\|} = \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|PE\|}{\|PE'\|} = \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} \\ \widehat{PEM} \equiv \widehat{P'E'M'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PEM \sim \triangle P'E'M' \Rightarrow \widehat{EPM} \equiv \widehat{E'P'M'} \Rightarrow P, M, M' \text{ coliniare} \Rightarrow$$

locul geometric este o dreaptă ce trece prin  $P$ .

Cînd punctele se află în  $\sphericalangle CPB$  se obține încă o dreaptă ce trece prin  $P$ . Deci locul geometric este format din două drepte concurente prin  $P$ , din care se scoate punctul  $P$ , întrucît distanțele de la  $P$  la ambele drepte sunt 0 și raportul lor este nedeterminat.

Reciproc, dacă punctele  $N$  și  $N'$  se află pe aceeași dreaptă ce trece prin  $P$ , raportul distanțelor lor la dreptele  $AB$  și  $CD$  este constant.

$$\left. \begin{array}{l} ME \parallel M'E' \Rightarrow \triangle PME \sim \triangle PM'E' \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} = \frac{\|PM\|}{\|PM'\|} \\ MF \parallel M'F' \Rightarrow \triangle PMF \sim \triangle PM'F' \Rightarrow \frac{\|FM\|}{\|F'M'\|} = \frac{\|PM\|}{\|PM'\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|E'M'\|} = \frac{\|FM\|}{\|F'M'\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|FM\|} = \frac{\|E'M'\|}{\|F'M'\|} = k$$

36) Problemă analogă în cazul  $AB \parallel CD$ .

**Soluție:**

Se arată la fel ca în problema precedentă că:

$$\frac{\|ME\|}{\|MF\|} = k \Rightarrow \frac{\|ME\|}{\|MF\| + \|ME\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|ME\| = \frac{kd}{k+1}$ , iar locul geometric al punctelor care se află la o distanță constantă de o dreaptă dată este o paralelă la dreapta respectivă situată între cele două paralele.

Dacă  $\|AB\| > \|CD\| \Rightarrow d(MAE) < d(MCD)$ .

Atunci dacă  $\frac{ME}{MF} = k \Rightarrow \frac{ME}{MF - ME} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow \frac{ME}{d} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow ME = \frac{kd}{1-k}$ , deci se obține

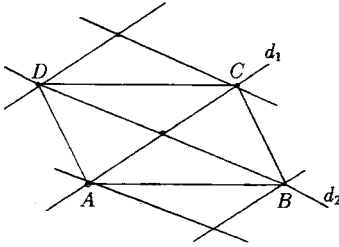
încă o paralelă la  $AB$ .

37) Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Să se afie locul geometric al punctului  $x_1$  din interiorul  $ABCD$  astfel încît  $\sigma[ABM] + \sigma[CDM] = k$ ,  $k$  - o constantă. Pentru ce valori ale lui  $k$  locul geometric căutat nu este mulțimea vidă?

## GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

1) Să se găsească locul geometric al punctelor astfel încît suma distanțelor la două drepte concurente să fie constantă, egală cu  $l$ .

**Soluție:**



Fie  $d_1$  și  $d_2$  cele două drepte concurente. Ducem 2 drepte paralele cu  $d_1$  situate de o parte și de alta a ei la distanța  $l$ . Acestea intersectează pe  $d_2$  în  $D'$  și  $B$  care vor fi puncte ale locului geometric căutat, întrucît suma distanțelor  $d(B, d_1) + d(B, d_2) = l + 0$  verifică condiția din enunț.

Ducem două drepte paralele cu  $d_2$  situate la distanța  $l$  de ea care taie pe  $d_1$  în  $A$  și  $C$  care de asemenea sunt puncte ale locului geometric căutat. Paralelele echidistante determină pe  $d_2$  segmente congruente  $\Rightarrow \begin{cases} |DO| \equiv |OB| \\ |AO| \equiv |OC| \end{cases}$  la fel deci  $ABCD$  este paralelogram.

$$\left. \begin{array}{l} \text{În } \triangle BOC, \quad \|CC'\| = d(C, d_2) = l \\ \quad \quad \quad \|BB'\| = d(B, d_1) = l \end{array} \right\} \Rightarrow \|CC'\| = \|BB'\| \Rightarrow \triangle BOC \text{ este isoscel}$$

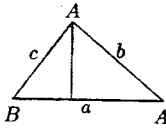
$\Rightarrow \|OC\| = \|OB\| \Rightarrow ABCD$  este dreptunghi. Orice punct  $M$  am lua de pe laturile acestui dreptunghi avem  $\|R_1, d_1\| + \|M, d_2\| = l$ , folosind proprietatea că suma distanțelor de la un punct de pe baza unui triunghi isoscel la laturi este constant și egal cu înălțimea ce pleacă dintr-un vîrf al bazei, adică  $l$ . Deci locul căutat este dreptunghiul  $ABCD$ .

2) Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  avem:

a)  $b \cos C + c \cos B = a$

b)  $b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C)$

**Soluție:**



$$\text{În } \triangle ABC : \cos B = \frac{\|BD\|}{c} \Rightarrow \|BD\| = c \cos B$$

$$\text{În } \triangle ADC : \cos C = \frac{\|DC\|}{b} \Rightarrow \|DC\| = b \cos C$$

$$\text{Deci } a = \|BD\| + \|DC\| = c \cos B + b \cos C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \begin{cases} b = m \sin B \\ c = m \sin C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b \cos B + c \cos C &= m \sin B \cos B + m \sin C \cos C = \frac{m}{2}(2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C) = \\ &= \frac{m}{2}(\sin 2B + \sin 2C) = \frac{m}{2} \cdot 2 \sin(B+C) \cos(B-C) = \frac{a}{\sin A} \sin(\pi - A) \cos(B-C) = \\ &= a \cos(B-C). \end{aligned}$$

3) Să se arate că între unghiurile triunghiului ABC avem:

$$\text{a) } b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - a^2}{a}$$

$$\text{b) } 2(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C) = a^2 + b^2 + c^2$$

**Soluție:**

$$\text{a) } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ și } \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}$$

$$\begin{aligned} b \cos C - c \cos B &= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2}{2a} = \\ &= \frac{2b^2 - 2c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{a} \end{aligned}$$

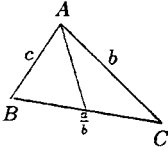
$$\begin{aligned} \text{b) tot din teorema cosinusului } \Rightarrow 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C &= 2bc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \\ + 2ac \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + 2ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

4) Folosind teorema cosinusului să se arate că:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \text{ unde } m_a \text{ este lungimea medianei corespunzătoare laturii de lungime } a.$$

**Soluție:**

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} c \cos B$$



$$\begin{aligned}
 4m_a^2 &= 4c^2 + a^2 - 4ac \cos B = 4c^2 + a^2 - \\
 -4ac \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} &= 4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2 = \\
 &= 2c^2 + 2b^2 - a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2
 \end{aligned}$$

5) Să se arate că triunghiul  $ABC$  în care  $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$  este dreptunghic.

**Soluție:**

În teorema sinusului  $\Rightarrow a = m \sin A$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow b = m \sin B$$

$$c = m \sin C$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{m \sin A + m \sin C}{m \sin B} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} =$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} &= \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \\ \operatorname{ctg} \frac{B}{2} &= \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \frac{A-C}{2} = \cos \frac{B}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = \frac{B}{2}$$

$$\frac{A-C}{2} = -\frac{B}{2} \Rightarrow A-B = C \text{ sau } A-C = B \Rightarrow \begin{array}{lll} A = B+C & 2A = 180^\circ & A = 90^\circ \\ \text{sau} & \Rightarrow & \text{sau} & \Rightarrow & \text{sau} \\ A+B=C & 2C = 180^\circ & C = 90^\circ \end{array}$$

6) Să se arate că, dacă în triunghiul  $ABC$  avem  $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$

**Soluție:**

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 2 \operatorname{ctg} C \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = 2 \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \sin A = \frac{a}{m}, \sin B = \frac{b}{m}, \sin C = \frac{c}{m}; \text{ înlocuind obținem}$$

$$2c^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \Rightarrow 2c^2 = a^2 + b^2$$

7) Să se determine elementele necunoscute ale triunghiului  $ABC$  fiind date:

a)  $A, B$  și  $p$

b)  $a + b = m, A$  și  $B$

c)  $a, A; b - c = \alpha$

**Soluție:**

$$\text{a) Folosind teorema sinusilor} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$$

$$= \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$a = \frac{2p \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}; b = \frac{2p \sin B}{\sin A + \sin B + \sin C}; c = \frac{2p \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\text{iar } C = \pi - (A + B)$$

$$\text{b) } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{m}{\sin A + \sin B} \Rightarrow a = \frac{m \sin A}{\sin A + \sin B}$$

$$b = \frac{m \sin B}{\sin A + \sin B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin(A+B)}{\sin A} \text{ dar } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{c) } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin B} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C} = \frac{d}{\sin B - \sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin B - \sin C = \frac{d \sin A}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \frac{d \sin A}{a}$$

$$B+C = \pi - A \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$$

Deci:

$$2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{d}{a} 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow \sin \frac{B-C}{2} = \frac{d}{a} \cos \frac{A}{2}$$

Se rezolvă sistemul, se află  $B$  și  $\hat{C}$ . Apoi se află  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$  și  $c = b - d$ .

8) Să se arate că în orice triunghiul  $ABC$  avem

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad (\text{teorema tangențelor})$$

**Soluție:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = m \Rightarrow \begin{aligned} a &= m \sin A \\ b &= m \sin B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{m \sin A - m \sin B}{m \sin A + m \sin B} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \end{aligned}$$

9) În triunghiul  $ABC$  se dă  $\hat{A} = 60^\circ$  și  $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}$  și unghiurile  $B$  și  $C$ .

**Soluție:**

Folosind teorema tangențelor

$$\frac{b-c}{b+c} = \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\hat{A} \in 60^\circ \Rightarrow m\left(\frac{A}{2}\right) = 30^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} \Rightarrow \frac{b-c}{b+c} = \frac{2 + \sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{3} + 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

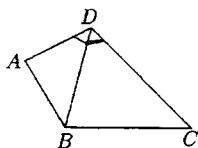
$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1 \Rightarrow \mu\left(\frac{B-C}{2}\right) = 45^\circ \Rightarrow \begin{cases} B-C = 90^\circ \\ B+C = 120^\circ \end{cases}$$

$$2B = 210^\circ \Rightarrow \mu(B) = 105^\circ \Rightarrow \mu(C) = 120^\circ - 105^\circ = 15^\circ \text{ deci } \mu(C) = \frac{\pi}{12} \text{ și } \mu(B) = \frac{7\pi}{12}$$



10) Într-un patrulater convex  $ABCD$  se dau  $\|AD\| = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ,  $\|CD\| = 13$ ,  $\|BC\| = 15$ ,  $C = \arccos \frac{33}{65}$  și  $D = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13}$ . Se cer celelalte unghiuri ale patrulaterului și  $\|AB\|$ .

**Soluție:**



$$\begin{aligned} \|BD\|^2 &= 13^2 - 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cos C = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \frac{33}{65} = \\ &= 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{3 \cdot 11}{13 \cdot 5} = 13^2 + 15^2 - 18 \cdot 11 = 196 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|BD\| = 14 \end{aligned}$$

În  $\triangle BDC$  avem:

$$\frac{14}{\sin C} = \frac{15}{\sin \widehat{BDC}} \Rightarrow \sin \widehat{BDC} = \frac{15 \cdot \sin C}{14}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \frac{33^2}{65^2}} = \sqrt{\frac{(65-33)(65+33)}{65^2}} = \sqrt{\frac{2^6 \cdot 7^2}{65^2}} = \frac{56}{65}$$

$$\sin \widehat{BDC} = \frac{15 \cdot \frac{56}{65}}{14} = \frac{15 \cdot 56}{14 \cdot 65} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 4}{14 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\widehat{BDC} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169 - 144}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\sin \widehat{BDC} = \arccos \frac{5}{13}$$

$$\sin \widehat{ADB} = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{5}{13} - \arccos \frac{5}{13} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle ADB \Rightarrow \|AB\|^2 &= 49(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 7(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = 49(6 + 2 - 2\sqrt{2}) + \\ &+ 196 - 93(\sqrt{2} - 2) = 98(4 - \sqrt{12}) - 98(\sqrt{12} - 2) + 196 = 98(4 - \sqrt{12} - \sqrt{12} + 2) + 196 = \\ &= 196(3 - \sqrt{12}) + 196 = 196(4 - 2\sqrt{3}) = 196(\sqrt{3} - 1)^2, \end{aligned}$$

$$\|AB\| = 14(\sqrt{3} - 1)$$

În  $\triangle ADB$  aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{\|AD\|}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{\|AB\|}{\sin \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{7(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{14(\sqrt{3} - 1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\sin ABD = \frac{7(\sqrt{1}-2)}{28(\sqrt{3}-1)} = \frac{14(\sqrt{3}-1)}{28(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} = \mu(\widehat{ABD}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\mu(A) = A - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{12\pi - 2\pi - 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\mu(D) = 2\pi - \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{5}{13} - \arccos \frac{33}{65} = \frac{14\pi}{12} - \underbrace{\left(\arccos \frac{5}{13} + \arccos \frac{33}{65}\right)}_{\alpha + \beta}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{33}{65} \Rightarrow \sin \beta = \frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{33}{65} - \frac{12 \cdot 56}{13 \cdot 65} = -\frac{507}{13 \cdot 65} = -\frac{3 \cdot 13^2}{13 \cdot 13 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$$

$$\alpha + \beta = \pi - \arccos \frac{3}{5}$$

$$\mu(D) = \frac{14\pi}{12} - \pi + \arccos \frac{3}{5} = \frac{2\pi}{12} + \arccos \frac{3}{5} = \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{3}{5}$$

Sau se afiă  $\mu(\widehat{DBC})$  și se adună cu  $\frac{\pi}{6}$ .

11) Să se calculeze aria  $\triangle ABC$  atunci când:

a)  $a = 17, B = \arcsin \frac{24}{25}, C = \arcsin \frac{12}{13}$

b)  $b = 2, \hat{A} \in 135^\circ, \hat{C} \in 30^\circ$

c)  $a = 7, b = 5, c = 6$

d)  $\hat{A} \in 18^\circ, b = 4, c = 6$

**Soluție:**

a)  $B = \arcsin \frac{24}{25} \Rightarrow \sin B = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos B = \frac{7}{25}$

$C = \arcsin \frac{12}{13} \Rightarrow \sin C = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos C = \frac{5}{13}$

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \frac{24}{25} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{7}{25} = \\ &= \frac{120 + 84}{325} = \frac{204}{325} \end{aligned}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{289 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{12}{325}}{2 \cdot \frac{204}{325}}$$

b)  $b = 2, \hat{A} \in 135^\circ, \hat{C} \in 30^\circ \Rightarrow \hat{B} \in 15^\circ$

$$\sin A = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin C = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin B = \sin \frac{30^\circ}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

d)  $\hat{A} \in 18^\circ, b = 4, c = 6$

$$\mu(A) = \frac{\pi}{10}$$

$$2\hat{A} = 36^\circ, 3\hat{A} \in 54^\circ$$

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin 30^\circ = \cos 54^\circ \Rightarrow \sin 2A = \cos 3A \Rightarrow 2 \sin A \cos A = \cos(4 \cos^2 A - 3) \Rightarrow$$

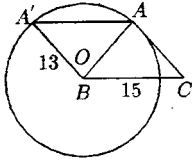
$$\Rightarrow 4 \sin^2 A + 2 \sin A - 1 = 0$$

$$\sin A = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ într-uncît } m(A) < 180 \text{ și } \sin A > 0$$

12) Cîte triunghiuri distincte sub aspect simetric există astfel încît  $a = 15, c = 13, s = 24$

**Soluție:**



$$\frac{ac \sin B}{2} = 24 \Rightarrow \sin B = \frac{48}{15 \cdot 13} = \frac{16}{65}$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \frac{16^2}{65^2}} = \sqrt{\frac{(65-16)(65+16)}{65^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{49 \cdot 81}{65^2}} = \frac{7 \cdot 9}{65} = \frac{63}{65}$$

$$b^2 = 13^2 + 15^2 - 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{7 \cdot 9}{13 \cdot 5} = 13^2 + 15^2 - 376 = 394 - 378 = 16,$$

$$b = 4$$

$$b^2 = 13^2 + 15^2 + 2 \cdot 13 \cdot 15 \cdot \frac{7 \cdot 9}{13 \cdot 5} = 394 + 378 = 772 = 4 \cdot 193$$

$$b = 2\sqrt{193}$$

13) Să se afle aria  $\triangle ABC$ , dacă  $a = \sqrt{6}$ ,  $\hat{A} \in 60^\circ$ ,  $b + c = 3 + \sqrt{3}$ .

**Soluție:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 6 = b^2 + c^2 - 2bc \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} 6 &= (b+c)^2 - 2bc - bc = (b+c)^2 - 3bc \\ b+c &= 3 + \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (3 + \sqrt{3})^2 - 3bc = 6$$

$$9 + 6\sqrt{3} + 3 - 3bc = 6 \Rightarrow 2(1 + \sqrt{3}) = bc$$

$$\left. \begin{aligned} b+c &= 3 + \sqrt{3} \\ bc &= 2 + 2\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 5x + p = 0 \Rightarrow x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 2 + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{(3-1)^2}}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm (\sqrt{3}-1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{3}$$

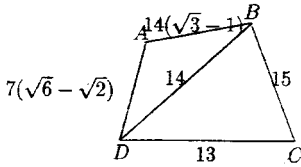
$$x_2 = 2$$

Deci  $b = 1 + \sqrt{3}$  și  $c = 2$  sau  $b = 2$  și  $c = 1 + \sqrt{3}$

$$2p = \sqrt{6} + 1 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3} + 2 = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \Rightarrow p = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

14) Să se afle aria patrulaterului din problema 9.



$$\|AD\| = 7(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\|CD\| = 13, \quad \|BC\| = 15$$

La problema 9 s-a aflat

$$\|BD\| = 14, \quad \|AB\| = 14(\sqrt{3} - 1)$$

Se află cu formula lui Heron aria fiecărui triunghi și se adună

$$\sigma[ABCD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDC]$$

15) Dacă  $S_n$  este aria poligonului regulat cu  $n$  laturi, să se calculeze:  $S_3; S_4; S_6; S_8; S_{12}; S_{20}$  în funcție de  $R$ , raza cercului circumscris poligonului.

**Soluție:**

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} \text{ formula pentru aria poligonului regulat.}$$

$$n = 3 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$n = 4 \Rightarrow S_4 = \frac{4}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{4} = 2R^2$$

$$n = 6 \Rightarrow S_6 = \frac{6}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

$$n = 8 \Rightarrow S_8 = \frac{8}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{8} = 2\sqrt{2}R^2$$

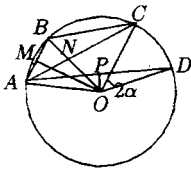
$$n = 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{12} = 3R^2$$

$$n = 20 \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{20} = 10R^2 \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{5}{2}(\sqrt{5} - 1)R^2$$

16) Să se calculeze aria poligonului regulat  $ABCD \dots M$  înscris în cercul de rază  $R$ , știind că:

$$\frac{1}{\|AB\|} = \frac{1}{\|AC\|} + \frac{1}{\|AD\|}.$$

Soluție:



$$m(\widehat{AB}) = 2d \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 2d$$

În  $\triangle BOM$

$$\sin \alpha = \frac{\|BM\|}{\|BO\|} \Rightarrow \begin{cases} \|BM\| = R \sin \alpha \\ \|AB\| = 2R \sin \alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{În } \triangle NOC : \sin 2\alpha = \frac{\|NC\|}{\|OC\|} \Rightarrow \|NC\| = R \sin 2\alpha \Rightarrow \|AC\| = 2R\alpha \quad (2)$$

$$\text{În } \triangle POD : \sin 3\alpha = \frac{\|DP\|}{\|OD\|} \Rightarrow \|DP\| = R \sin 3\alpha$$

$$\|AD\| = 2R \sin 3\alpha \quad (3)$$

Înlocuind (1), (2), (3) în relația dată:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R \sin \alpha} &= \frac{1}{2R \sin 2\alpha} = \frac{1}{2R \sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha} \\ \frac{1}{\sin 2\alpha} &= \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 3\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 3\alpha} \Rightarrow 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \\ &= \sin 3\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha = \sin 3\alpha \Rightarrow \sin 4\alpha - \sin 3\alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{7\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ sau} \end{aligned}$$

$$\cos \frac{7\alpha}{2} = 0.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ imposibil}$$

$$\cos \frac{7\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow m(\widehat{AB}) = \frac{2\pi}{7}$$

$$n = \frac{m(\text{cerc întreg})}{m(\widehat{AB})} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7.$$

Deci poligonul are 7 laturi.

$$S_7 = \frac{7}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{7}$$

17) Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$a) r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$\text{b) } S = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$\text{c) } p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{d) } p - a = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{e) } m_a^2 = R^2 (\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C)$$

$$\text{f) } h_a = 2R \sin B \sin C$$

**Soluție:**

$$\text{a) } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\begin{aligned} (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= (p-a) \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \\ &= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}} = \frac{9}{p} = r \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{S}{p} = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \Rightarrow S = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

$$\text{c) } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}, \quad R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow 4R = \frac{abc}{S}$$

$$4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{abc}{S} \cdot \sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}} = \frac{abc}{S} \frac{\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{abc}{S}$$

$$\frac{pS}{abc} = p$$

$$\text{d) } 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{abc}{S} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)^3(p-b)(p-c)}{bcacab}} = \frac{abc}{S} \cdot \frac{p-a}{abc}$$

$$S = p - a$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$R^2 (\sin^2 A + 4 \cos A \sin B \sin C) = R^2 \left( \frac{a^2}{4R^2} + 4 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \right) =$$

$$= R^2 \frac{a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2a^2}{4R^2} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \mu_a^2$$

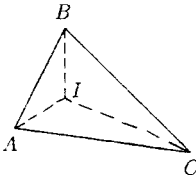
$$f) S = \frac{ah_a}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, R = \frac{abc}{4S}, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2a} = \sin C$$

$$2R \sin B \sin C = 2R \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{bc}{2R} = \frac{bc}{2 \cdot \frac{abc}{4S}} = \frac{2bcS}{abc} = \frac{2S}{a} = h_a$$

17) Dacă  $I$  este centrul cercului înscris în triunghiul  $ABC$  să se arate că

$$\|AI\| = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

**Soluție:**



Aplicăm teorema sinusurilor în  $\triangle ABI$ :

$$\frac{\|AI\|}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\|BI\|}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\|AB\|}{\sin \widehat{BIA}}$$

$$m(\widehat{BIA}) = 180^\circ - \frac{A+B}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2}$$

$$\sin \widehat{BIA} = \sin(90^\circ + \frac{C}{2}) = \sin(180^\circ - 90^\circ - \frac{C}{2}) = \sin(90^\circ - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2}$$

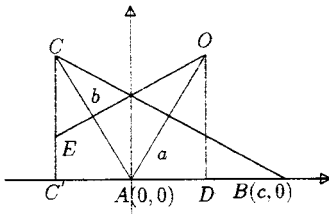
Teorema sinusurilor aplicată în  $\triangle ABC$

$$\frac{\|AB\|}{\sin C} = 2R \Rightarrow \|AB\| = 2R \sin C = 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

18) Să se demonstreze teorema sinusurilor utilizând metoda analitică

**Soluție:**



$$\text{În } \triangle ACC' : \sin(180^\circ - A) = \frac{\|CC'\|}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|CC'\| = b \sin A \cdot \cos(180^\circ - A) = b \cos A.$$

Deci coordonatele lui  $C$  sunt  $(-b \cos A, b \sin A)$

Centrul cercului circumscris se află la intersecția perpendicularelor duse prin mijlurile laturilor  $AB$  și  $AC$ .

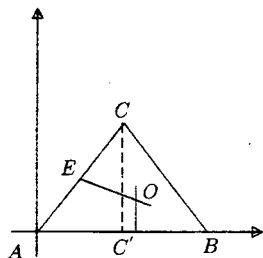


$$m_{EO} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} A} = \operatorname{ctg} A$$

$$E\left(\frac{O - b \cos A}{2}, \frac{O + b \sin A}{2}\right) = E\left(-\frac{b \cos A}{2}, \frac{b \sin A}{2}\right)$$

$$\text{Ecuația dreptei } EO : y - y_0 = m(\lambda - x_0) \Rightarrow y - \frac{b \sin A}{2} = \operatorname{ctg} A\left(x + \frac{b \cos A}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} R = \|OA\| &= \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2 \sin A} + \frac{c \cos A}{2 \sin A}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} + 2 \cdot \frac{bc \cos A}{4 \sin^2 A} + \frac{c^2}{4} \cdot \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{4} \left(1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right) + \frac{1}{4 \sin^2 A} (b^2 + 2bc \cos A)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4 \sin^2 A} (c^2 + b^2 + 2bc \cos A)} = \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 A}} = \\ &= \frac{a}{2 \sin A} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} \end{aligned}$$



Calculul refăcut pentru același desen dă:

$$(b \cos A, b \sin A)$$

$$m_{AC} = \operatorname{tg} A \Rightarrow m_{OE} = -\frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

$$(OE) : 2 \sin A = -2x \cos A + B$$

$$O\left(\frac{c}{2}, \frac{-c \cos A + b}{2 \sin A}\right) \text{ și } \|OA\| = R =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 \cos A - 2bc \cos A}{4 \sin^2 A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4 \sin^2 A} \cdot (c^2 \sin^2 A + c^2 \cos^2 A + b^2 - 2bc \cos A)} = \frac{a}{2 \sin A},$$

folosind teorema cosinusului.

19) Folosind teorema sinusurilor să se arate că într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare.

**Soluție:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Presupunem  $a > b$ . Să demonstrăm că  $A > B$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \\ a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} > 1 \Rightarrow A, B, C \in (0, \pi) \Rightarrow \sin B > 0$$

$$\Rightarrow \sin A > \sin B \Rightarrow \sin A - \sin B > 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} > 0 \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos(90^\circ - \frac{C}{2}) = \sin \frac{C}{2} > 0 \text{ deci și } \frac{A-B}{2} > 0 \Rightarrow \frac{A-B}{2} > 0 \Rightarrow A > B$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

20) Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  avem:

$$a) \frac{a \cos C - b \cos B}{a \cos B - b \cos A} + \cos C = 0, \quad a \neq b$$

$$b) \frac{\sin(A-B) \sin C}{1 + \cos(A-B) \cos C} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$c) (a+c) \cos \frac{B}{4} + a \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{B}{4}$$

**Soluție:**

$$a) a = 2R \sin A, b = 2R \sin B$$

$$\frac{2R \sin A \cos A - 2R \sin B \cos B}{2R \sin A \cos B - 2R \sin B \cos A} + \cos C = \cos C + \frac{\sin A \cos A - \sin B \cos B}{\sin A \cos B - \sin B \cos A} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 2A - \frac{1}{2} \sin 2B}{\sin(A-B)} + \cos C = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin(A-B) \cos(A+B)}{\sin(A-B)} + \cos C =$$

$$\cos(A+B) + \cos C = \cos(180^\circ - C) + \cos C = -\cos C + \cos C = 0$$

b) Transformăm produsul în sumă:

$$\sin(A-B) \sin C = \frac{\cos(A-B-C) - \cos(A-B+C)}{2} = \frac{1}{2} [-\cos 2A + \cos 2B] =$$

$$(B+C = 180^\circ - A, \quad A+C = 180^\circ - B)$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{4R^2}; \quad (1)$$

$$1 + \cos(A - B) \cos C = 1 + \frac{\cos(A - B + C) + \cos(A - B - C)}{2} =$$

$$= \frac{2 + \cos(180 - 2B) + \cos(2A - 180)}{2}$$

$$(A + B = 180^\circ - B, \quad B + C = 180^\circ - A)$$

$$= \frac{2 - \cos 2B - \cos 2A}{2} = \frac{2 - 1 + 2 \sin^2 B - 1 + 2 \sin^2 A}{2} = \sin^2 A + \sin^2 B = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4R^2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ și } (2) \Rightarrow \frac{\frac{a^2 - b^2}{4R^2}}{\frac{a^2 + b^2}{4R^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$c)(a + c) \cos \frac{B}{4} + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = a \cos \frac{B}{4} + b \cos \frac{B}{4} + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = c \cos \frac{B}{4} +$$

$$+ a \cos \left(B - \frac{3B}{4}\right) + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right)$$

Considerăm ultimii 2 termeni:

$$a \cos \left(B - \frac{3B}{4}\right) + b \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) = 2R \sin A \cos \left(B - \frac{3B}{4}\right) + 2R \sin B \cos \left(A + \frac{3B}{4}\right) =$$

$$= 2R \left( \frac{\sin \left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right)}{2} + \frac{\sin \left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right)}{2} \right) =$$

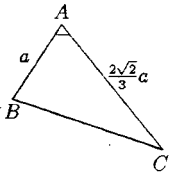
$$= R \left[ \sin \left(A + B - \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A + B + \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right) + \sin \left(A - B + \frac{3B}{4}\right) \right] =$$

$$= 2R \sin(A + B) \cos \frac{3B}{4} - 2R \sin(\pi - C) \cos \frac{3B}{4} + 2R \sin c \cos \frac{3B}{4} = c \cos \frac{3B}{4} + c \cos \frac{3B}{4} =$$

$$= c \left( \cos \frac{B}{4} + \cos \frac{3B}{4} \right) = 2c \cos \frac{B}{4} + \cos 3B = 2c \cos \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

2i) În triunghiul  $ABC$ ,  $A \in 45^\circ$ ,  $\|AB\| = a$ ,  $\|AC\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$ . Să se arate că  $\operatorname{tg} B = 2$ .

**Soluție:**



Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul  $ABC$ :

$$\|BC\|^2 = a^2 + \frac{8}{9}a^2 - 2a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + \frac{8a^2}{9} - \frac{4a^2}{3} = \frac{5a^2}{9}$$

$$\|BC\| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|AB\|\|BC\|\cos B \Rightarrow \frac{8a^2}{9} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - 2a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \cos B$$

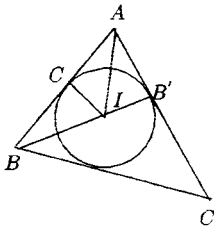
$$\Rightarrow \frac{2a^2\sqrt{5}\cos B}{2} = a^2 + \frac{5a^2}{9} - \frac{8a^2}{9} = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \cos B = \frac{6a^2}{9} \cdot \frac{3}{2a^2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 2$$

22) Fie  $A', B', C'$  puncte de tangență ale cercului înscris unui triunghi  $ABC$  cu laturile acestuia. Să se arate că  $\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{r}{2R}$

**Soluție:**



$$\|IA\| = \|IB\| = \|IC\| = r$$

$$\left. \begin{array}{l} IC' \perp AB \\ IA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow IA'B'C' \text{ patrulater iscriptibil} \Rightarrow$$

$$m(\widehat{A'IC'}) = i80 - \widehat{B} \Rightarrow \sin(\widehat{A'IC'}) = \sin \widehat{B}$$

$$\text{La fel } \sin \widehat{A'IB'} = \sin C \text{ și } \sin \widehat{C'IB'} = \sin A$$

$$\sigma[B'C'I] = \frac{r^2 \sin A}{2}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sigma[B'C'I] = \frac{r^2 \frac{a}{2R}}{2} = \frac{r^2 a}{4R}$$

$$\text{Analog } \sigma[A'B'I] = \frac{r^2}{4R}(a + b + c)$$

$$\sigma[ABC] = s = rp$$

$$\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{r^2(a+b+c)}{4R} \Rightarrow \frac{1}{rp} = \frac{r}{2R}$$

23) Să se arate că în orice triunghi ABC  $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ .

**Soluție:**

$$0 < A \Rightarrow 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} > 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} \\ \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} \leq \frac{a^2}{4bc} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

24) Să se rezolve triunghiul ABC cunoscându-i elementele A, B și aria S.

**Soluție:**

$$C = \pi - (A + B)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \\ A, B, C &\text{ cunoscute} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Se află } a$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A}. \text{ La fel se află } c.$$

25) Să se rezolve triunghiul ABC cunoscând  $a = 13$ ,  $A = \arccos \frac{4}{5}$  și mediana corespunzătoare laturii a,  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{15\sqrt{3}}$

**Soluție:**

$$A = \arccos \frac{4}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Teorema cosinusului} &\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 169 = 841 - 2bc \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8bc}{5} = 841 - 169 \Rightarrow \\ &\Rightarrow bc = 420 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} b^2 + c^2 &= 841 \\ bc &= 420 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b &= 21 \\ c &= 20 \end{aligned} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{aligned} b &= 20 \\ c &= 21 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} \text{ se află } B$$

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

$$\sin B = \frac{21 \cdot \frac{3}{5}}{13} = \frac{63}{65} \Rightarrow B = \arcsin \frac{63}{65}$$

$$C = 180^\circ - \left( \arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{63}{65} \right) = 180^\circ - \left( \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{63}{65} \right)$$

Se calculează suma.

Sau

$$\sin B = \frac{20 \cdot \frac{3}{5}}{13} = \frac{12}{13} \Rightarrow B = \arcsin \frac{12}{13}$$

$$C = 180^\circ - \left( \underbrace{\arcsin \frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin \frac{12}{13}}_{\beta} \right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{63}{65} \Rightarrow \alpha + \beta = \arcsin \frac{63}{65}$$

$$C = 180^\circ - \arcsin \frac{63}{65}$$

26) Să se calculeze unghiurile triunghiului  $ABC$  știind că  $B - C = \frac{2\pi}{3}$  și  $R = 8r$  unde  $R$  și  $r$  sunt razele cercurilor circumscrise și înscrise în triunghi.

**Soluție:**

$$R = 8r \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Știm deja că } \Rightarrow \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} = 4 \sin \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2 \sin \frac{A}{2} \left( \cos \frac{2\pi}{6} - \cos \frac{180^\circ - A}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{8} = \sin \frac{A}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{A}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = 2 \sin \frac{A}{2} \left( \frac{1}{2} - \sin \frac{A}{2} \right)$$

Notăm  $\sin \frac{A}{2} = t$ . Avem

$$\frac{1}{8} = 2t \left( \frac{1}{2} - t \right) = t - 2t^2$$

$$1 = 8t - 16t^2 \Rightarrow 16t^2 - 8t + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$4t - 1^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{4}; \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow A = \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\begin{cases} B + C = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8} \\ B - C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{din acest sistem se află } B \text{ și } C.$$

$$2B = \frac{5\pi}{3} - \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$B = \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$C = B - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{15}}{8}$$

## PROBLEME DIVERSE

1) Să se determine mulțimea punctelor din plan ale căror coordonatele afine  $z$  satisfac:

a)  $|z| = 1$ ;

b)  $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ ;  $z \neq 0$ ;

c)  $\arg z > \frac{4\pi}{3}$ ;  $z \neq 0$ ;

d)  $|z + i| \leq 2$

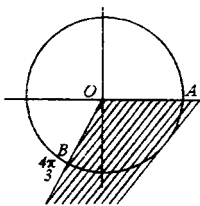
**Soluție:**

$$a) \left. \begin{array}{l} |z| = 1 \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \text{ deci mulțimea căutată este cercul } C_{(0,1)}$$

b)  $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$ .

Mulțimea căutată este dată de toate punctele cadranelor III și IV la care se adaugă semidreapta  $[-Oy, 0]$ , deci toate punctele cu  $x < 0, y < 0$

c)  $\left. \begin{array}{l} \arg z > \frac{4\pi}{3}, z \neq 0 \\ \arg z \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \arg z < 2\pi$



$$\begin{aligned} x_B &= \cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ y_B &= \sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ m_{OB} &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow OB : y = \sqrt{3}x \end{aligned}$$

Mulțimea căutată este mulțimea punctelor interioare ale unghiului cu laturile semiaxa pozitivă și semidreapta  $OB$ .

d)  $|z + i| \leq 2$



$z = x + yi$  imaginea sa geometrică  $M$ .

$$z + i = x + yi + i = x + (y + 1)i$$

$$|z + i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \leq 2 \Rightarrow \|O'M\| \leq 2 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 \leq 4 \Rightarrow \|O'M\|^2 \leq 4$$

unde  $O'(0, -1)$ .

Deci mulțimea căutată este discul de centru  $O'_{(0,-1)}$  și rază 2.

2) Să se demonstreze că rădăcinile de ordin  $n$  ale unității sunt egale cu puterile rădăcini particulare  $\varepsilon_1$

**Soluție:**

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\varepsilon_k = \cos k \frac{2\pi}{n} + i \sin k \frac{2\pi}{n} = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \varepsilon_1^k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1$$

3) Știind că numărul complex  $z$  verifică ecuația  $z^4 = n$ , să se arate că numerele  $2$ ,  $-iz$  și  $iz$  verifică această ecuație.

Aplicație: Să se calculeze  $(1 - 2i)^4$  și să se deducă rădăcinile de ordin 4 ale numărului  $-7 + 24i$ .

**Soluție:**

Fie ecuația  $z^4 = n$ . Dacă  $z^4 = 4$  (este  $z$  soluție) atunci:  $(-z)^4 = (-1)^4 z^4 = 1 \cdot n = n$  deci și  $-z$  este soluție.

$$(iz)^4 = i^4 z^4 = 1 \cdot n = n \Rightarrow iz \text{ este soluție}$$

$$(-iz)^4 = (-i)^4 z^4 = 1 \cdot n = n \Rightarrow \text{deci } -iz \text{ este soluție}$$

$$\begin{aligned} (1 - 2i)^4 &= [(1 - 2i)^2]^2 = (1 - 4i + 4i^2)^2 = (1 - 4 - 4i)^2 = (-3 + 4i)^2 = 9 + 24i - 16 = \\ &= -7 + 24i \Rightarrow z = 1 - 2i \text{ este soluție a ecuației } z^4 = -7 + 24i. \end{aligned}$$

Soluțiile acestei ecuații sunt:

$z_k = \sqrt[4]{-7 + 24i}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  dar pe baza primei părți, dacă  $z = 1 - 2i$  este rădăcină atunci  $-z = -1 + 2i$ ,  $iz = 2 + i$ ,  $-iz = -2 - i$  sunt soluții ale ecuației date.

4) Să se arate că dacă numerele naturale  $m$  și  $n$  sunt prime între ele, atunci ecuațiile  $z^m - 1 = 0$  și  $z^n - 1 = 0$  au o singură rădăcina comună.

**Soluție:**

$$z^m - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[m]{1} \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}, \quad k = 0, \dots, m-1$$

$$z^n - 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[n]{1} \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Dacă există  $k$  și  $k'$  cu  $z_k = z_{k'}$ , atunci

$\frac{2k\pi}{m} - \frac{2k'\pi}{n} = 2p\pi = mn|k'm - kn \Rightarrow n|k', m|k$ , deoarece  $(m, n) = 1$ . Cum  $k' < n$ ,  $k < m$  avem  $k' = 0$ ,  $k = 0$ .

Deci rădăcina comună este  $z_0$ .

5) Să se rezolve următoarea ecuație binomă:  $(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0$ .

**Soluție:**

$$(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0 \Rightarrow z^6 = \frac{-1 - 5i}{2 - 3i} = 1 - i$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} t = -1, t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow t = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{6} \right); \quad k \in 0, \dots, 5$$

6) Să se rezolve ecuația:

$$a) \left. \begin{array}{l} z^6 - 9z^3 + 8 = 0 \\ z^3 = y \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^3 = 8 \\ z^3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{etc.}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} z^8 - 2z^4 + 2 = 0 \\ z^4 = y \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z^4 = 1 + i \\ z^4 = 1 - i \end{array} \right. \quad \text{etc.}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0 \\ z^2 = y \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 + 6(1+i)y + 5 + 6i = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-6(1+i) \pm \sqrt{-20 + 48i}}{2} = \frac{-6(1+i) \pm \sqrt{(4+6i)2}}{2} \quad \text{etc.}$$

7) Să se rezolve ecuația:

$\bar{z} = z^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unde  $\bar{z}$  este conjugatul lui  $z$ .

**Soluție:**

$$\left. \begin{aligned} z = x + iy &\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{z} = x - iy &\Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |z| = |\bar{z}|$$

$$\text{Cum } \bar{z} = z^{n-1} \Rightarrow \left. \begin{aligned} |\bar{z}| &= |z|^{n-1} \\ |z| &= |\bar{z}| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |z| = |z|^{n-1} \Rightarrow |z| \cdot (1 - |z|^{n-2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |z| = 0 \\ |z|^{n-2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Din  $|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$  și  $y = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i$

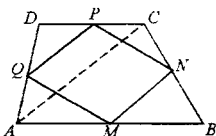
Din  $|z|^{n-2} - 1 = 0 \Rightarrow (|z| - 1) \underbrace{(|z|^{n-3} + |z|^{n-4} + \dots + 1)}_{\text{pozitiv}} = 0 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$\left. \begin{aligned} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{aligned} \right\} \Rightarrow z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1$$

Ecuația dată define  $\bar{z} \cdot z = z^n \Rightarrow z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$

8) Mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sunt vîrfurile unui paralelogram.

**Soluție:**



$A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$

$$\Rightarrow M \left( \frac{z_1 + z_2}{2} \right), N \left( \frac{z_2 + z_3}{2} \right), P \left( \frac{z_3 + z_4}{2} \right), Q \left( \frac{z_4 + z_1}{2} \right)$$

Facem suma absciselor punctelor opuse:

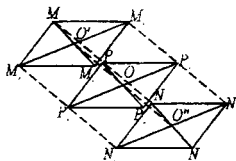
$$\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_1 + z_4}{2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{2}$$

$$\frac{z_2 + z_3}{2} + \frac{z_4 + z_1}{2} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{2}$$

Deci  $\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_3 + z_4}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2} + \frac{z_4 + z_1}{2} \Rightarrow MNPQ$  paralelogram.

9) Fie  $M_1M_2M_3M_4$  și  $N_1N_2N_3N_4$  două paralelamente și  $P_i$  mijloacele segmentelor  $[M_iN_i]$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Să se arate că  $P_1P_2P_3P_4$  este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

**Soluție:** (sintetică)



În patrulaterul  $M_1M_3N_3N_1$  prin unirea mijloacelor se obține paralelogramul  $O'P_1O''P_3$ , ale cărui diagonale se vor intersecta în  $O$ , mijlocul lui  $|O'P_1|$  și deci

$$|P_1O| \equiv |OP_3| \quad (1)$$

În patrulaterul  $M_4M_2N_2N_4$  prin unirea mijloacelor laturilor se obține paralelogramul  $O'P_2O''P_4$ , ale cărui diagonale se vor intersecta în  $O$ , mijlocul lui  $|O'P_2|$  deci

$$|P_2O| \equiv |OP_4| \quad (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow P_1P_2P_3P_4$  paralelogram.

9) Fie funcția  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = az + b$ , ( $a, b, c \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ). Dacă  $M_1$  și  $M_2$  sunt de afixe  $z_1$  și  $z_2$ , iar  $M'_1$  și  $M'_2$  sunt de afixe  $f(z_1)$ ,  $f(z_2)$  să se arate că  $\|M'_1M'_2\| = |a| \cdot \|M_1M_2\|$ . Avem  $\|M'_1M'_2\| = \|M_1M_2\| \Leftrightarrow |a| = 1$ .

**Soluție:**

$$\|M'M\| = |z - z'|, \text{ deci } \|M_1M_2\| = |z_2 - z_1|$$

$$\begin{aligned} \|M_1M_2\| &= |f(z_2) - f(z_1)| = |az_2 + b - az_1 - b| = \|az_2 - az_1\| = |a(z_2 - z_1)| = |a| \cdot |z_2 - z_1| = \\ &= |a| \cdot \|M_1M_2\| \end{aligned}$$

$$\text{Dacă } |a| = 1 \Rightarrow \|M'_1M'_2\| = \|M_1M_2\|$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Dacă } \|M'_1M'_2\| &= \|M_1M_2\| \\ \|M'_1M'_2\| &= |a| \cdot \|M_1M_2\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|M_1M_2\| = |a| \cdot \|M_1M_2\| \Rightarrow |a| = 1$$

10) Arătați că funcția  $z \rightarrow \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  definește o izometrie.

**Soluție:**

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy$$

Fie  $M_1$  și  $M_2$  de afixe  $z_1$  și  $z_2$ . Imaginile lor prin funcția dată sunt  $M'_1$  și  $M'_2$  cu afixe  $\bar{z}_1$  și  $\bar{z}_2$ , deci  $f(z_1) = \bar{z}_1$ ,  $f(z_2) = \bar{z}_2$

$$\|M_1M_2\| = |z_2 - z_1| = |x_2 + iy_2 - x_1 - iy_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

$$\|M'_1M'_2\| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \|M_1 M_2\| = \|M'_1 M'_2\| \text{ sau } \|M'_1 M'_2\| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = \|M_1 M_2\|$$

Deci  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \bar{z}$  definește o izometrie pentru că se păstrează distanța dintre puncte.

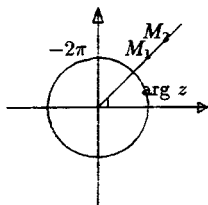
11) Fie  $M_1, M_2$  de afixe  $z_1, z_2 \neq 0$  și  $z_2 = \alpha z_1$ . Să se arate că semidreptele  $|OM_1, |OM_2$  coincid (respectiv sunt opuse)  $\Leftrightarrow \alpha > 0$  (respectiv  $\alpha < 0$ ).

**Soluție:**

Se știe că argumentul  $(\alpha z_1) = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi$  unde  $k = 0$  sau  $k = 1$ . Cum  $\arg z_2 = \arg(\alpha z_1)$ ,  $\arg z_2 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi$ .

a) Presupunem că  $|OM_1 = |OM_2 \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi \Rightarrow \arg \alpha = 2k\pi$ ,  $\arg \in [0, 2\pi] \Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in |Ox \text{ (poz.)} \Rightarrow \alpha > 0$ .

Reciproc,  $\alpha > 0 \Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 - 2k\pi \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$  sau  $\arg z_2 = \arg z_1 - 2\pi \Rightarrow |OM_1 = |OM_2$ .

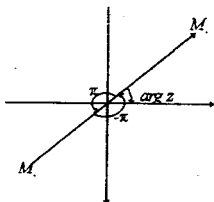


b) Fie  $|OM_1$  și  $|OM_2$  opuse  $\Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 + \pi$

$\Rightarrow \arg z_1 + \pi = \arg z_1 + \arg \alpha - 2k\pi \Rightarrow \arg \alpha = \pi \Rightarrow \alpha \in \text{semidreptei negative } |Ox' \Rightarrow \alpha < 0$ .

Reciproc,  $\alpha < 0 \Rightarrow \arg \alpha = \pi \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 + \pi - 2k\pi$

$$k = 0 \text{ sau } k = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \arg z_2 = \arg z_1 + \pi \\ \text{sau} \\ \arg z_2 = \arg z_1 - \pi \end{array} \right\} \Rightarrow |OM_1 \text{ și } |OM_2 \text{ sunt opuse.}$$



12) Se consideră punctele  $M_1, M_2, M_3$  de afixe  $z_1, z_2, z_3$  și  $M_1 \neq M_2$ . Să se arate că:

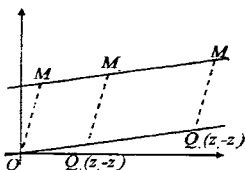
a)  $M_3 \in |M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0$

b)  $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}$

**Soluție:**

Dacă  $n$  și  $n'$  sunt imaginile geometrice ale numerelor complexe  $z$  și  $z'$  atunci imaginea diferenței  $z - z'$  este construită pe  $|OM'|$  și  $|M'M|$  ca laturi.

a) Presupunem  $M_3 \in |M_1M_2$



Construim imaginea geometrică a lui  $z_2 - z_1$ . Este al patrulea vîrf al paralelogramului  $OM_1M_2Q_1$ . Imaginea geometrică a lui  $z_3 - z_1$  este  $Q_2$ , al patrulea vîrf al paralelogramului  $OM_1M_3Q_2$

$$\left. \begin{array}{l} OQ_1 \parallel M_1M_2 \\ OQ_2 \parallel M_1M_3 \\ M_1M_2M_3 \text{ colin.} \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1, Q_2, Q_3 \text{ coliniare} \Rightarrow$$

$$|OQ_1| = |OQ_2| \Rightarrow z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1) \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \alpha \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0$$

Reciproc: presupunem  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} > 0 \Rightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k > 0 \Rightarrow z_3 - z_1 = k(z_2 - z_1), k > 0$

$$\left. \begin{array}{l} OQ_1 = |OQ_2 \\ M_1M_2 \parallel OQ_1 \\ M_1M_3 \parallel OQ_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |M_1M_2| = |M_1M_3| \Rightarrow M_3 \in |M_1M_2$$

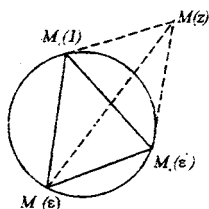
Dacă  $M_3$  și  $M_2 \in$  semidreptei opuse față de  $O$ , atunci  $z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$  cu  $\alpha < 0$ .

Se repetă raționamentul de la punctul anterior pentru același caz.

Deci cînd  $M_3 \in M_1M_2$ ,  $M_1 + M_2$  se vor pbține pentru raportul respectiv pozitiv, negativ sau avînd  $M_3 = M_1$ , deci  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbf{R}$ .

13) Demonstrați teorema lui Pompeiu. Dacă punctul  $M$  din planul triunghiului echilateral  $M_1M_2M_3 \notin$  cercului circumscris  $\Delta M_1M_2M_3 \Rightarrow$  există un triunghi avînd lungimile laturilor  $\|MM_1\|$ ,  $\|MM_2\|$ ,  $\|MM_3\|$ .

**Soluție:**



Imaginile rădăcinilor de ordin 3 ale unității sunt vîrfurile unui triunghi echilateral.

$$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Dar  $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$ , deci dacă notăm  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ , atunci  $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$ .

Deci  $M_1(1)$ ,  $M_2(\varepsilon)$ ,  $M_3(\varepsilon^2)$ .

Se folosește egalitatea:

$$(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2) = (2 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon) \text{ adecvată } (\forall) z \in \mathbf{C}$$

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| = |(z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)|$$

$$\text{Dar } |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \leq |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)|$$

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon) + (z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| - |(z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)|$$

Deci:

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |(z - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon)|$$

$$|(z-1)(\varepsilon^2 - \varepsilon)| + |(z-\varepsilon)(1 - \varepsilon^2)| \geq |z - \varepsilon^2| \cdot |1 - \varepsilon|$$

$$\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon^2 - \varepsilon = i\sqrt{3} = 0 + i\sqrt{3} \Rightarrow |\varepsilon^2 - \varepsilon| = \sqrt{3}$$

$$1 - \varepsilon^2 = -1 - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad |1 - \varepsilon^2| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$1 - \varepsilon = 1 - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$|1 - \varepsilon| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

Înlocuind:

$$|z - 1| \cdot \sqrt{3} + |z - \varepsilon| \cdot \sqrt{3} \geq |z - \varepsilon^2| \cdot \sqrt{3}$$

$$|z - 1| + |z - \varepsilon| \geq |z - \varepsilon^2| \text{ dar } \|MM_1\| = |z - 1|; \|MM_2\| = |z - \varepsilon|; \|MM_3\| = |z - \varepsilon^2|,$$

deci  $\|MM_1\| + \|MM_2\| \geq \|MM_3\|$  deci  $\|MM_1\|, \|MM_2\|, \|MM_3\|$  pct. și laturile unui  $\Delta$ .

Apoi folosim  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  și se obține cealaltă inegalitate.



## PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Să se afle poziția celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral afixele a doua vîrfuri fiind  $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$

**Soluție:**

$$M_1 - z_1 = 1$$

$$M_2 - z_1 = 2 + i$$

$$M_1 - z_1 = x + yi$$

$$\Delta M_1 M_2 M_3 \text{ echilateral} \Rightarrow \|M_1 M_2\| = \|M_1 M_3\| = \|M_2 M_3\| \Rightarrow |z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ (1-x)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 - x$$

$$x^2 + 4 + x^2 - 4x - 2x = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Deci: } M_3 \left( \frac{3 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) \text{ sau } M_3 \left( \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

Există deci 2 soluții.

2) Fie  $z_1, z_2, z_3$  trei numere complexe, nenule, +două cîte 2 și de module egale. Să se demonstreze că dacă  $z_1 + z_2 z_3, z_2 + z_3 z_1, z_3 + z_1 z_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow z_1 z_2 z_3 = 1$ .

**Soluție:**

$$z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1)$$

$$z_2 = r(\cos t_2 + i \sin t_2)$$

$$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \Rightarrow t_1 \neq t_2 \neq t_3$$

$$z_3 = r(\cos t_3 + i \sin t_3)$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 z_3 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_1 + r \sin(t_2 + t_3) = 0 \\ z_2 + z_3 z_1 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_2 + r \sin(t_1 + t_3) = 0 \Rightarrow \\ z_3 + z_1 z_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sin t_3 + r \sin(t_1 + t_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t_1(1 - r \cos t) + r \sin t \cdot \cos t_1 = 0 \\ \sin t_2(1 - r \cos t) + r \cos t \cdot \cos t_2 = 0 \\ \sin t_3(1 - r \cos t) + r \sin t \cdot \cos t_3 = 0 \end{cases} \quad t_1 \neq t_2 \neq t_3$$

Aceste egalități sunt simultan adevărate numai dacă  $1 - r \cdot \cos t = 0$  și  $r \cdot \sin t = 0$ , cum  $r \neq 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow 1 - r = 0 \Rightarrow r = 1$  deci  $z_1 z_2 z_3 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1$

3) Notăm cu  $G$  mulțimea rădăcinilor de ordin  $n$  ale unității,  $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ . Să se demonstreze că:

a)  $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G, (\forall) i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

b)  $\varepsilon_i^{-1} \in G, (\forall) i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

a)  $\varepsilon_k = \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\text{Deci } \left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \cos \frac{2i\pi}{n} + i \sin \frac{2i\pi}{n} \\ \varepsilon_j &= \cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_i \varepsilon_j = \cos \frac{2\pi(i+j)}{n} + i \sin \frac{2\pi(i+j)}{n}, i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

1)  $i + j < n - 1 \Rightarrow i + j = k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \Rightarrow \varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_k \in G$

2)  $i + j = n \Rightarrow \varepsilon_i \varepsilon_j = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 = \varepsilon_0 \in G$

3)  $i + j > n \Rightarrow i + j = n \cdot m + r, 0 \leq r < n, \varepsilon_i \varepsilon_j = \cos \frac{2\pi(n \cdot m + r)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n \cdot m + r)}{n} =$   
 $= \cos \left( 2\pi m + \frac{2\pi r}{n} \right) + i \sin \left( 2\pi m + \frac{2\pi r}{n} \right) = \cos \frac{2\pi r}{n} + i \sin \frac{2\pi r}{n} = \varepsilon_r \in G$

b)  $\varepsilon_i = \cos \frac{2\pi i}{n} + i \sin \frac{2\pi i}{n}$

$$\varepsilon_i^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos \frac{2\pi i}{n} + i \sin \frac{2\pi i}{n}} = \cos \left( -\frac{2\pi i}{n} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi i}{n} \right) = \cos \left( 2\pi - \frac{2\pi i}{n} \right) +$$

$$+ i \sin \left( 2\pi - \frac{2\pi i}{n} \right) = \cos \frac{2\pi n - 2\pi i}{n} + i \sin \frac{2\pi n - 2\pi i}{n} = \cos \frac{2\pi(n-i)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-i)}{n},$$

$i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Dacă  $i = 0 \Rightarrow n - i = n \Rightarrow \varepsilon_0^{-1} = \varepsilon_0 \in G$

Dacă  $i \neq 0 \Rightarrow n - i \leq n - 1 \Rightarrow h = n - i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$\Rightarrow \varepsilon_i^{-1} = \cos \frac{2\pi h}{n} + i \sin \frac{2\pi h}{n} \in G$$

4) Fie ecuația  $az^2 + bz^2 + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{C}$  și  $\arg a + \arg c = 2 \arg b$  și  $|a| + |c| = |b|$ . Să se arate că ecuația dată are cel puțin o rădăcină de modul unitar.

**Soluție:**

$$\begin{cases} a = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) & \arg a + \arg c = 2 \arg b \Rightarrow t_1 + t_3 = 2t_2 \\ b = r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) & \text{și } |a| + |c| = |b| \Rightarrow r_1 + r_3 = r_2 \\ c = r_3(\cos t_3 + i \sin t_3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm \sqrt{r_2^2(\cos 2t_2 + i \sin 2t_2) - 4r_1r_3(\cos(t_1 + t_3) + i \sin(t_1 + t_3))}}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} = \\ &= \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm \sqrt{(\cos 2t_2 + i \sin 2t_2)(r_2^2 - 4r_1r_3)}}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dar } r_1 + r_3 = r_2 \Rightarrow r_2^2 &= r_1^2 + r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3 \Rightarrow r_2^2 - 4r_1r_3 = r_1^2 + r_1^2 + r_3^2 + 2r_1r_3 - 4r_1r_3 = \\ &= (r_1 - r_3)^2 \end{aligned}$$

Deci:

$$z_{1,2} = \frac{-r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) \pm (\cos t_2 + i \sin t_2)(r_1 - r_3)}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)}$$

Observăm în:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(\cos t_2 + i \sin t_2)(-2r_1)}{2r_1(\cos t_1 + i \sin t_1)} = -[\cos(t_2 - t_1) + i \sin(t_2 - t_1)] = \cos[\pi + (t_2 - t_1)] + \\ &+ i \sin[\pi + t_2 - t_1] \text{ și } |z_2| = 1. \end{aligned}$$

5) Fie  $z_1, z_2, z_3$  trei numere complexe nenule, a.i.  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ .

- Să se demonstreze că  $(\exists)$  numere complexe  $\alpha$  și  $\beta$  a.i.  $z_2 = \alpha z_1, z_3 = \beta z_2$  și  $|\alpha| = |\beta| = 1$
- Să se rezolve ecuația  $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha \cdot \beta - \alpha - \beta + 1 = 0$  în raport cu una dintre necunoscute.
- Folosind eventual rezultatele de la a) și b) să se demonstreze că dacă  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$ , atunci avem  $z_1 = z_2 = z_3$  sau numerele  $z_1, z_2$  și  $z_3$  sunt afixele vîrfurilor unui  $\Delta$  echilateral.

**Soluție:**

a) Fie

$$\begin{cases} z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1) \\ z_2 = r(\cos t_2 + i \sin t_2), \\ z_3 = r(\cos t_3 + i \sin t_3) \end{cases} \quad r \neq 0$$

$$\text{Fie } \alpha = r_4(\cos t_4 + i \sin t_4)$$

$$\beta = r_5(\cos t_5 + i \sin t_5)$$

$$z_2 = \alpha z_1 \Rightarrow r(\cos t_2 + i \sin t_2) = r \cdot r_4[\cos(t_1 + t_4) + i \sin(t_1 + t_4)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r \cdot r_4 \\ t_4 + t_1 = t_2 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_4 = 1 \\ t_4 = t_2 - t_1 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ t_4 = t_2 - t_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Deci  $\alpha$  este determinat.

$$z_3 = \beta z_1 \Rightarrow r(\cos t_3 + i \sin t_3) = r \cdot r_5[\cos(t_1 + t_5) + i \sin(t_1 + t_5)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = r \cdot r_5 \\ t_5 + t_1 = t_3 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_5 = 1 \\ t_5 = t_3 - t_1 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\beta| = 1 \\ t_5 = t_3 - t_1 + 2k\pi \end{cases}$$

Deci  $\beta$  este determinat.

Dacă se lucrează cu argumente reduse atunci  $t_4 = t_2 - t_1$  sau  $t_4 = t_2 - t_1 + 2\pi$ , la fel  $t_5$ .

$$\text{b) } \alpha^2 + \alpha(-\beta - 1) + \beta^2 - \beta + 1 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\beta + 1 \pm \sqrt{\beta^2 + 2\beta + 1 - 4\beta^2 + 4\beta - 4}}{2} = \frac{\beta + 1 \pm \sqrt{-3\beta^2 + 6\beta - 3}}{2} = \frac{\beta + 1 + i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\beta + i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta - i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$$

Conform a) ( $\exists$ ) numerele complexe de modul 1,  $\alpha$  și  $\beta$  a.i.  $z_2 = \alpha z_1$  și  $z_3 = \beta z_1$

Înlocuind în relația dată obținem:

$$z_1^2 + \alpha^2 z_1^2 + \beta^2 z_1^2 = \alpha z_1^2 + \alpha \beta z_1^2 + \beta z_1^2 = \begin{cases} \Rightarrow 1 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha - \beta - \alpha \cdot \beta = 0 \\ z_1 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = 1$  și  $\beta = 1$  verifică această egalitate, deci în acest caz  $z_2 = z_3 = z_1$

Conform pct. b)  $\alpha_1 = \frac{\beta + i(\beta - 1)\sqrt{3}}{2}$ , unde  $\beta = x + iy$  cu  $|\beta| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{x + iy + 1 + i(x + iy - 1)\sqrt{3}}{2} = \frac{(x + 1 - y\sqrt{3}) + i(y + x\sqrt{3} - \sqrt{3})}{2} \left. \vphantom{\alpha} \right\} \Rightarrow |\alpha| = 1$$

$$\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{\left(\frac{x + 1 - y\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + x\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - x + 1 + y\sqrt{3}} = 1$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - x - y\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - x - y\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - y\sqrt{3} \\ y(2y - \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha^2 + 1 - \alpha - 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Soluția observată inițial ne conduce la  $z_1 = z_2 = z_3$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ și } dă \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Înlocuind: } 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + \alpha^2 - \alpha - \alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - \alpha(1 + \sqrt{3}i) + 2(1 - \sqrt{3}i) = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \pm 3\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}i}}{4} = \frac{(1 + \sqrt{3}i) \pm 3(1 + \sqrt{3}i)}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{4}, \quad |\alpha| = 2 \text{ nu îndeplinește condiția } |\alpha| = 1$$

$$\text{dar } \alpha_2 = \frac{-2(1 + \sqrt{3}i)}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad |\alpha| = 1$$

deci

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \\ \beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Dacă  $z_1 = r(\cos t_1 + i \sin t_1)$ , atunci  $z_2 = \alpha z_1 = r \cdot \left[ \cos \left(t_1 + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin \left(t_1 + \frac{4\pi}{3}\right) \right]$  și

atunci  $z_3 = \beta z_2 = r \cdot \left[ \cos \left(t_1 + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(t_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$ .

Dacă  $M_1(t_1), M_2(t_2), M_3(t_3)$  se află pe cercul de rază  $r$  și argumentele fiind  $t_1, t_1 + \frac{2\pi}{3}$ ,

$t_1 + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$  ele sunt vîrfurile unui triunghi echilateral.

## GEOMETRIE SPAȚIALĂ

1) Să se arate că dacă o dreaptă  $d$  nu este conținută în planul  $\alpha$  atunci  $d \cap \alpha$  este  $\emptyset$  sau este formată dintr-un singur punct.

**Soluție:**

Presupunem că  $d \cap \alpha = \{A, B\} \Rightarrow d \subset \alpha$ , contrazice ipoteza  $\Rightarrow d \cap \alpha = \{A\}$  sau  $d \cap \alpha = \emptyset$ .

2) Să se arate că  $(\forall)\alpha, (\exists)$  cel puțin un punct nesituat în  $\alpha$ .

**Soluție:**

Presupunem că toate punctele al aparține planului  $\alpha \Rightarrow (\forall)A$  pentru puncte nesituate în același plan. Fals contrazice, A.1.3.

3) Există două drepte fără punct comun:

**Soluție:**

Conform A.1.3  $(\exists) A, B, C, D$  nesituate în același plan. Presupunem că  $AB \cap CD = \{O\} \Rightarrow AB$  și  $CD$  sunt conținute în același plan și deci  $A, B, C, D$  sunt în același plan. Fals, contrazice ipoteza  $\Rightarrow AB \cap CD = \emptyset \Rightarrow (\exists)$  drepte fără punct comun.

4) Să se arate că fiind dată o dreaptă oarecare  $d$   $(\exists)$  cel puțin două plane care conțin dreapta  $d$ .

**Soluție:**

$(\exists)A \notin d$  (dacă toate punctele ar  $\in d$  ar fi negată existență planului și a spațiului). Fie  $\alpha = (dA), (\exists)B \notin \alpha$  (altfel n-ar exista spațiul). Fie  $\beta = (Bd), \alpha \neq \beta$  și ambele conțin dreapta  $d$ .

5) Se consideră dreptele  $d, d', d''$  a.i. luate două câte două să se intersecteze. Să se arate că atunci cele 3 drepte au un punct comun sau sunt așezate în același plan.

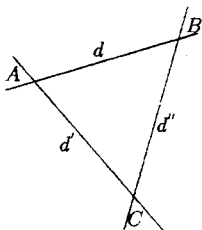
**Soluție:**

Se arată că

$$d \neq d' \neq d'' \neq d.$$

$$\text{Fie } d \cap d' = \{A\} \Rightarrow \alpha = (d, d') \Rightarrow \begin{cases} d \subset \alpha \\ d'' \subset \alpha \end{cases}$$

$$d \cap d' = \{B\} \Rightarrow \begin{cases} B \in d \\ B \neq A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \in \alpha \\ d \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow B \in \alpha \text{ și } B \in d''$$



$$d'' \cap d' = \{C\} \Rightarrow \begin{cases} C \in d'' \\ C \neq B \\ c \neq A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \in \alpha \\ d'' \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \in \alpha \text{ și } C \in d'' \Rightarrow d = d'' \\ \text{sau} \\ d = d'' \end{cases}$$

$\Rightarrow d'' \subset \alpha$  deci dreptele sunt așezate în același plan  $\alpha$ .

$$\left. \begin{aligned} \text{Dacă } d \cap d' = \{A\} &\Rightarrow A \in d' \\ d'' \cap d = \{A\} &\Rightarrow A \in d'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow d' \cap d'' = \{A\}$$

și cele 3 drepte au un punct comun.

6) Fie  $A, B, C$  trei puncte necoliniare și  $\Delta$  un punct situat în planul  $(ABC)$ . Să se arate:

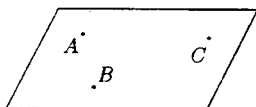
- Punctele  $D, A, B$  nu sunt coliniare și nici  $D, B, C; D, C, A$
- intersecția planelor  $(DAB), (DBC), (DCA)$  este formată dintr-un singur punct.

**Soluție:**

$D$

a)  $D \notin (ABC)$

Presupunem că  $D, A, B$  coliniare  $\Rightarrow (\exists)d$



$$\left. \begin{aligned} \text{a.i. } D \in d, A \in d \text{ și } B \in d \\ A \in (ABC), B \in (ABC) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{T_2} d \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC) - \text{fals}$$

Deci punctele  $D, A, B$  nu sunt coliniare.

b) Fie  $(DAB) \cap (DBC) \cap (DCA) = E$ .

Cum planele sunt distincte, intersecțiile lor sunt:

$$\left. \begin{aligned} (DAB) \cap (DBC) &= DB \\ (DAB) \cap (DCA) &= DA \\ (DBC) \cap (DCA) &= DC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \text{Dacă } (DAB) &= (DBC) \\ \Rightarrow A, B, C, D &\text{ coplanare, contrar ipotezei.} \end{aligned}$$

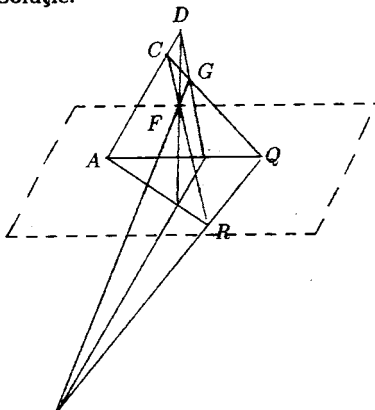
$$\text{Presupunem că } (\exists)M \in E, M \neq D \Rightarrow \left. \begin{aligned} M \in DB \\ M \in DA \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} B \in MD \\ A \in MD \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A, B, D$  sunt coliniare (fals contrar punctului a))

Deci mulțimea  $E$  are un singur punct  $E = \{D\}$ .

7) Folosind notațiile ex. 6, se iau punctele  $E, F, G$  distincte de  $A, B, C, D$ , a.î.  $E \in AD$ ,  $F \in BD$ ,  $G \in CD$ . Fie  $BC \cap FG = \{P\}$ ,  $GE \cap CA = \{Q\}$ ,  $EF \cap AB = \{R\}$ . Să se arate că  $P, Q, R$  sunt coliniare (T. Desarques).

**Soluție:**



Am arătat la 6 că dacă  $D \notin (ABC)$ ,

$(DAB) \neq (DBC)$

Arătăm că  $E, F, G$  nu sunt coliniare. Presupunem contrarul. Atunci

$$\left. \begin{array}{l} G \in EF \\ EF \subset (DAB) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G \in (DAB) \\ G \in (DBC) \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow (DAB) = (DBC)$$

Având trei puncte comune  $D, B$  și  $G \Rightarrow$  fals.

Deci  $E, F, G$  nu sunt coliniare și determină un plan  $(EFG)$

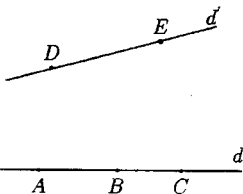
$$\left. \begin{array}{l} P \in BC \Rightarrow P \in (ABC) \\ P \in FG \Rightarrow P \in (EFG) \\ R \in AB \Rightarrow R \in (ABC) \\ R \in EF \Rightarrow R \in (EFG) \\ Q \in CA \Rightarrow Q \in (ABC) \\ Q \in GE \Rightarrow Q \in (EFG) \end{array} \right\} P, Q, R \in (ABC) \cap (EFG) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P, Q, R$  sunt coliniare pentru că  $\in$  dreptei de intersecție a celor 2 plane.

8) Se consideră drepte  $d$  și  $d'$  nesituate în același plan și punctele distincte  $A, B, C \in d$  și  $D, E \in d'$ . Cite plane diferite putem duce a.î. fiecare să conțină 3 pct. necoliniare dintre punctele date? Generalizare.



**Soluție:**



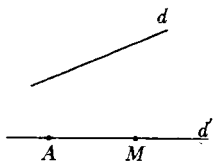
Planele sunt  $(A, d')$ ;  $(B, d')$ ;  $(C, d')$ .

**Generalizare:**

Numărul planelor corespunde cu numărul punctelor de pe dreapta  $d$  deoarece  $d'$  conține doar 2 puncte.

9) Arătați că există o infinitate de plane care conțin o dreaptă dată  $d$ .

**Soluție:**



Fie dreapta  $d$  dată și  $A$  un punct oarecare a.i.  $A \notin d$ .

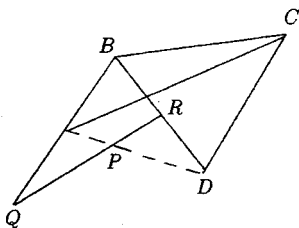
Obținem planul  $\alpha = (A, d)$  și fie  $M \notin \alpha$ . Dreapta  $d' = AM$ ,  $d' \not\subset \alpha$  nu este conținută deci în același plan cu  $d$ . Planurile căutate sunt cele de forma  $(Md)$ ,  $M \in d'$ , deci o infinitate de plane.

10) Se consideră punctele  $A, B, C, D$ , nesituate într-un plan.

a) Câte dintre dreptele  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  pot fi intersectate de o dreaptă care nu trece prin  $A, B, C, D$ ?

b) dar de un plan ce nu trece prin  $A, B, C, D$ ?

**Soluție:**



( $\forall$ ) 3 puncte determină un plan. Fie planul  $(ABD)$ . În acest plan alegem  $P \in |AD|$  și  $Q \in AB$  a.i.  $A \in |BQ|$ , atunci dreapta  $PQ$  separă punctele  $A$  și  $D$  și nu separă pe  $A$  și  $B$ , deci separă pe  $P$  și  $D \Rightarrow PQ \cap |BD| = R$ , unde  $R \in |BD|$ .

Dreapta  $PQ$  întâlnește deci 3 dintre dreptele date. Să vedem dacă poate întâlni mai multe.

$$\text{Presupunem că } PQ \cap BC = \{E\} \Rightarrow E \in PQ \subset (ABD) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E \in (ABD) \\ E \in BC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

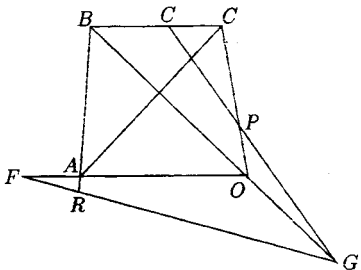
are două punctele comune cu planul.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B \in (ABD) \\ B \in BQ \end{array} \right. \Rightarrow BC \subset (ABD) \Rightarrow A, B, C, D \text{ coplanare - fals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Deci } BC \cap (ABD) = \{E\} \\ BC \cap (ABD) = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow E = B \Rightarrow B \in PQ, \text{ fals.}$$

La fel se arată că  $PQ$  nu taie  $AC$  sau  $DC$ , deci o dreaptă întâlnește cel mult trei dintre dreptele date.

b)



Se consideră punctele  $E, F, G$  a.i.  $E \in |BC|, A \in |DF|, D \in |BG|$ . Aceste punctele determină planul  $(EFG)$  care taie evident dreptele  $BC, BD$  și  $BD$ .  $FG$  nu separă pe  $A$  și  $D$  și nici pe  $BD \Rightarrow$  nu separă nici pe  $A$  și  $B \Rightarrow A \in |BR|$ . Să arătăm că  $(EFG)$  întâlnește și dreptele  $AB, CD, AC$ . În planul  $(ABD)$  considerăm triunghiul  $FDG$  și dreapta  $AB$ .

Cum această dreaptă taie latura  $|FD|$  dar nu taie  $|DG|$ , trebuie să taie latura  $|FG|$  deci  $AB \cap |FG| = \{R\} \Rightarrow R \in |FG| \subset (EFG)$  deci  $AB \cap (EFG) = \{R\}$ . În planul  $(BCD)$  dreapta  $EG$  taie  $|BC|$  și nu taie  $|BD|$ , deci  $EG$  taie latura  $|CD|$ ,  $EG \cap |CD| = \{P\} \Rightarrow P \in EG \subset (EFG) \Rightarrow CD \cap (EFG) = \{P\}$ .

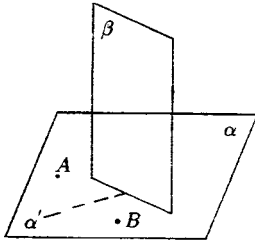
$$\left. \begin{array}{l} R \in (EFG), R \text{ nu separă } A \text{ și } B \\ E \text{ separă } B \text{ și } C \end{array} \right\} \Rightarrow R \in \cap |AC| = Q$$

$$\Rightarrow Q \in RE \Rightarrow Q \in (EFG) \Rightarrow (EFG) \cap AC = \{Q\}.$$

11) Se dau punctele  $\alpha$  și  $\beta$ ,  $A, B \in \alpha$ . Să se construiască un punct  $M \in \alpha$  egal depărtat de  $A$  și  $B$ , care să  $\in$  și planului.  $\beta$ .

**Soluție:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Presupunem problema rezolvată:} \\ \text{Dacă } M \in \alpha \\ M \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$$



Cum  $\|MA\| = \|MB\| \Rightarrow M \in$  mediatoarei seg.  $[AB]$ .

Deci pentru găsirea lui  $M$  se procedează astfel:

- 1) Se caută dreapta de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$ ,  $d$ . Dacă  $\alpha \parallel \beta$  problema nu are soluții.
- 2) În planul  $\alpha$  se construiește mediatoarea  $d'$  a segmentului  $[AB]$ .
- 3) Se caută punctul de intersecție al dreptelor  $d$  și  $d'$ . Dacă  $d \parallel d'$  problema nu are soluții.

12) Să se determine intersecția a trei plane distincte  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Soluție:**

Dacă  $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$ . Dacă  $\alpha \cap \beta = d$ , intersecția căutată este  $d \cap \gamma$ , care poate fi un punct (cele 3 plane sunt concurente), mulțimea vidă (dreapta de intersecție a două plane este  $\parallel$  cu al treilea) sau dreapta  $d$  (cele 3 plane trec prin  $d$ , sunt secante).

13) Se dau: planul  $\alpha$ , dreptele  $d_1, d_2$  și punctele  $A, B \notin \alpha \cup d_1 \cup d_2$ . Să se afle un punct  $M \in \alpha$  a.f. dreptele  $MA, MB$  să intersecteze respectiv pe  $d_1$  și  $d_2$ .

**Soluție:**

Pentru determinarea lui  $M$  se procedează astfel:

1) Se construiește planul  $(Ad_1)$  și se caută dreapta de intersecție cu  $\alpha, d_1'$ . Dacă  $d_1' \parallel \alpha$ , ( $\bar{\exists}$ ) nici  $M$ .

2) Se construiește planul  $(Bd_2)$  și se caută dreapta de intersecție cu  $\alpha, d_2'$ .

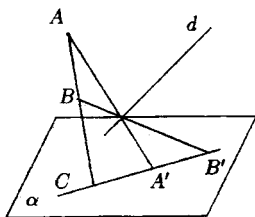
Dacă  $d_2'$  nu există, nu există nici  $M$ .

3) Se caută punctul de intersecție al dreptelor  $d_1'$  și  $d_2'$ . Problema are o singură soluție, dacă dreptele sunt concurente, o infinitate, dacă coincid, și nici una, dacă sunt paralele.

14) Se dau planul  $\alpha$ , dreapta  $d \notin \alpha$ , punctele  $A, B \notin \alpha \cup d$  și  $C \in \alpha$ . Fie  $M \in d$  și  $A', B'$  punctele de intersecție ale dreptelor  $MA, MB$  cu planul  $\alpha$  (dacă ele există).

Să se determine punctul  $M$  a.i. punctele  $C, A', B'$  să fie coliniare.

**Soluție:**



Presupunem problema rezolvată.

a) Presupunem întâi că  $A, B, C$  sânt coliniare. Cum  $AA'$  și  $BB'$  sânt drepte concurente, ele determină un plan  $\beta$  care intersectează pe  $\alpha$  după dreapta  $A'B'$ .

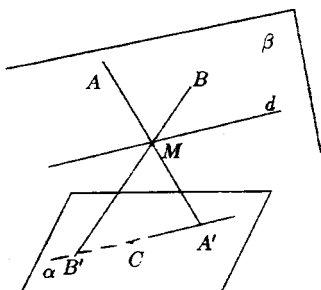
$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } C \in AB \Rightarrow C \in \beta \\ \text{dar } C \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow C \in \alpha \cup \beta \Rightarrow C \in A'B'$$

și punctele  $C, A, B'$  sunt coliniare ( $\forall$ )  $M \in d$ .

b) Presupunem că  $A, B, C$  nu sunt coliniare.

Observăm că:  $(AA', BB') = \beta$  (plan determinat de 2 drepte concurente).

$\beta \cup \alpha = d'$  și  $C \in d'$



Pentru determinarea lui  $M$  procedăm astfel:

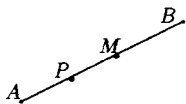
- 1) Determinăm planul  $(ABC)$
- 2) Cautăm unctul de intersecție al acestui plan cu dreapta  $d$ , deci  $d \cap (ABC) = \{M\}$  este punctul dorit.

Atunci  $(ABC) \cap \alpha = d'$

$$\left. \begin{array}{l} AM \cap \alpha = \{A'\} \\ BM \cap \beta = \{B'\} \\ C \in \{A'\} \\ C \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A'B \in d' \\ C \in d' \end{array} \right\} \Rightarrow A', B', C' \text{ sunt coliniare.}$$

15) Dacă punctele  $A$  și  $B$  unui semispațiu deschis  $\sigma$ , atunci  $[AB] \subset \sigma$ . Proprietatea este aderentă și dentru un semispațiu închis.

**Soluție:**



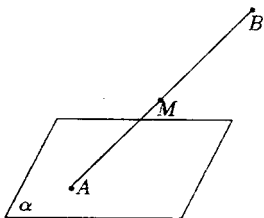
$A \in \sigma$  și  $B \in \sigma \Rightarrow [AB] \cap \alpha \neq \emptyset$ .

Fie  $\sigma = |\alpha A = |\alpha B$ .

Fie  $M \in [AB]$  și trebuie arătat că  $M \in \sigma (\forall) M$  în interiorul segmentului.

Presupunem contrariul că  $M \notin \sigma \Rightarrow (\exists) P$  a.i.  $[AM] \cap d = \{P\} \Rightarrow P \in [AM] \Rightarrow P \in [AB] \Rightarrow [AB] \cap \alpha \neq \emptyset$  fals.

$P \in \alpha$ , deci  $M \in \sigma$ . Proprietatea se păstrează și în cazul semispațiului închis. Față de cazul anterior mai poate apărea cazul în care unul din punctele  $A$  și  $B \in \alpha$ , sau când amândouă aparțin lui  $\alpha$ .



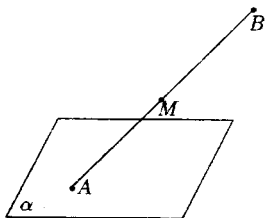
Dacă  $A \in \alpha, B \in \sigma, [AB] \cap \alpha \neq \emptyset$  și se arată ca mai sus că:

$$\left. \begin{array}{l} [AB] \subset \sigma \\ A \in \alpha \\ B \in \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow [AB] \subset \sigma \cup \alpha$$

Dacă  $A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha \Rightarrow [AB] \subset \alpha \Rightarrow [AB] \subset \alpha \cup \sigma$ .

16) Dacă punctul  $A$  nu este situat în planul  $\alpha$  și  $B \in \alpha$  atunci  $|BA \subset |\alpha A$ .

**Soluție:**



Fie  $M \in |BA \Rightarrow B \notin [MA] \Rightarrow [MA] \cap \alpha = \emptyset$

$\Rightarrow M \in |\alpha A$

Deci  $|BA \subset |\alpha A$

17) Să se arate că intersecția unei drepte  $d$  cu un semispațiu este fie dreapta  $d$ , fie o semidreaptă, fie mulțimea vidă.

**Soluție:**

Fie  $\alpha$  un plan și  $\sigma_1, \sigma_2$  cele 2 semispații pe care le determină. Considerăm semispațiul  $\sigma_1$ .

$$d \cap \alpha = \emptyset$$

$$1) d \cap \sigma_1 = \emptyset$$

$$2) d \cap \sigma_1 \neq \emptyset, \text{ fie } A \in d \cap \sigma_1 \Rightarrow \begin{cases} A \in \sigma_1 \\ A \in d \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in d \Rightarrow [AM] \subset d \\ d \cap \alpha = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} [AM] \cap \alpha = \emptyset \\ A \in \sigma_1 \end{cases} \Rightarrow M \in \sigma_1, (\forall) M \in d \Rightarrow d \subset \sigma_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow d \cap \sigma_1 = d$$

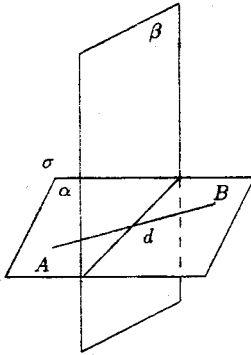
3)  $d \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow d \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow P$  determina pe  $d$  două semidrepte,  $|PA$  și  $|PB$  unde

$$\left. \begin{array}{l} P \in |AB| \\ P \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow |AB| \cap \alpha \neq \emptyset \Rightarrow A \text{ și } B \text{ sunt în semispații diferite.}$$

$$\text{Presupunem } \begin{cases} A \in \sigma_1 \\ P \in \alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{pr.2}} |PA| \subset |\alpha A| \Rightarrow |PA| \subset \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 \cap d = |PA|.$$

18) Arătați că dacă un plan  $\alpha$  și frontiera unui semispațiu  $\sigma$  sunt plane secante, atunci intersecția  $\sigma \cap \alpha$  este un semiplan.

Soluție:



Fie  $\sigma$  un semispațiu deschis și  $p$  frontiera sa și fie  $d = \alpha \cap \beta$ .

Alegem punctele  $A$  și  $B \in \alpha - d$ , de o parte și de alta a dreptei  $d \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} [AB] \cap \beta \neq \emptyset \\ d \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow [AB] \cap \beta \neq \emptyset$$

$\Rightarrow A, B$  sunt de o parte și de alta a lui  $\beta$ , adică numai una din ele se află în  $\sigma$ .

Presupunem  $A \in \sigma \Rightarrow B \in \sigma$ . Demonstrăm acum  $\alpha \cap \sigma = |dA$

$$1) \alpha \cap \sigma \subset |dA$$

$$\text{Fie } M \in \alpha \cap \sigma \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \in \alpha, M \in \sigma \\ A \in \sigma, B \notin \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow [MB] \cap B \neq \emptyset \left. \begin{array}{l} M \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$[MB] \cap d \neq \emptyset \Rightarrow M$  și  $B$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $d \Rightarrow M$  este de aceeași parte a dreptei  $d$  cu  $A \Rightarrow M \in |dA$

$$\Rightarrow M \in |dA \Rightarrow [MA] \cap d = \emptyset \left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = d \\ [MA] \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow [MA] \cap B = \emptyset \Rightarrow M \in |\beta A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \in \sigma \\ M \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M \in \alpha \cap \sigma$  deci  $|dA \subset \alpha \cap \sigma$ .

19) Intersecția unui plan  $\alpha$  cu un semispațiu este fie planul  $\alpha$ , fie un semiplan, fie mulțimea vidă.

**Soluție:**

Fie  $\sigma$  semispațiul considerat și  $\beta$  frontiera sa. Sînt posibile mai multe cazuri:

1)  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , în acest caz se poate ca:

a)  $\alpha \cap \sigma = \emptyset$

b)  $\alpha \subset \sigma \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) A \in \alpha \cap \sigma \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A \in \alpha \\ A \in \sigma \end{array} \right\}$

$$\text{Fie } M \in \alpha \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [MA] \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [MA] \cap \beta = \emptyset \\ A \in \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow M \in \sigma, (\forall) M \in \alpha \Rightarrow \alpha \subset \sigma \Rightarrow \alpha \cap \sigma = \alpha$$

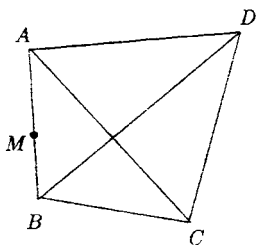
2)  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d \Rightarrow \alpha \cap \sigma$  este un semiplan conform problemei anterioare 4.

20) Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare în  $\alpha$  un plan care nu trece prin unul din punctele date, dar trece printr-un punct al dreptei  $|AB|$ . Dintre segmentele  $|AB|, |AC|, |AD|, |BC|, |BD|, |CD|$ . Cite pot fi intersectate de planul  $\alpha$ ?

**Soluție:**

Intersecția a două plane este o dreaptă, iar dreapta taie doar două laturi ale unui triunghiuri:

Sînt posibile mai multe cazuri:



1)  $d$  taie  $|AB|$  și  $|BC|$

$d'$  taie  $|AB|$  și  $|AD|$ ,  $\alpha$  taie pe  $|AD|$  are deci un punct cu  $(ADC)$  și fie  $(ADC) \cap \alpha = d''$

$d''$  taie  $|AD|$  și nu taie  $|AC| \Rightarrow d''$  taie  $|DC|$

$\alpha$  taie  $|DC|$  și  $|BC| \Rightarrow$  nu taie  $|BD|$ . În acest caz  $\alpha$  taie 4 din cele 6 segmente (cele subliniate).

2)  $d$  taie  $|AB|$  și  $|AC|$ , nu taie  $|BD|$

$d'$  taie  $|AB|$  și  $|AD|$ , nu taie  $|BD|$

$d''$  taie  $|AD|$  și  $|AC|$ , nu taie  $|DC|$

$\Rightarrow \alpha$  nu intersectează planul  $(BDC)$ . În acest caz  $\alpha$  intersectează numai 3 din cele 6 segmente.

3)  $d$  taie  $|AB|$  și  $|BC|$ , nu taie  $|AC|$

$d'$  taie  $|AB|$  și  $|BD|$ , nu taie  $|DC|$

$\alpha$  intersectează  $|BD|$  și  $|BC|$ , deci nu taie  $|DC|$

În  $\triangle BDC \Rightarrow \alpha$  nu intersectează planul  $(ADC)$

În acest caz  $\alpha$  intersectează numai trei segmente.

4)  $d$  taie  $|AB|$  și  $|AC|$ , nu taie  $|BC|$

$d'$  taie  $|AB|$  și  $|BD|$ , nu taie  $|AD|$

$d''$  taie  $|AC|$  și  $|DC|$

În triunghiul  $BDC$   $\alpha$  nu taie  $|BC|$ . Deci  $\alpha$  intersectează 4 sau 3 segmente.

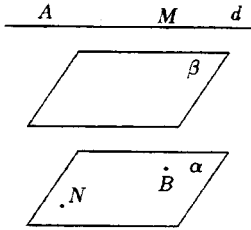
21) Fie  $d$  o dreaptă și  $\alpha, \beta$  două plane a.i.  $d \cap \beta = \emptyset$  și  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ . Să se arate că dacă  $A \in d$  și  $B \in \alpha$ , atunci  $d \subset |\beta A|$  și  $\alpha \subset |\beta B|$ .

**Soluție:**

$$d \cap \beta = \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } M \in d \\ A \in d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [AM] \subset d \\ d \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow [AM] \cap \beta = \emptyset$$





$$\Rightarrow M \in |\beta A, (\forall) M \in d \Rightarrow d \subset |\beta A$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } N \in \alpha \\ B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} [NB] \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow [NB] \cap \beta = \emptyset$$

$$\alpha \subset |\beta B.$$

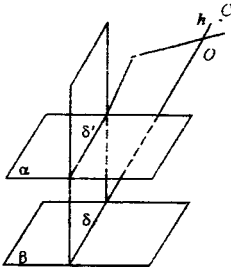
22) Fie  $|\alpha A$  și  $|\beta B$  două semispații a.f.  $\alpha \neq \beta$  și  $|\alpha A \subset |\beta B$  sau  $|\alpha A \cap |\beta B = \emptyset$ . Să se arate că  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

**Soluție:**

1) Presupunem întâi că  $\alpha \neq \beta$  și  $|\alpha A \subset |\beta B$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } A \in |\alpha A \\ |\alpha A \subset |\beta B \end{array} \right\} \Rightarrow A \in |\beta B \Rightarrow |\beta B = |\beta A$$

Atunci ipoteza se mai poate scrie  $\alpha \neq \beta$  și  $|\alpha A \subset |\beta A$ . Să arătăm că  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ . Prin reducere la absurd presupunem că  $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) d = \alpha \cap \beta$  și fie  $O \in d$ , deci  $O \in \alpha$  și  $O \in \beta$ . Ducem prin  $A$  și  $O$  un plan  $r$  și a.f.  $d \in r$ , deci cele trei plane  $\alpha, \beta$  și  $r$  să nu treacă prin această dreaptă. Întrucât  $r$  are punctul  $O$  comun și cu  $\alpha$  și cu  $\beta$ , va intersecta aceste plane.



$$\left. \begin{array}{l} r \cap \alpha = \delta' \\ r \cap \beta = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \cap \delta' = O \text{ care este un punct comun}$$

celor 3 plane. Dreptele  $\delta$  și  $\delta'$  determină 4 unghiuri în planul  $r$  avînd  $O$  ca vîrf comun,  $A \in \text{int. unuia dintre ele}$ , fie  $A \in \text{int. } \widehat{hk}$ . Considerăm  $C \in \text{int. } \widehat{hk}$ .

Atunci  $C$  este de aceeași parte cu  $A$  față de  $\delta'$ , deci  $C$  este de aceeași parte cu  $A$  față de  $\alpha \Rightarrow C \in |\alpha A$ .

Dar  $C$  este de partea opusă lui  $A$  față de  $\delta$ , deci  $C$  este de partea opusă lui  $A$  față de  $\beta \Rightarrow C \notin |\beta A$ . Deci  $|\alpha A \not\subset |\beta A$  - fals - contrazice ipoteza  $\Rightarrow$  Deci  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

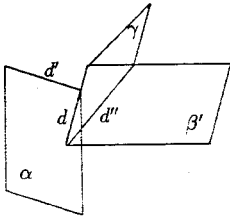
23) Să se arate că intersecția unui unghi diedru cu un plan  $\alpha$  poate fi: un unghi drept, reuniunea a două drepte, o dreaptă, mulțimea vidă sau un semiplan închis și nu poate fi nici o

mulțime de alt tip.

**Soluție:**

Fie  $d$  muchia unghiului diedru dat. Poziția unei drepte față de un plan se pot distinge următoarele situații:

1)  $d \cap \alpha = \{O\}$

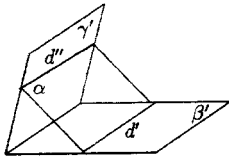


$d \cap \alpha = \{O\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in d \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in \gamma \\ O \in \beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma' \cap \alpha = d' \\ \beta' \cap \alpha = d'' \end{cases}$$

Semidreapta cu originea în  $O$ , deci  $\alpha \subset \widehat{\beta'\gamma'} = \widehat{d'd''}$  deci un unghi.

2)  $d \cap \alpha = \emptyset$

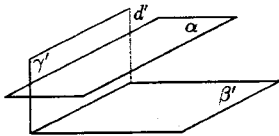


$$\left. \begin{array}{l} a) \alpha \cap \beta' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta = d' \\ \alpha \cap \gamma' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma' = d'' \end{array} \right\} \Rightarrow d' \parallel d''$$

Într-adevăr, dacă am presupune că  $d' \cap d'' \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) O \in d' \cap d''$

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in d' \\ O \in d'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in \beta' \\ O \in \gamma' \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O \in d \\ O \in \alpha \end{cases} \Rightarrow O \in d \cap \alpha, \text{ fals - contrazice ipoteza.}$$

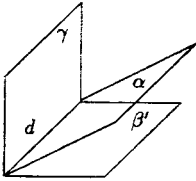
b)  $\begin{cases} \alpha \cap \beta' = d' \\ \alpha \cap \gamma' = \emptyset \end{cases}$  sau  $\begin{cases} \alpha \cap \beta' = \emptyset \\ \alpha \cap \gamma' = d'' \end{cases} \Rightarrow$  în acest caz  $\alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = d''$  - o dreaptă.



c)  $\begin{cases} \alpha \cap \beta' = \emptyset \\ \alpha \cap \gamma' = \emptyset \end{cases} \left. \right\} \text{atunci } \alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = \emptyset$

3)  $d \cap \alpha = d$

a)



$d \cap \alpha = d$  dar  $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma$

$\alpha \cap \widehat{\beta'\gamma'} = d$  deci intersecția este o dreaptă.

b)  $\alpha = \beta$  sau  $\alpha = \gamma$ .

Atunci intersecția este un semiplan închis.

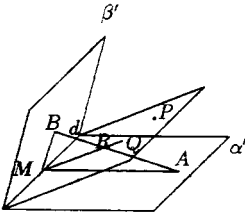
24) Fie  $d$  muchia unui diedru propriu  $\widehat{\alpha'\beta'}$ ,  $A \in \alpha' - d$ ,  $B \in \beta' - d$  și  $P \in \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'}$ .

Să se arate că:

1)  $(Pd) \cap \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = |dP$ .

2) Dacă  $M \in d$ ,  $\text{int. } \widehat{AMB} = \text{int. } \alpha'\beta' \cap (ABM)$ .

Soluție:



1)  $\text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = |\alpha B \cap |\beta A$

$P \in \text{int. } \alpha'\beta' \Rightarrow P \in \alpha B$

$P \in |\beta A$

$\alpha \cap (Pd) = d \xrightarrow{\text{pr.4}} (Pd) \cap (\alpha B)$  este semiplan  $P \in |\alpha B$

$\Rightarrow (Pd) \cap |\alpha B = dP \quad (*)$

$$\left. \begin{array}{l} (Pd) \cap \beta = d \Rightarrow (Pd) \cap |\beta A \text{ este semiplan} \\ P \in |\beta A \end{array} \right\} \Rightarrow (Pd) \cap |\beta A = |dP \quad (**)$$

Din (\*) și (\*\*)  $\Rightarrow (Pd) \cap |\alpha B \cap |\beta A = |dP \Rightarrow (Pd) \cap \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = |dP$

2)  $(ABM) \cap \alpha = AM$  deci sînt plane secante  $\xrightarrow{\text{pr.4}} (AMB) \cap \beta A = |MB_1A$

$(AMB) \cap \text{int. } \widehat{\alpha'\beta'} = (AMB) \cap |\alpha B \cap |\beta A = \{(AMB) \cap |\alpha B\} \cap \{(AMB) \cap |\beta A\} = |MB_1A \cap |MA_1B = \text{int. } \widehat{AMB}$ .

25) Se consideră notațiile din problema precedentă. Să se arate că:

- 1) punctele  $A$  și  $B$  sînt de o parte și de alta a planului  $(dP)$ ;  
 2) segmentul  $|AB|$  și semiplanul  $|dP$  au un punct comun.

**Soluție:**

$$\left. \begin{array}{l} M \in d \Rightarrow M \in dP \\ M \in (ABM) \end{array} \right\} \Rightarrow (AMB) \cap (dP) = d' \text{ și } M \in d'$$

$$\left. \begin{array}{l} d' \subset (dP) \\ d' \cap d = M \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |dP \cap d' = |MQ \\ \text{unde } Q \in |dP \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |MQ \subset |dP \subset \text{int.} \widehat{\alpha' \beta'} \\ |MQ \subset d' \subset (AMB) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

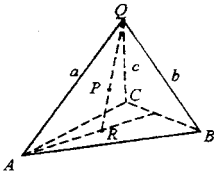
$$\Rightarrow |MQ \subset \text{int.} (\widehat{\alpha' \beta'}) \cap (ABM) \Rightarrow |MQ \subset \text{int.} \widehat{AMB} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |MQ \subset |AB| = \{R\} \\ |MQ \subset |dP \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |dP \cap |AB| = \{R\} \text{ și cum } |dP \subset (dP) \text{ avem } (dP) \cap |AB| = \{R\}$$

$\Rightarrow$  punctele  $A$  și  $B$  sînt de o parte și de alta a lui  $(dP)$

26) Dacă  $\widehat{abc}$  este un unghi triedru,  $P \in \text{int.} \widehat{abc}$  și  $A, B, C$  sînt puncte pe muchiile  $a, b, c$  diferite de  $O$ , atunci semidreapta  $|OP$  și  $\text{int.} \widehat{ABC}$  au un punct comun.

**Soluție:**



Fie semidreptele  $\alpha' = |OA_1B$ ,  $\beta' = |OA_1C$ ,  $\gamma' = |OA_1P$ .  
 $P$  fiind interior triedrului este interiorul diedrului format din oricare simiplane ce trece prin  $O$  ale triedrului, deci

$$\left. \begin{array}{l} P \in \text{int.} \widehat{\alpha' \beta'} \\ B \in \alpha' \\ C \in \beta' \end{array} \right\} \Rightarrow |BC| \cap \gamma' = \{Q\}$$

Deci  $\left. \begin{array}{l} P \in |OA_1P \\ Q \in |OA_1P = \gamma' \end{array} \right\} \Rightarrow P$  și  $Q$  se află în același semiplan det.  $OA \Rightarrow P$  și  $Q$  sînt de aceeași parte a lui  $OA$  (1).

$P \in \text{int.} \widehat{abc} \Rightarrow P \in |OAC$ ,  $A \Rightarrow P$  și  $A$  sînt de aceeași parte a lui  $(OBC) \cap \gamma' \Rightarrow P$  și  $A$  sînt de aceeași parte a lui  $OQ$  (2).

Din (1) și (2)  $\Rightarrow P \in \text{int.} \widehat{AOQ} \stackrel{\text{T. transv.}}{\Rightarrow} |AQ| \cap |OP| = \{R\} \Rightarrow R \in |AQ|$ ,  $|AQ| \subset \text{int.} \widehat{ABC}$

$\Rightarrow R \in \text{int.}ABC \Rightarrow |OP \cap \text{int.}ABC = \{R\}$ .

27) Să se arate că orice intersecție de mulțimi convexe este mulțime convexă.

**Soluție:**

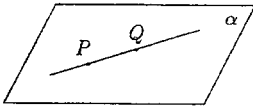
Fie  $M$  și  $M'$  două mulțimi convexe și  $M \cap M'$  intersecția lor. Fie

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} PQ \in M \cap M', P \neq Q \Rightarrow P \in M \cap Q \in M \\ P \in M' \cap Q \in M' \end{array} \right\} \xrightarrow{M, M' \text{ convexe}} \left\{ \begin{array}{l} |PQ| \subset M \\ |PQ| \subset M' \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow |PQ| \subset M \cap M'$  deci intersecția este convexă.

28) Să se arate că următoarele mulțimi sînt convexe plane, semiplanele, orice semispațiu închis sau deschis și interiorul unui unghi diedru.

**Soluție:**



a) Fie  $P, Q \in \alpha$ ;  $P \neq Q \Rightarrow |PQ| = PQ$  (dreapta este mulțime convexă).

$PQ \subset \alpha$ , deci  $|PQ| \subset \alpha$  deci planul este mulțime convexă.

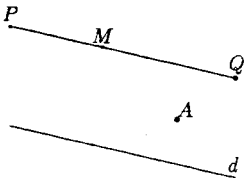
b) **Semiplanele:** Fie  $S = |dA$  și  $P, Q \in S \Rightarrow |PQ| \cap d = \emptyset$ . Fie  $M \in |PQ| \Rightarrow |PM| \subset |PQ| \Rightarrow |PM| \cap d = \emptyset \Rightarrow P$  și  $M$  sînt în același semiplan  $\Rightarrow M \in S$ . Deci  $|PQ| \subset S$  și  $S$  este o mulțime convexă.

Fie  $S' = [dA$ . Sînt trei cazuri:

1)  $P, Q \in dA$  tratat anterior;

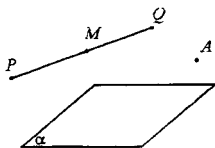
2)  $P, Q \in d \Rightarrow |PQ| \subset d \subset S'$ ;

3)  $P \in d, Q \notin d \Rightarrow |PQ| \subset |dQ| \Rightarrow |PQ| \subset |dA \subset [dA$  deci  $[dA$  este mulțime convexă.



c) **Semispațiile:** Fie  $\sigma = |\alpha A$  și fie  $P, Q \in \sigma \Rightarrow |PQ| \cap \alpha = \emptyset$ .

Fie  $M \in |PQ| \Rightarrow |PM| \subset |PQ| \Rightarrow |PM| \cap \alpha = \emptyset$

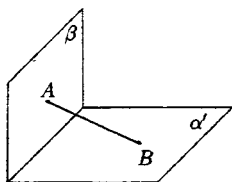


Fie  $\sigma' = |\alpha A$ . Sint trei cazuri:

- 1)  $P, Q \in |\alpha A$  tratat anterior;
- 2)  $P, Q \in \alpha \Rightarrow |PQ| \subset \alpha \subset \sigma'$ ;
- 3)  $P \in \alpha, Q \notin \alpha$

$P, Q \in \sigma' \Rightarrow |PQ| \subset \sigma' \Rightarrow |PQ| \subset \sigma'$  și deci  $\sigma'$  este mulțime convexă.

d) interiorul unui unghi diedru:



int.  $\widehat{\alpha'\beta'}$  =  $|\alpha A| \cap |\beta B$  și cum fiecare semispațiu este mulțime convexă și intersecția lor este mulțimea convexă.

29) Poate fi un unghi diedru o mulțime convexă?

**Soluție:**

Nu. Unghiul diedru nu este o mulțime convexă, întrucât dacă luăm ca în desenul anterior  $A \in \beta'$  și  $B \in \alpha'$ .

$(\forall) P \in \text{int.}\widehat{\alpha'\beta'}, |dP| \cap |AB| \neq \emptyset$

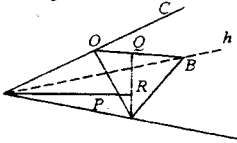
$\Rightarrow (\exists) M \in |AB| \text{ a.i. } M \in \text{int.}\widehat{\alpha'\beta'}$   
 $M \notin \alpha', M \notin \beta' \} \Rightarrow |AB| \not\subset \widehat{\alpha'\beta'}$ . Numai în cazul unghiului nul sau plat,

când unghiul diedru se transformă în plan sau semiplan închis, este mulțime convexă.

30) Care din următoarele mulțimi sînt convexe:

- a) un unghi triedru;
- b) interiorul său;
- c) reuniunea fețelor sale;
- d) reuniunea interiorului cu toate fețele sale?

**Soluție:**



a) Nu. Unghiul triedru nu este mulțimea convexă, întrucît, dacă luăm  $A \in a$  și  $Q \in \text{int.} \widehat{bc}$  determinat de  $P \in \text{int.} \widehat{abc}$ ,  $(\exists) R$  a.i.  $|OP \cap \text{int.} ABC = \{R\}$ ,  $R \in |AQ|$ ,  $R \notin \widehat{abc}$   
Deci  $A, Q \in \widehat{abc}$ , dar  $|AQ| \not\subset \widehat{abc}$

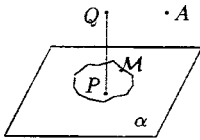
$\beta = (OCA)$ ,  $\gamma = (OAB)$  este mulțime convexă ca intersecție de mulțimi convexe.

c) Este aceeași mulțime ca la a) și nu este convexă.

d) Mulțimea respectivă este  $[\alpha A \cap \beta B \cap \gamma C]$ , intersecție de mulțimi convexe și deci este convexă.

31) Fie  $\sigma$  un semispațiu deschis limitat de planul  $\alpha$  și  $M$  o mulțime convexă închisă în planul  $\alpha$ . Să se arate că mulțimea  $M \cap \sigma$  este convexă.

**Soluție:**



Fie  $\sigma = |\alpha A$  și  $M \subset \alpha$ . Fie  $P, Q \in M \cap \sigma$ .

Apar cazurile:

a)  $P, Q \in \sigma \Rightarrow |PQ| \subset \sigma \subset \sigma \cap M$ ;

b)  $P, Q \in M \Rightarrow |PQ| \subset M \subset \sigma \cap M$ ;

c)  $P \in M, Q \in \sigma \xrightarrow{\text{pr. 1.229.58}} |PQ| \subset \sigma \cap \sigma \cap M$ .

32) Să se arate că intersecția sferei  $S(O, r)$  cu un plan ce trece prin  $O$ , este un cerc.

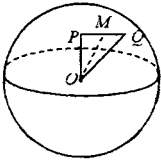
**Soluție:**

$$S(O, r) = \{M \in S / \|OM\| = r\}.$$

$$S(O, r) \cap \alpha = \{M \in S / M \in S(O, r) \cap M \alpha \cap \|OM\| = r\} = \{M \in \alpha / \|OM\| = r\} = C(O, r)$$

33) Demonstrați că  $\text{int}.S(O, r)$  este o mulțime convexă.

**Soluție:**



Fie  $P, Q \in \text{int}.S(O, r) \Rightarrow \|OP\| < r, \|OQ\| < r$ .

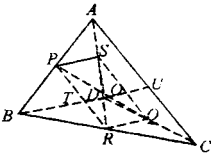
În planul  $(OPQ)$ , fie  $M \in (PQ)$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \|OM\| < \|OP\| < r \\ \text{sau} \\ \|OM\| < \|OQ\| < r \end{array} \right\} \Rightarrow \|OM\| < r$$

$\Rightarrow M \in S(O, r) (\forall) M \in |PQ| \Rightarrow |PQ| \subset S(O, r)$

34) Să se arate ca unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obțin drepte concurente.

**Soluție:**



Fie:  $P$  mijlocul lui  $|AB|$

$R$  mijlocul lui  $|BC|$

$Q$  mijlocul lui  $|DC|$

$S$  mijlocul lui  $|AD|$

$T$  mijlocul lui  $|BD|$

$U$  mijlocul lui  $|AC|$

În triunghiul  $ABC$ :  $|RP|$  l.m.  $\|PR\| = \frac{\|AC\|}{2}$ ,  $PR \parallel AC$ .

În triunghiul  $DAC$ :  $|SQ|$  l.m.  $\|SQ\| = \frac{\|AC\|}{2}$ ,  $SQ \parallel AC$ .

$\Rightarrow \|PR\| = \|SQ\|$ ,  $PR \parallel SQ \Rightarrow PRSQ$  paralelogram  $\Rightarrow |PQ|$  și  $|SR|$  se intersectează în mijlocul lor  $O$ .

$$\left. \begin{array}{l} \|ST\| = \frac{\|AB\|}{2}, \quad \|OR\| = \frac{\|AB\|}{2} \\ ST \parallel AB \quad UR \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \|ST\| = \|UR\| \\ ST \parallel UR \end{array} \right\} \Rightarrow STRU - \text{paralelogram.}$$

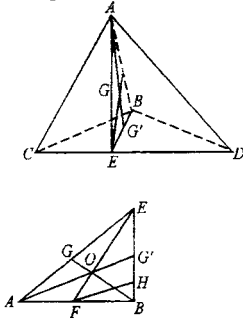
$\Rightarrow |TU|$  trece prin mijlocul  $O$  al lui  $|SR|$ .

Deci cele trei drepte  $PR, SR, TU$  sînt concurente în  $O$ .



35) Să se arate că dreptele care unesc virfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale fețelor opuse sînt concurente în același punct ca cele trei drepte din exemplul precedent.

**Soluție:**



Fie tetraedrul  $ABCD$  și  $E$  mijlocul lui  $|CD|$ . Centrul de greutate  $G$  al feței  $ACD$  se află pe  $|AE|$  la o treime de bază. Centrul de greutate  $G'$  al feței  $BCD$  se află pe  $|BE|$  la o treime de bază  $|CD|$ .

Desprindem separat  $\triangle AEB$ . Fie  $F$  mijlocul lui  $AB$ , deci  $EF$  este mediană în acest triunghi iar în problema precedentă a fost unul din cele 3 segmentele concurente într-un punct situat la mijlocul fiecăreia.

Fie  $O$  mijlocul lui  $|EF|$ . Notăm  $AO \cap EB = \{G'\}$  și  $BG \cap EA = \{G\}$ .

$$|AF| \equiv |FB| \Rightarrow |FH| \text{ m. în } ABG' \Rightarrow |BH| \equiv |HG'| \quad (1)$$

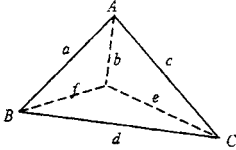
$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } OG' \parallel FH \\ |EO| \equiv |OF| \end{array} \right\} \Rightarrow |OG'| \text{ l.m. în } \triangle EFH \Rightarrow |EG'| \equiv |G'H| \quad (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow |EG'| \equiv |G'H| \equiv |HB| \Rightarrow \frac{|EG'|}{|EB|} = \frac{1}{3} \Rightarrow G'$  este tocmai centrul de greutate al feței  $BCD$ , întrucît este situat pe mediana  $|EB|$  la o treime de  $E$ . La fel se arată că  $G$  este tocmai centrul de greutate al feței  $ACD$ . S-a arătat deci că  $BG$  și  $AG'$  trec prin punctul  $O$  al problemei precedente.

Alegînd fețele  $ACD$  și  $ACB$  și notînd cu  $G''$  centrul de greutate al feței  $ACB$ , se arată la fel că  $BG$  și  $DG''$  trec prin mijlocul segmentului  $|MN|$  ( $|AM| \equiv |MC|$ ,  $|BN| \equiv |ND|$ ) deci tot prin punctul  $O$  etc.

36) Fie  $ABCD$  un tetraedru. Se consideră unghiurile triedre care au ca muchii  $[AB, [AE, [AD, [BA, [BC, [BD, [CA, [CB, [CD, [DA, [DB, [DC$ . Să se arate că intersecția interioarelor acestor 4 unghiuri triedre coincide cu interiorul tetraedrului  $[ABCD]$ .

**Soluție:**



Notăm planele  $(ABC) = \alpha$ ,  $(ADC) = \beta$ ,  $(BDC) = \gamma$ ,  
 $(ABO) = \delta$ .

Fie  $M$  intersecția interioarelor celor 4 unghiuri treidre.  
 Arătăm că:

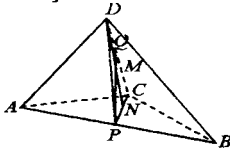
$M = \text{int.}[ABCD]$ , prin dublă incluziune

1)  $P \in M \Rightarrow P \in \text{int.} \widehat{abc} \cap \text{int.} \widehat{afd} \cap \text{int.} \widehat{dec} \cap \text{int.} \widehat{bfc} \Rightarrow P \in |\alpha D \cap |\gamma C \cap |\beta B$  și  $P \in |\delta A \cap |\gamma C \cap |\beta B \Rightarrow P \in |\alpha D$  și  $P \in |\beta B$  și  $P \in |\gamma C$  și  $P \in |\delta C \Rightarrow P \in |\alpha D \cap |\beta B \cap |\gamma C \cap |\delta A \Rightarrow P \in \text{int.} [ABCD]$ . Deci  $M \in [ABCD]$ .

2) Urmărind raționamentul invers se arată că  $[ABCD] \subset M$  de unde egalitatea.

37) Să se arate că  $(\forall) M \in \text{int.}[ABCD] (\exists) P \in |AB|$  și  $Q \in |CD|$  a.i.  $M \in |PQ|$ .

**Soluție:**



$M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow (\exists) N \in \text{int.} ABC$  a. i.

$M \in |DN|$ ,  $N \in \text{int.} ABC \Rightarrow (\exists) P \in |AB|$  a.i.  $n \in |CP|$ .

$(ADB) \cap (DPC) = DP$

Din  $N \in |CP|$  și  $M \in |DN| \xrightarrow{\text{lema}} \text{int.} DPC \Rightarrow$

$\Rightarrow M \in \text{int.} DPC \Rightarrow (\exists) Q \in |DC|$  a.i.  $|PQ|$ .

Deci s-a arătat că  $(\exists) P \in |AB|$  și  $Q \in |DC|$  a.i.  $M \in |PQ|$ .

38) Interiorul tetraedrului  $[ABCD]$  coincide cu reuniune segmentelor  $|PQ|$  cu  $P \in |AB|$  și  $Q \in |CD|$ , iar tetraedrul  $[ABCD]$  este egal cu reuniunea segmentelor închise  $[PQ]$ , când  $P \in [AB]$  și  $Q \in [CD]$ .

**Soluție:**

Fie  $\mathcal{M}$  reuniunea segmentelor deschise  $|PQ|$ . Trebuie să arătăm că:  $\text{int.}[ABCD] = \mathcal{M}$  prin dublă incluziune.

1) Fie  $M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow (\exists) P \in |AB|$  și  $Q \in |CD|$  a.i.  $M \in |PQ| \Rightarrow M \in \mathcal{M}$  și deci  $\text{int.}[ABCD] \subset \mathcal{M}$ .

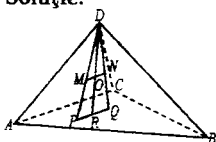
2) Fie  $M \in \mathcal{M} \Rightarrow (\exists)P \in |AB|$  și  $Q \in |CD|$  a. i.  $M \in |PQ|$ . Punctele  $D, C$  și  $P$  determină planul  $(PDC)$  și  $(PDC) \cap (ACB) = PC$ ,  $(PDC) \cap (ADB) = PD$ .

Întrecut  $(\exists)Q \in |CD|$  a.i.  $M \in |PQ| \Rightarrow M \in [PCD] \Rightarrow (\exists)R \in |PC|$  a.i.  $M \in |DR|$ . Dacă  $P \in |AB|$  și  $R \in |PC| \Rightarrow R \in \text{int.}ACB$  a.i.  $M \in |DR| \Rightarrow M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow \mathcal{M} \subset \text{int.}[ABCD]$ .

Lucrând cu segmentele închise se obține că  $(\exists)R \in [ACB]$  a.i.  $M \in [DR]$  obținându-se tetraedrul  $[ABCD]$ .

39) Tetraedrul este o mulțime convexă.

Soluție:



Fie  $M \in [ABCD] \Rightarrow (\exists)P \in [ABC]$  a.i.  $M \in [DP]$ .

Fie  $N \in [ABCD] \Rightarrow (\exists)Q \in [ABC]$  a.i.  $N \in [DQ]$ .

Dreptele concurente  $DM$  și  $DN$  determină unghiul  $DMN$

Suprafața triunghiului  $DPQ$  este o mulțime convexă

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} M \in [DPQ] \\ N \in [DPQ] \end{array} \right\} \Rightarrow |MN| \subset [DPQ].$$

Fie  $O \in |MN| \Rightarrow O \in [DPQ] \Rightarrow (\exists)R \in [PQ]$  a.i.  $O \in [DR]$ . Dar  $[PQ] \subset [ABC]$  deoarece  $P \in [ABC] \cap Q \in [ABC]$  și suprafața triunghiului este convexă. Deci  $(\exists)R \in [ABC]$  a.i.  $O \in [DR] \Rightarrow O \in [ABCD], (\forall)O \in |MN| \Rightarrow |MN| \subset [ABCD]$  și tetraedrul este o mulțime convexă.

**Observație:** Tetraedrul mai poate fi privit și ca intersecția a patru semispații închise care sînt mulțimi convexe.

40) Fie  $\mathcal{M}_1$  și  $\mathcal{M}_2$  mulțimi convexe. Să se arate că reunind segmentele  $[PQ]$ , pentru care  $P \in \mathcal{M}_1$  și  $Q \in \mathcal{M}_2$ , se obține o mulțime convexă.

Soluție:

Fie  $\mathcal{M}$  reuniunea segmentelor  $[PQ]$  cu  $P \in \mathcal{M}_1$  și  $Q \in \mathcal{M}_2$ .

Fie  $x, x' \in \mathcal{M} \Rightarrow (\exists)P \in \mathcal{M}_1$  și  $Q \in \mathcal{M}_2$  a.i.  $x \in [PQ]$ ;

$(\exists) P' \in M_1$  și  $Q \in M$  a.i.  $x' \in [P'Q]$ .

Din  $P, P' \in M_1 \Rightarrow [PP'] \in M_1$  care este mulțime convexă.

Din  $Q, Q' \in M_2 \Rightarrow [QQ'] \in M_2$  care este mulțime convexă.

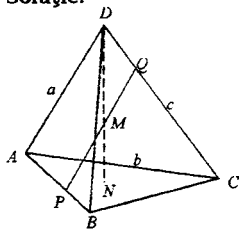
Reuniunea tuturor segmentelor  $[MN]$  cu  $M \in [PP']$  și  $N \in [QQ']$  este tetraedrul  $[PP'Q'Q] \subset M$ , întrucât  $M \in M_1$  și  $M \in M_2$ .

Dar tetraedrul  $[PP'Q'Q]$  este o mulțime convexă, deci din  $x, x' \in [PP'Q'Q] \Rightarrow [xx'] \subset [PP'Q'Q] \in M$ .

Deci din  $x, x' \in M \Rightarrow [xx'] \subset M$ , deci mulțimea  $M$  este convexă.

41) Să se arate că interiorul unui tetraedru coincide cu intersecția semispațiilor deschise determinate de planele fețelor și vîrfurile opuse respectiv. Caracterizați tetraedrul ca o intersecție de semispații.

**Soluție:**



Interiorul tetraedrului coincide cu reuniunea segmentelor  $|PQ|$ ,  $P \in |AB|$  și  $Q \in |CD|$ , adică

$$\text{int.}[ABCD] = \{|PQ| \setminus P \in |AB|, Q \in |CD|\}.$$

Să arătăm că:

$$\text{int.}[ABCD] = |(ABC), D \cap |(ABD), C \cap |(ADC), B \cap |(DBC), A.$$

1) Fie  $M \in \text{int.}[ABCD] \Rightarrow P \in |AB|$  și  $Q \in |DC|$  a.i.  $M \in |PQ|$ .

$$\text{Din } P \in |AB| \Rightarrow B \notin |AP| \Rightarrow |AP| \cap (BDC) = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P \in |(BDC), A \\ P \in (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(BDC), A; M \in |PQ| \Rightarrow M \in |(BDC), A \quad (1)$$

$$\text{Din } P \in |AB| \Rightarrow A \notin |PB| \Rightarrow |PB| \cap (ADC) = \emptyset \Rightarrow P \in |(ADC), B; Q \in (ADC) \Rightarrow |PQ| \subset |(ADC), B \Rightarrow M \in |(ADC), B \quad (2)$$

$$Q \in |DC| \Rightarrow D \notin |QC| \Rightarrow |QC| \cap (ABD) = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q \in |(ABD), C \\ P \in (ABD) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(ABD), C \Rightarrow M \in |(ABD), C \quad (3)$$

$$Q \in |DC| \Rightarrow C \notin |DQ| \Rightarrow |DQ| \cap (ABC) = \emptyset \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q \in |(ABC), D \\ P \in (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |PQ| \subset |(ABC), D \Rightarrow M \in |(ABC), D \quad (4)$$

Din (1),(2),(3),(4)  $\Rightarrow M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D$   
 deci:  $\text{int.}[ABCD] \subset |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D.$

2) Fie  $M \in |(BDC), A \cap |(ADC); B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D \Rightarrow M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \Rightarrow M \in \text{int. } \widehat{abc} \Rightarrow |DM| \cap \text{int.}ABC = \{N\}$ . Dacă presupunem  $N \in |DM| \Rightarrow |DM| \cap (ABC) \neq \emptyset \Rightarrow M$  și  $D$  sînt în semispații diferite față de  $(ABC) \Rightarrow M \notin (ABC), D$ , fals (contrazice ipoteza).

Deci  $M \in |DN|, (\exists)N \in \text{int.}ABC$  a.i.  $M \in |DN| \Rightarrow M \in \text{int. } [ABCD]$  și incluziunea a doua este dovedită.

În cazul tetraedrului:  $[ABCD] = \{|PQ| \setminus P \in [AB] \text{ și } Q \in [CD]\}$

Dacă  $P = A, Q \in [CD], [PQ]$  descrie fața  $[ADC]$

$P = B, Q \in [CD], [PQ]$  descrie fața  $[BDC]$

$Q = C, P \in [AB], [PQ]$  descrie față  $[ABC]$ .

Întrucît suprafețele triunghiulare sînt mulțimi convexe și odată cu două puncte ale lor  $P, Q$  segmentul  $[PQ]$  este inclus în suprafața respectivă.

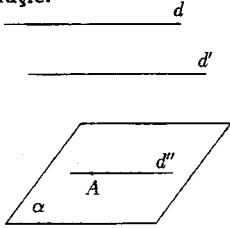
Deci la egalitatea din cazul anterior adăugînd și aceste cazuri obținem:

$$[ABCD] = |(BCD), A \cap |(ACD), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D.$$

## DREPTE ȘI PLANE

1) Fie  $d, d'$  două drepte paralele. Dacă dreapta  $d$  este paralelă cu un plan  $\alpha$ , să se arate că  $d' \parallel \alpha$  sau  $d' \subset \alpha$ .

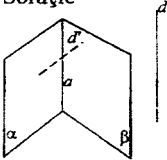
**Soluție:**



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } A \in \alpha \\ d \parallel \alpha \\ d'' \parallel d \\ d' \parallel d \\ d'' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d'' \subset \alpha \\ d' \parallel d'' \end{array} \right\} \Rightarrow d'' \parallel \alpha \text{ sau } d' \subset \alpha$$

2) Se consideră o dreaptă  $d$ , paralelă cu planele  $\alpha$  și  $\beta$ , care se intersectează după dreaptă  $a$ . Arătați că  $d \parallel a$ .

**Soluție**

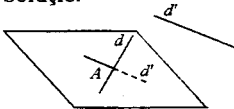


Fie  $A \in a \Rightarrow A \in \alpha \cap A \in \beta$ . Ducem prin  $A$ ,  $d'' \parallel d$ .

$$\left. \begin{array}{l} A \in \alpha, \left. \begin{array}{l} d \parallel \alpha \\ d' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow d' \subset \alpha \\ A \in \beta, \left. \begin{array}{l} d \parallel \beta \\ d' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow d' \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' \subset \alpha \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' = a \\ d' \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel d$$

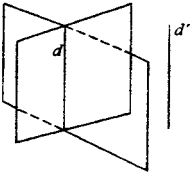
3) Printr-o dreaptă dată  $d$  duceți un plan paralel cu o altă dreaptă dată  $d'$ . Discuțați numărul soluțiilor.

**Soluție:**



a) Dacă  $d \nparallel d'$  soluția este unică și se obține astfel:

Fie  $A \in d$ . În planul  $(A, d')$  ducem  $d'' \parallel d'$ . Dreptele concurente  $d$  și  $d''$  determină planul  $a$ . Cum  $d' \parallel d'' \Rightarrow d \parallel a$ , în cazul dreptelor necoplanare.

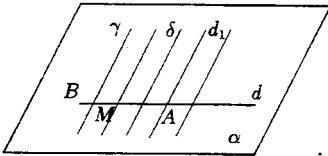


b) dacă  $d \parallel d'$ ,  $(\exists)$  o infinitate de soluții. Orice plan care trece prin  $d$  este paralelă cu  $d'$ , cu excepția planului  $(d, d')$ .

c)  $d \not\parallel d'$ , dar sînt coplanare  $(\exists)$  soluții.

4) Să se determine reuniunea dreptelor care intersectează o dreaptă dată  $d$  și sînt paralele cu o altă dreaptă dată  $d'$  ( $d \not\parallel d'$ ).

**Soluție:**



Fie  $A \in d$ , ducem prin  $A$ ,  $d_1 \parallel d'$ .

Notăm  $\alpha = (d, d_1)$ . Cum  $d' \parallel d_1 \Rightarrow d' \parallel \alpha$ .

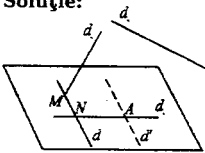
Fie  $M \in d$ , arbitrar  $\Rightarrow M \in \alpha$ .

Ducem  $\delta \parallel d'$ ,  $M \in \delta$  }  $\Rightarrow \delta \subset \alpha$  deci toate paralele la  $d'$  și care intersectează  $d$  sînt conținute în planul  $\alpha$ .

Fie  $\gamma \subset \alpha$ ,  $\gamma \parallel d' \Rightarrow \gamma \cap d = B$ , deci  $(\forall)$  paralelă la  $d'$  din  $\alpha$  intersectează pe  $d$ . Deci planul  $\alpha$  reprezintă reuniunea cerută.

5) Să se construiască o dreaptă care întilnește două drepte date și este paralelă cu o a treia dreaptă dată. Discuție.

**Soluție:**



Prin  $M$  ducem  $d$  a.i.  $d \parallel d'$  }  $\Rightarrow$   
 $d' \parallel d_3$  }

$\Rightarrow d \parallel d_3$ . Conform problemei 4:  $d \cap d_1 = \{N\}$ .

Deci  $d \cap d_2 = \{M\}$

$d \cap d_1 = \{N\}$

$d \parallel d_3$

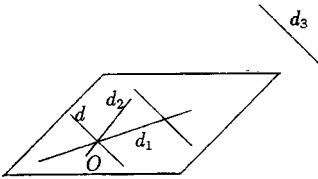
a) Dacă  $d_3 \not\parallel d_1$ , pl.  $\alpha$  este unic și dacă  $d_2 \cap \alpha \neq \emptyset$ , soluția este unică.

b) Dacă  $d_1 \parallel d_3$ , nu  $(\exists) \begin{matrix} d \parallel d_1 \\ d \cap d_1 \neq \emptyset \end{matrix}$  căci ar însemna că printr-un punct putem duce două paralele  $d, d_1$  la aceeași dreaptă  $d_3$ .

Deci nu există soluție.

c) Dacă  $d_1 \not\parallel d_3$  și  $d_2 \cap \alpha = \emptyset$  toate paralele la  $d_2$  care taie pe  $d_1$  sînt în planul  $\alpha$  și nici una nu poate intersecta pe  $d_2$ , deci problema nu are soluții.

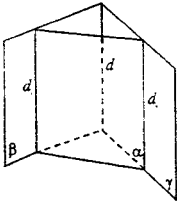
d) Dacă  $d_2 \subset \alpha, d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$ , fie  $d_1 \cap d_2 = \{O\}$  și dreapta căutată este paralelă la  $d_3$  dusă prin  $O \Rightarrow$  o soluție.



e) dacă  $d_2 \subset \alpha, d_2 \parallel d_1$ . Problema are o infinitate de soluții,  $(\forall) \parallel$  la  $d_3$  care taie pe  $d_1$ , taie și pe  $d_2$ .

6) dacă un plan  $\alpha$  intersectează planele secante după drepte paralele, atunci  $\alpha$  este paralelă cu dreapta  $\beta \cap \gamma$ .

**Soluție:**



Fie:  $\beta \cap \gamma = d$

$$\alpha \cap \beta = d_1$$

$$\alpha \cap \gamma = d_2$$

$$d_1 \parallel d_2$$

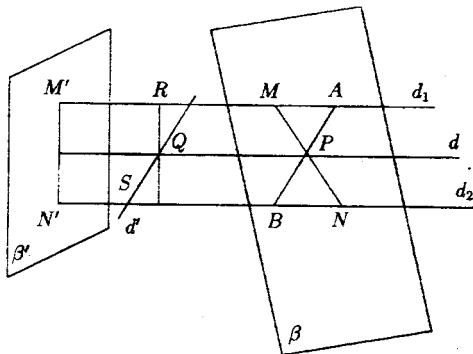
$$\left. \begin{matrix} d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \parallel \gamma \\ d_1 \subset \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma = d$$

$$\left. \begin{matrix} d = d_1 \\ d_1 \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow d \parallel \alpha$$

7) Un plan variabil taie două drepte paralele în punctele  $M$  și  $N$ . Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului  $[MN]$ .

**Soluție:**



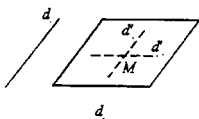


$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\exists) \alpha = (d_1, d_2)$$

Problema se reduce la locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremități pe două drepte paralele  $P$  un astfel de punct  $|MP| = |PN|$ . Ducem  $AB \perp d_1 \Rightarrow AB \perp \widehat{MPA} = \widehat{BPN} \Rightarrow \triangle MAP = \triangle NBP \Rightarrow |PA| \equiv |PB| \Rightarrow |AP| \parallel ? \Rightarrow$  Locul geometric este paralela la  $d_1$  și  $d_2$  dusă pe mijlocul distanței dintre ele. Se arată și reciproc.

8) Se dau două drepte. Duceți printr-un punct dat un plan paralel cu ambele drepte.  
Discuție.

**Soluție:**



$$M \notin d_1, M \notin d_2.$$

Fie  $d_1 \not\parallel d_2$ . În planul  $(d, M)$  ducem  $d'_1 \parallel d_1, M \in d'_1$ . În planul  $(d_2, M)$  ducem  $d'_2 \parallel d_2, M \in d'_2$ . Notăm  $\alpha = (d'_1, d'_2)$  planul determinat de două drepte concurente.

$$d_1 \parallel d'_1 \Rightarrow d_1 \parallel \alpha, M \in \alpha \text{ soluție unică.}$$

$$d_1 \parallel d'_2 \Rightarrow d_2 \parallel \alpha$$

Fie  $d_1 \parallel d_2, N \notin d_1, M \notin d_2$ .

$$d_1 = d'_1 = d'_2$$

În acest caz  $d'_1 = d'_2 = d$  și prin  $d$  trec o infinitate de plane  $\left. \begin{array}{l} d_2 \parallel d \\ d_1 \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow d_1$  și  $d_2$  sînt paralele cu  $(\forall)$  din planele ce trec prin  $d$ .

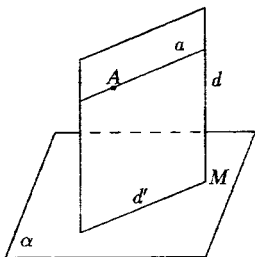
Problema are o infinitate de soluții. Dar  $M \in d_1$  sau  $M \in d_2$ , problema nu are soluții fiindcă planul nu poate trece printr-un punct al unei drepte și să fie paralel cu ea.

9) Să se construiască o dreaptă care trece printr-un punct dat, este paralelă cu un plan dat și intersectează o dreaptă dată. Discuție.

**Soluție:**

Fie  $A$  punctul dat,  $\alpha$  planul dat și  $d$  dreapta dată.

a) Presupunem că  $d \not\parallel \alpha$ ,  $d \cap \alpha = \{M\}$ . Fie planul  $(dA)$  care are un punct comun  $M$  cu  $\alpha \Rightarrow (dA) \cap \alpha = d'$ .



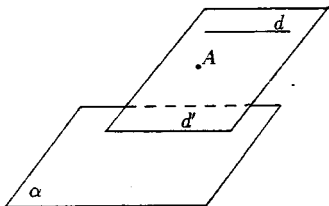
Ducem în planul  $(dA)$  prin punctul  $A$  o paralelă  $a$  la  $d'$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel d' \\ d' \cap d = \{M\} \end{array} \right\} \Rightarrow a \cap d \neq \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel d \\ d' \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha, A \in a$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow a \cap d \neq \emptyset \\ \Rightarrow a \parallel \alpha, A \in a \end{array} \right\} a \text{ este dreapta căutată.}$$

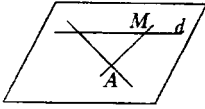
b)  $d \parallel \alpha$ ,  $(dA) \cap \alpha \neq \emptyset$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } (dA) \cap \alpha = \alpha' \\ d \parallel d' \end{array} \right\} \Rightarrow d' \parallel d$$

Toate dreptele care trec prin  $A$  și intersectează  $d$  sînt conținute în planul  $(dA)$ . Dar toate aceste drepte taie și pe  $d' \parallel d$ , deci nu pot fi paralele cu  $\alpha$ . Nu există soluție.

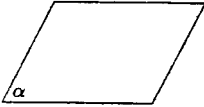
c)  $d \parallel \alpha$ ,  $(dA) \cap \alpha = \emptyset$ .



Fie  $M \in d$  și dreapta  $AM \subset (dA)$  }  $\Rightarrow AM \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow$   
 $(dA) \cap \alpha = \emptyset$

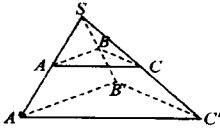
$\Rightarrow AM \parallel \alpha, (\forall) M \in d.$

Problema are o infinitate de soluții.



10) Să se arate că dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  situate în plane diferite, au  $AB \parallel A'B'$ ,  $AC \parallel A'C'$  și  $BC \parallel B'C'$ , atunci dreptele  $AA', BB', CC'$  sînt concurente sau paralele.

**Soluție:**



$(ABC)$  și  $(A'B'C')$  sînt plane distincte deci cele șase puncte  $A, B, C, A', B', C'$  nu pot fi coplanare.

$AB \parallel A'B' \Rightarrow A, B, A', B'$  sînt coplanare.

Sînt coplanare cîte 4 puncte și anume  $(ABB'A'), (ACC'A'), (BCC'B')$  determinînd 4 plane distincte. Dacă am presupune că planele coincid două cîte două, ar rezulta alte 6 puncte coplanare ceea ce este fals.

În planul  $ABB'A'$ , dreptele  $AA', BB'$  pot fi paralele sau concurente.

Presupunem întii că:

$$AA' \cap BB' = \{S\} \Rightarrow S \in AA' \cap S \in BB'$$

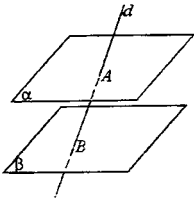
$$\left. \begin{array}{l} S \in AA' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \in (ABB'A') \\ S \in (ACC'A') \end{array} \right\} \\ S \in BB' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \in (BCC'B') \\ S \in (ABB'A') \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{este punct comun celor 3 plane distincte dar, intersecția}$$

a 3 plane distincte nu poate fi decît un punct, o dreaptă sau  $\emptyset$ . O dreaptă nu poate fi, întrucît dreptele

$$\left. \begin{aligned} (ABB'A') \cap (ACC'A') &= AA' \\ (ABB'A') \cap (BCC'B') &= BB' \\ (ACC'A') \cap (BCC'B') &= CC' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{sînt distincte dac\u0103 am presupune c\u0103 dou\u0103 din ele coincid,}$$

cele 6 puncte ar fi coplanare, deci nu exist\u0103 o dreapt\u0103 comun\u0103 tuturor celor trei plane. Mai r\u0103m\u0103ne posibilitatea s\u0103 aib\u0103 un punct comun, punctul  $S$  \u015fi din

$$\left. \begin{aligned} S \in (ACC'A) \\ S \in (CC'BB') \end{aligned} \right\} \Rightarrow S \in CC' \Rightarrow$$

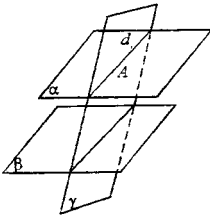


$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

Presupunem  $d \cap \beta = \emptyset \Rightarrow d \parallel \beta \Rightarrow d \in \text{pl. } \parallel \beta$  dus prin  $A \Rightarrow d \subset \alpha$ , fals. Deci  $d \cap \beta = \{B\}$ .

11) Ar\u0103ta\u0163i c\u0103 dac\u0103 dou\u0103 plane s\u0103nt paralele, atunci un plan, care intersecteaz\u0103 pe unul din ele dup\u0103 o dreapt\u0103, taie \u015fi pe cel\u0103lalt.

**Solu\u0163ie:**



ipotez\u0103:  $\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = d_1$

concluzie:  $\gamma \cap \beta = d_2$

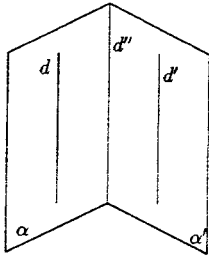
Presupunem c\u0103  $\gamma \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \gamma \parallel \beta$ .

Fie  $A \in d_1 \Rightarrow \begin{cases} A \in \alpha, \alpha \parallel \beta \\ A \in \gamma, \gamma \parallel \beta \end{cases} \Rightarrow a = \gamma$  pentru c\u0103 dintr-un punct se poate duce un singur plan paralel cu planul dat.

Dar acest rezultat este fals, contrazice ipotez\u0103  $\alpha \cap \gamma = d_1$ , deci  $\gamma \cap \beta = d_2$ .

12) Prin dreptele paralele  $d$  \u015fi  $d'$  se duc respectiv planele  $\alpha$  \u015fi  $\alpha'$ , distincte de  $(d, d')$ . S\u0103 se arate c\u0103  $\alpha \parallel \alpha'$  sau  $(\alpha \cap \alpha') \parallel d$ .

**Soluție:**



ipoteză:  $d \parallel d'$ ;  $d \subset \alpha, d' \subset \alpha'$ ;  $\alpha, \alpha' \neq (dd')$

concluzie:  $\alpha \parallel \alpha'$  sau  $d'' \parallel d$

Cum  $\alpha, \alpha' \neq (dd') \Rightarrow \alpha \neq \alpha'$ .

1. Dacă  $\alpha \cap \alpha' = \emptyset \Rightarrow \alpha \parallel \alpha'$ .

2. Dacă  $\alpha \cap \alpha' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \alpha' = d''$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dacă } d \parallel d' \\ d' \subset \alpha' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d \parallel \alpha' \\ d \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d'' \parallel d.$$

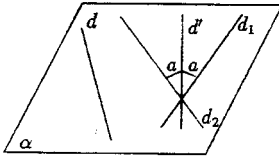
13) Se dau un plan  $\alpha$ , un punct  $A \in \alpha$  și o dreaptă  $d \subset \alpha$ .

a) Să se construiască o dreaptă  $d'$  a.i.  $d' \subset \alpha, A \in d'$  și  $d' \parallel d$ .

b) Să se construiască o dreaptă prin  $A$  inclusă în  $\alpha$ , care formează cu  $d$  un unghi de măsură dată  $a$ . Cite soluții există.

**Soluții:**

a) Dacă  $A \in d$ , atunci  $d' = d$ . Dacă  $A \notin d$ , ducem prin  $A, d' \parallel d$ .



b) Ducem  $d_1 \subset \alpha, A \in d$ , a.i.  $m(\widehat{d_1 d'}) = a$  și  $d_2 \subset \alpha, A \in d_2$  a.i.  $m(\widehat{d_2 d'}) = a$ , cite o dreaptă în fiecare semiplan determinat de  $d'$ . Deci  $(\exists)$  2 soluții în afară de cazul  $a = 0$  sau  $a = 90$  când  $(\exists)$  o singură soluție.

14) Arătați că relația  $\alpha \parallel \beta$  sau  $\alpha = \beta$  definită pe mulțimea planelor este o relație de echivalență. Determinați clasele de echivalență.

**Soluție:**

$$\alpha \parallel \beta \text{ sau } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \sim \beta$$

1)  $\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha \sim \alpha$ , relația este reflexivă

2)  $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ , relația este simetrică

$$\alpha \parallel \beta \text{ sau } \alpha = \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha \text{ sau } \beta = \alpha \Rightarrow \beta \sim \alpha$$

3)  $\alpha \sim \beta \cap \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

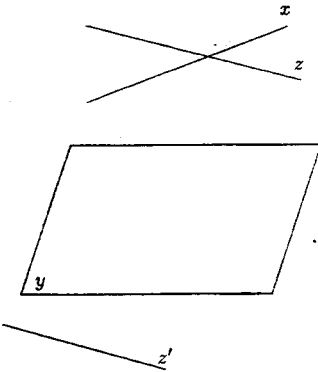
Dacă  $\alpha = \beta \cap \gamma \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

Dacă  $\alpha \neq \beta$  și  $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$   
 $\beta \sim \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$  sau  $\beta \parallel \gamma$  }  $\Rightarrow \alpha \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$

Clasa de echivalență determinată de planul  $\alpha$  este construită din planele  $\alpha'$  cu  $\alpha' \sim \alpha$ , adică din  $\alpha$  și toate planele paralele cu  $\alpha$ .

15) Se consideră pe mulțimea tuturor dreptelor și a planelor relația " $x \parallel y$ " sau  $x = y$ , unde  $x$  și  $y$  sînt drepte sau plane. Am definit o relație de echivalență?

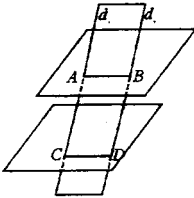
**Soluție:**



Nu, este o relație de echivalență, întrucît proprietatea de tranzitivitate nu este adevărată. De exemplu  $x$  o dreapta,  $y$  un plan,  $z$  dreaptă. Din  $x \parallel y$  și  $y \parallel z \not\Rightarrow x \parallel z$ , dreptele  $x$  și  $z$  putînd fi coplanare și concurente sau necoplanare.

16) Arătați că două segmente paralele cuprinse între plane paralele, sînt concurente.

**Soluție:**



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (\exists) \gamma = (d_1 d_2)$$

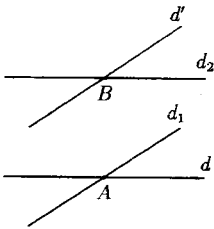
$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \gamma = AB \\ \beta \cap \gamma = CD \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{array} \Rightarrow ABCD \text{ paralelogram.}$$

$$\text{Deci } \|AC\| = \|BD\|.$$

17) Să se arate că prin două drepte, care nu sînt conținute într-un același plan, se pot duce

plane paralele, în mod unic. Să se studieze și situația când cele două drepte sînt coplanare.

**Soluție:**

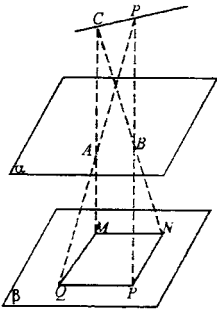


Luăm  $A \in d$  și ducem prin el  $d_1 \parallel d'$ . Luăm  $B \in d'$  și ducem  $d_2 \parallel d$ . Planul  $(d_1 d_2) \parallel (dd_1)$ , întrucît două drepte concurente din primul plan sînt paralele cu două drepte concurente din al doilea plan.

Cînd  $d$  și  $d'$  sînt coplanare, atunci cele patru drepte  $d, d_1, d_2$  și  $d'$  sînt coplanare și cele două plane coincid cu planul dreptelor  $d$  și  $d'$ .

18) Fie  $\alpha$  și  $\beta$  două plane paralele,  $A, B \in \alpha$ , iar  $CD$  o dreaptă paralelă cu  $\alpha$  și  $\beta$ . Dreptele  $CA, CB, DB, DA$  taie planul  $\beta$  respectiv în  $M, N, P, Q$ . Să se arate că aceste puncte sînt vîrfurile unui paralelogram.

**Soluție:**



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (CDA) \\ CD \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow CD \parallel QM \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (CDB) \\ CD \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow CD \parallel PN \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (CAB) \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel MN \quad (3)$$

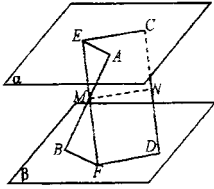
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie planul } (DAB) \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel QP \quad (4)$$

Din (1), (2), (3), (4)  $\Rightarrow MNPQ$  paralelogram.

19) Aflați locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremitățile în două plane paralele.

**Soluție:**

Fie  $[AB]$  și  $[CD]$  două segmente cu  $A, C \in \alpha$  și  $B, D \in \beta$  a.î.  $|AM| = |MB|$  și  $|CN| = |ND|$ .



În planul  $(MCD)$  ducem prin  $M$ ,  $EF \parallel CD \Rightarrow EC \parallel DF \Rightarrow EFDC \Rightarrow$  paralelogram

$$\Rightarrow |EF| \equiv |CD|$$

Dreptele concurente  $AB$  și  $EF$  determină un plan care taie planele  $\alpha$  după 2 drepte paralele  $\Rightarrow EA \parallel BF$ .

În acest plan  $|AM| \equiv |BM|$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{EMA} \equiv \widehat{BMF} \text{ (opuse la vîrf)} \\ \widehat{EAM} \equiv \widehat{FBM} \text{ (alterne intene)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AME \equiv \triangle BMF \Rightarrow |EM| \equiv |MF|$$

În paralelogramul  $ECDF$ ,  $|CN| \equiv |ND|$ ,  $|EM| \equiv |MF| \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} MN \parallel EC \Rightarrow MN \parallel \alpha \\ MN \parallel FD \Rightarrow MN \parallel \beta \end{array} \right. \quad (1)$$

Deci segmentul ce unește mijloacele a două din segmentele cu extremitățile în  $\alpha$  și  $\beta$  este paralel cu aceste plane. Mai luăm  $[GH]$  cu  $G \in \alpha$ ,  $H \in \beta$  și  $|GQ| \equiv |QH|$  și arătăm la fel că  $OM \parallel \alpha$  și  $OM \parallel \beta$ . (2)

Din (1) și (2)  $\Rightarrow M, N, Q$  aparțin unui plan paralel cu  $\alpha$  și  $\beta$  notat cu  $\gamma$ .

Reciproc să arătăm că orice punct din acest plan este mijlocul unui segment cu extremitățile în  $\alpha$  și  $\beta$ .

Fie seg.  $[AB]$  cu  $A \in \alpha$  și  $B \in \beta$  și  $|AM| = |BM|$ . Prin  $M$  ducem planul paralel cu  $\alpha$  și  $\beta$  și în acest plan luăm un punct arbitrar  $O \in \gamma$ .

Prin  $O$  ducem o dreaptă a.f.  $d \cap \alpha = \{I\}$  și  $d \cap \beta = \{I'\}$

În planul  $(OAB)$  ducem  $A'B' \parallel AB$ . Planul  $(AA'B'B)$  taie cele trei plane paralele după drepte paralele  $\Rightarrow$

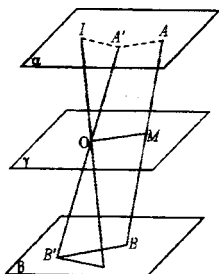
$$\left. \begin{array}{l} A'A \parallel OM \parallel B'B \\ B \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow$$

În planul  $(A'B'I)$   $\Rightarrow |A'O| \equiv |OB'| \Rightarrow IA' \parallel B'I$  și deci  $\widehat{A'O} \equiv \widehat{OB'}$  și  $\widehat{IA'O} \equiv \widehat{IB'O}$

$\Rightarrow \triangle IOA' \equiv \triangle IOB' \Rightarrow |OI| \equiv |OI| \Rightarrow O$  este mijlocul unui segment cu extremități în planele  $\alpha$  și  $\beta$ .



Deci locul geometric este planul  $\gamma$ , paralel cu  $\alpha$  și  $\beta$  și trecind pe la mijlocul distanței dintre  $\alpha$  și  $\beta$ .

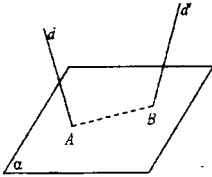


## PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Prin două drepte date să se ducă este un plan, a.î. dreapta lor de intersecție să fie conținută într-un plan dat.

**Soluție:**

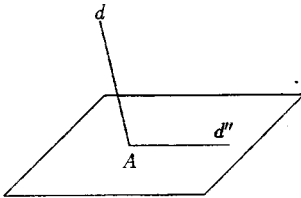
1. Presupunem că  $d \cap \alpha \neq \emptyset$  și  $d' \cap \alpha = \{B\}$ .



Fie  $d \cap \alpha = \{A\}$  și  $d' \cap \alpha = \{B\}$  și planele determinate de perechi de drepte concurente  $(d, AB)$ ;  $(d', AB)$ .

Observăm că acestea sînt planele cerute, întrucît  $d \subset (d, AB)$ ,  $d' \subset (d', AB)$  și  $(d, AB) \cap (d', AB) = AB \subset \alpha$ .

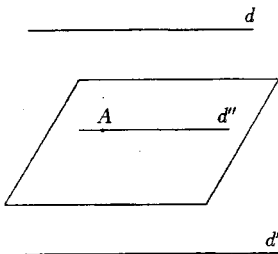
2. Presupunem  $d \cap \alpha = \{A\}$  și  $d' \parallel \alpha$ .



Ducem prin  $A$ , în planul  $\alpha$ , dreapta  $d'' \parallel d$  și considerăm planele  $(d, d'')$  și  $(d', d'')$  și observăm că  $(d, d'') \cap (d', d'') = d'' \subset \alpha$



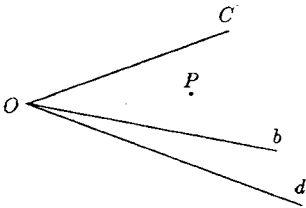
3. Presupunem  $d \cap \alpha = \emptyset$  și  $d' \cap \alpha = \emptyset$  și  $d' \in$  direcției  $d$ .



Fie  $A \in \alpha$  și  $d'' \parallel d \Rightarrow d'' \parallel d'$  și planele sunt  $(d, d'')$  și  $(d', d'')$ . Se judecă ca mai sus.

2) Fie  $a, b, c$  trei drepte cu un punct comun, iar  $P$  un punct nesituat pe ele. Să se arate că planele  $(Pa)$ ,  $(Pb)$ ,  $(Pc)$  conțin o dreaptă comună.

**Soluție:**

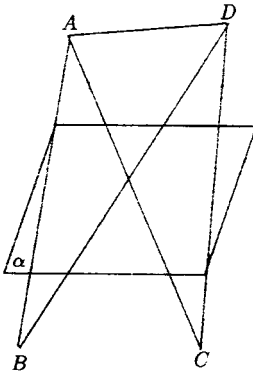


$$\begin{aligned}
 a \cap b \cap c &= \{O\} \\
 \left. \begin{array}{l} P \in (Pa) \\ O \in (Pa) \end{array} \right\} &\Rightarrow OP \subset (Pa) \\
 \left. \begin{array}{l} P \in (Pb) \\ O \in (Pb) \end{array} \right\} &\Rightarrow OP \subset (Pb) \\
 \left. \begin{array}{l} P \in (Pc) \\ O \in (Pc) \end{array} \right\} &\Rightarrow OP \subset (Pc)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (Pa) \cap (Pb) \cap (Pc) = OP$$

3) Fie  $A, B, C, D$  puncte, iar  $\alpha$  un plan care separă punctele  $A$  și  $B$ ;  $A$  și  $C$ ;  $C$  și  $D$ . Arătați că  $\alpha \cap |BD| \neq \emptyset$  și  $\alpha \cap |AD| = \emptyset$ .

**Soluție:**



Dacă  $\alpha$  separă punctele  $A$  și  $B$  înseamnă că ele se găsesc în semispații diferite și fie  $\sigma = |\alpha A$  și  $\sigma' = |\alpha B$ .

Întrucât  $\alpha$  separă pe  $A$  și  $C \Rightarrow C \in \sigma'$

Întrucât  $\alpha$  separă pe  $C$  și  $D \Rightarrow D \in \sigma$

Din  $B \in \sigma'$  și  $D \in \sigma \Rightarrow \alpha$  separă punctele  $B$  și  $D \Rightarrow$

$|BD| \cap \alpha \neq \emptyset$ .

Din  $A \in \sigma$  și  $D \in \sigma \Rightarrow |BD| \cap \alpha = \emptyset$ .

4) Pe muchiile  $a, b, c$ , ale unui unghi triedru de vîrf  $O$  se iau punctele  $A, B, C$ ; fie apoi  $D \in |BC|$  și  $E \in |AD|$ . Arătați că  $|OE| \subset \text{int.} \widehat{abc}$ .

**Soluție:**

$$\left. \begin{array}{l} B \in (ab) \\ C \in (a, b, c) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{pr. 1, pag. 58}} [BC] \subset |(a, b), c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OE \subset |(bc), A \quad (2)$$

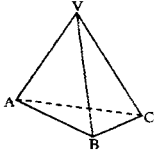
$$\left. \begin{array}{l} C \in (ac) \\ B \in |(ac), c \end{array} \right\} \Rightarrow [CB] \subset |(ac), B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D \in |(ac), B \\ A \in (a, c) \end{array} \right\} \Rightarrow [AD] \subset |(ac), B$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} E \in |(ac), B \\ O \in (a, c) \end{array} \right\} \Rightarrow [AD] \subset |(ac), B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E \in |(ac), B \\ O \in (ac) \end{array} \right\} \Rightarrow |OE \subset |(ac), B \quad (3)$$

Din (1), (2), (3)  $\Rightarrow |OE \subset |(ab), c \cap |(bc), A \cap |(ac), B = \text{int. } \widehat{abc}$ .

5) Arătați că următoarele mulțimi sînt convexe: interiorul unui unghi triedru, un tetraedru fără o muchie (fără o față).

**Soluție:**



a)  $\text{int.}(|VA, |\widehat{VB}, |VC) = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap |(VAC), B$  deci este intersecție de mulțimi convexe, și deci interiorul unui triedru este mulțime convexă.

b) Tetraedrul  $[VABC]$  fără muchia  $[AC]$ . Notăm cu  $\mathcal{M}_1 = [ABC] - [AC] = [AB, C \cap [BC, A \cap [AC, B$  deci este mulțime convexă, fiind intersecție de mulțimi convexe.

$|(\widehat{ABC}), V \cap \mathcal{M}_1$  este mulțime convexă.

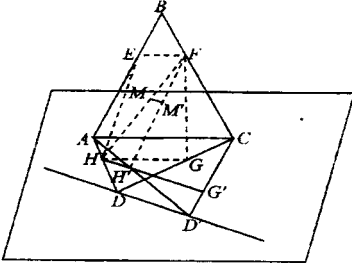
La fel  $|(\widehat{VAC}), B \cup \mathcal{M}_2$  este mulțime convexă, unde  $\mathcal{M}_2 = [VAC] - [AC]$ . Dar  $[VABC] - [AC] = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap (|(\widehat{ABC}), V \cup \mathcal{M}_1) \cap (|(\widehat{VAC}), B \cup \mathcal{M}_2)$  și deci este mulțime convexă ca intersecție de mulțimi convexe.

c) Tetraedru  $[VABC]$  fără față  $[ABC]$

$[VABC] - [ABC] = |(VAB), C \cap |(VBC), A \cap |(VAC), B \cap |(ABC), V$  deci intersecție de mulțimi convexe  $\Rightarrow$  este mulțime convexă.

6) Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare și  $E, F, G, H$  mijloacele segmentelor  $[AB], [BC], [CD], [DA]$ . Să se arate că  $EF \parallel (ACD)$  și punctele  $E, F, G, H$  sînt coplanare.

**Soluție:**



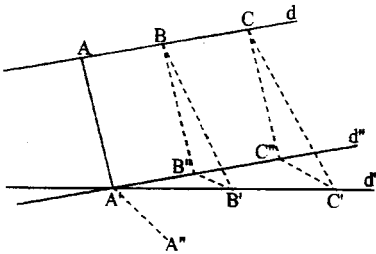
a) În pl.  $(BAC)$  avem  $EF \parallel AC$ . În pl.  $(DAC)$  avem  $AC \subset (DAC) \Rightarrow EF \parallel (DAC)$ . Tot în acest plan  $HG \parallel AC$ . Deci  $EF \parallel HG \Rightarrow E, F, G, H$  sînt coplanare și cum  $\|EF\| = \frac{\|AC\|}{2} = \|HG\| \Rightarrow EFGH$  este paralelogram.

7) Pe dreptele  $d, d'$  se iau punctele distincte  $A, B, C$  respectiv  $A', B', C'$ . Să se arate că putem duce prin dreptele  $AA', BB', CC'$  trei plane paralele între ele dacă și numai dacă

$$\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}.$$

**Soluție:**

Presupunem că avem  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$  a.i.  $AA' \subset \alpha, BB' \subset \beta, CC' \subset \gamma$ .



Ducem prin  $A'$  o dreaptă paralelă cu  $d$ :  $d'' \parallel d$ . Cu,  $d$  intersectează toate cele 3 plane  $A' \subset d''$  în  $A, B, C \Rightarrow$  și  $d''$  le taie în  $A', B'', C''$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } \alpha \parallel \beta \parallel \gamma \\ d \parallel d'' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \|AB\| = \|A'B''\| \\ \|BC\| = \|B''C''\| \end{array} \quad (1)$$

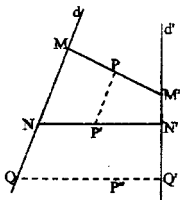
Fie planul  $(d', d'')$ . Cum acest plan are comun cu planele  $\alpha, \beta, \gamma$  respectiv punctele  $A', B'', C''$  și cum  $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \Rightarrow$  el le intersectează după drepte paralele  $\Rightarrow A'A'' \parallel B'B'' \parallel$

$$\|C'C''\| \xrightarrow{\text{ Tales }} \frac{\|A'B''\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|B''C''\|}{\|B'C'\|} \quad (2)$$

Ținând cont de (1) și (2)  $\Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$ . Reciprocă se arată similar.

8) Fie  $M, M'$  cite un punct mobil pe dreptele necoplanare  $d, d'$ . Să se afle locul geometric al punctelor  $P$  care împarte segmentul  $|MM'|$  într-un raport dat.

**Soluție:**



$$\text{Fie } P \in |MM'| \text{ a.î. } \frac{\|MP\|}{\|PM'\|} = k$$

$$\text{și } P' \in |NN'| \text{ a.î. } \frac{\|NP'\|}{\|P'N'\|} = k$$

$$\text{Deci } \frac{\|MP\|}{\|PM'\|} = \frac{\|NP'\|}{\|P'N'\|} \Rightarrow \frac{\|MP\|}{\|NP'\|} = \frac{\|PM'\|}{\|P'N'\|}$$

$\Rightarrow$  conform problemei 7 că se pot duce trei plane  $\beta \parallel \alpha \parallel \gamma$  a.î.  $MN \subset \beta, P'P' \subset \alpha, M'N' \subset \gamma$ .

$$\left. \begin{array}{l} \beta \parallel \alpha \\ MN \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel \alpha \Rightarrow d \parallel \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \gamma \\ M'N' \subset \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow M'N' \parallel \alpha \Rightarrow d' \parallel \alpha \text{ și } P'P' \subset \alpha.$$

Deci fixând  $P$  și lăsând  $P'$  variabil  $P' \in$  unui plan paralel cu cele două drepte și care trece prin  $P$ . Se știe că acest plan este unic, fiindcă ducând prin  $P$  paralele la  $d$  și  $d'$  pentru a obține acest plan el este bine determinat de 2 drepte concurente.

**Reciproc:** Fie  $P'' \in \alpha$  adică planului ce trece prin  $P$  și este paralel cu  $d$  și  $d'$ .

$(P'', d)$  det. un plan }  
 $(P'', d')$  det. un plan } \left. \begin{array}{l} \text{cele două plane avînd un punct comun se intersectează după o} \\ \text{dreaptă } (P'', d) \cap (P'', d') = QQ' \text{ unde } Q \in d \text{ și } Q' \in d'. \end{array} \right.

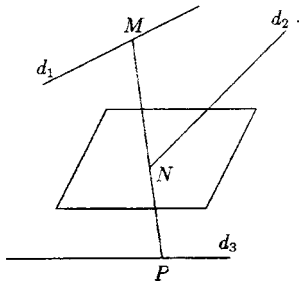
Cum  $d \parallel \alpha \Rightarrow MQ \parallel \alpha \Rightarrow (\exists)\beta$  a.i.  $MQ \subset \beta$ ,  $\beta \parallel \alpha$ .

Cum  $d' \parallel \alpha \Rightarrow M'Q' \parallel \alpha \Rightarrow (\exists)\gamma$  a.i.  $M'Q' \subset \gamma$ ,  $\gamma \parallel \alpha$ .

Deci locul geometric căutat este un plan paralel cu  $d$  și  $d'$ .

9) Să se construiască o dreaptă care să întîlnească trei drepte date respectiv în  $M, N, P$  și pentru care  $\frac{\|MN\|}{\|NP\|}$  să fie raport dat.

**Soluție:**



Considerăm planul care conform problemei 8 reprezintă locul geometric al punctelor care împart segmentele cu extremitățile pe dreptele  $d_1$  și  $d_3$  într-un raport dat  $k$ . Pentru obținerea acestui plan se ia un punct  $A \in d_1$ ,  $B \in d_3$  și punctul  $C \in AB$  a.i.  $\frac{\|AC\|}{\|CB\|} = k$ . Prin acest punct  $C$  se duc două paralele la  $d_1$  și  $d_3$  care determină planul menționat.

Fie  $d_2 \cap \alpha = \{N\}$ . Trebuie determinat un segment

care să treacă prin  $N$  și să aibe extremitățile pe  $d_1$  și  $d_3$  respectiv în  $M$  și  $P$ . Întrucît dreapta căutată trece prin  $N$  și  $M$

$$\left. \begin{array}{l} N \in (N, d_1) \\ M \in (N, d_1) \end{array} \right\} \Rightarrow MN \subset (Nd_1) \quad (1)$$

$$\text{Aceași dreaptă trebuie să treacă prin } N \text{ și } P \text{ și cum } \left. \begin{array}{l} N \in (N, d_1) \\ P \in (N, d_3) \end{array} \right\} \Rightarrow NP \subset (Nd_3) \quad (2)$$

$M, N, P$  coliniare.

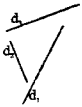
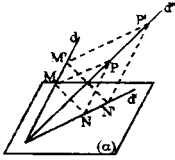
$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow MP \subset (N, d) \cap (N, d_3) \Rightarrow MP = (Nd_1) \cap (d_2N)$$

Atunci conform problemei 8:  $\frac{\|MN\|}{\|NP\|} = k$  și dreapta căutată este  $MP$ .

10) Să se afle locul geometric al vârfului  $P$  al triunghiului  $M, N, P$  dacă laturile acestuia rămîn paralele cu trei drepte fixe, vârful  $M$  descrie o dreaptă dată  $d$ , iar vârful  $N \in$  unui plan

dat  $\alpha$ .

**Soluție:**



Fie  $\triangle MNP$  a.i.  $MP \parallel d_1$ ,  $MN \parallel d_2$ ,  $PN \parallel d_3$ .  $M \in d, N \in \alpha$   
 Fie  $\triangle M'P'N'$  a.i.  $M' \in d$ ,  $N' \in \alpha$ ,  $M'P' \parallel d_1$ ;  $M'N' \parallel d_2$ ;  
 $P'N' \parallel d_3$ .

Dreapta  $MP$  generează un plan  $\beta$ , fiind paralelă cu o direcție  $d_1$  și sprijinindu-se pe o dreaptă dată  $d$ .

La fel, dreapta  $MN$  generează un plan  $\gamma$  deplăsindu-se paralel cu o direcție  $d_2$  fixă și sprijinindu-se pe o dreaptă dată  $d$ . Cum  $\gamma$  conține pe  $d \Rightarrow O$  este punct comun pentru  $\alpha$  și  $\gamma \Rightarrow \alpha \cap \gamma \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \gamma = d'$ ,  $O \in d'$ .

$$\left. \begin{array}{l} N \in \alpha \\ N \in \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow N \in \alpha \cap \gamma (\forall) \triangle \text{ considerat, deci } N \text{ descrie tot o dreaptă } d' \subset \alpha.$$

Cum planul  $\gamma$  este bine determinat de dreapta  $d$  și direcția  $d_2$ , este fix, deci  $d' = \alpha \cap \gamma$  este fixă.

La fel,  $PN$  va genera un plan  $\delta$ , deplăsindu-se paralel cu direcția fixă  $d_3$  și sprijinindu-se pe dreapta fixă  $d'$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } O \in d' \\ O \in d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O \in \delta \\ O \in \beta \end{array} \right. \Rightarrow \beta \cap \delta \neq \emptyset \Rightarrow O \in \beta \cap \delta = d''$$

$$\left. \begin{array}{l} P \in MP \Rightarrow P \in \beta \\ P \in PN \Rightarrow P \in \delta \end{array} \right\} \Rightarrow P \in \beta \cap \delta (\forall) P \text{ virf variabil, } P \in d''.$$

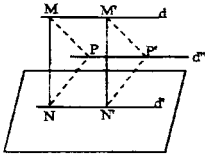
Deci pentru orice  $\triangle MNP$  în condițiile date, virful  $P \in d''$ .

**Reciproc**, fie  $P' \in d''$ . În planul  $(d', d'')$  ducem  $P', M' \parallel PM \Rightarrow (M'P'N') \parallel (PMN) \Rightarrow (dd')$  intersecția a două plane paralele după drepte paralele  $\Rightarrow M'N' \parallel MN$  și  $\triangle M'P'N'$  astfel construit are laturile paralele cu cele trei drepte fixe are  $M' \in d$  și  $N' \in \alpha$ , deci este unul din triunghiurile date în text.

Deci locul geometric este dreapta  $d''$  a cărei construcție am văzut cum să realizează și care trece prin  $O$ .



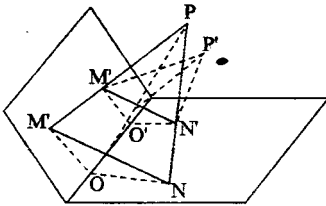
În cazul  $D \parallel \alpha$  obținem



$$\left. \begin{array}{l} d \subset \beta \\ d' \subset \alpha \\ d \parallel d' \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \cap \alpha = d'' \text{ și } d'' \parallel d$$

În acest caz locul geometric este o dreaptă paralelă cu  $d$ .

b)



Fie  $MNP$  și Fie  $M'N'P'$  a.i.

$$\left. \begin{array}{lll} MP \parallel d_1 & M'P' \parallel d_1 & MP \parallel M'P' \\ MN \parallel d_2 & M'N' \parallel d_2 & \Rightarrow MN \parallel M'N' \\ NP \parallel d_3 & N'P' \parallel d_3 & NP \parallel N'P' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle M'N'P' \Rightarrow$$

$$M \in \beta, N \in \alpha \quad M' \in \beta, N' \in \alpha$$

$$\Rightarrow (MNP) \parallel (M'N'P').$$

Presupunem  $\alpha \cap \beta = d$  și fie  $d \cap (MNP) = \{O\}$  și  $d \cap (M'N'P') = \{O'\}$   $\Rightarrow$

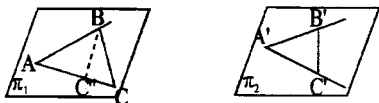
$$\left. \begin{array}{l} (MNP) \cap \beta = MO \\ (M'N'P') \cap \beta = M'O' \end{array} \right\} \Rightarrow MO \parallel M'O' \text{ un plan taie planele paralele după drepte paralele.}$$

La fel  $ON \parallel O'N'$  și cum  $MN \parallel M'N' \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle O'M'N'$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|OM\|}{\|O'M'\|} = \frac{\|ON\|}{\|O'N'\|} = \frac{\|MN\|}{\|M'N'\|} \\ \widehat{OMN} = \widehat{O'M'N'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MNP \sim M'N'P' \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\|MP\|}{\|M'P'\|} = \frac{\|MN\|}{\|M'N'\|} \\ \widehat{MNP} = \widehat{M'N'P'} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle OMP \sim \triangle O'M'P' \quad (1) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{MOP} \equiv \widehat{M'O'P'} \\ \widehat{MPO} \equiv \widehat{M'P'O'} \end{cases}$$

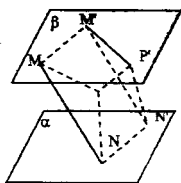
Folosim proprietatea: Fie  $\pi_1$  și  $\pi_2$  2 plane paralele și  $A, B, C, \in \pi_1$  și  $A', B', C', \in \pi_2$   $AB \parallel A'B', AC \parallel A'C', \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ ,  $\|AB\| = \|A'B'\|$ ,  $\|AC\| = \|A'C'\|$ .



Să arătăm că  $BC \parallel B'C'$ . Într-adevăr ( $BB'C'$ ) este un plan care intersectează cele 2 plane după drepte paralele.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} B'C' \parallel BC'' \\ AB \parallel A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{ABC''} \equiv \widehat{A'B'C'} \\ \text{dar } \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC''} \Rightarrow |BC| = |BC''| \Rightarrow B'C' \parallel BC.$$

Aplicînd în (1) această proprietate  $\Rightarrow OP \parallel O'P'$ . Păstrînd  $OP$  fix și lăsînd  $P'$  variabil mereu  $O'P' \parallel OP$ , deci  $O'P'$  generează un plan ce trece prin  $d$ . Presupunem  $\beta \parallel \alpha$ .



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ MN \parallel M'N' \end{array} \right\} \Rightarrow |MN| \equiv |M'N'|$$

$\Rightarrow MNN'M'$  paralelogram  
 $\Rightarrow MM' \parallel NN'$   
 $\Rightarrow MM' \parallel (NN'P'P)$   
 $\Rightarrow (\overline{MPP'M'}) \cap (\overline{MN'P'P}) = PP'$   
și  $PP' \parallel MM' \Rightarrow PP' \parallel NN'$

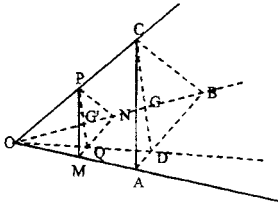
Considerînd  $P'$  fix și  $P$  variabil  $\Rightarrow PP' \parallel \alpha$  și mulțimea paralelelor duse  $PP' \parallel \beta$  la un plan printr-un punct exterior este un plan paralel cu cel dat.

Deci locul geometric este un plan paralel cu  $\alpha$  și  $\beta$ .

11) Pe muchiile  $\{OA, \{OB, \{OC$  ale unui unghi triedru se consideră respectiv punctele  $M, N, P$  a.i.  $\|OM\| = \lambda\|OA\|$ ,  $\|ON\| = \lambda\|OB\|$ ,  $\|OP\| = \lambda\|OC\|$ , unde  $\lambda$  este un număr pozitiv variabil. Să se arate locul geometric al centrului de greutate al triunghiului  $MNP$ .

**Soluție:**

$$\|OM\| = \lambda \|OA\| \Rightarrow \frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \lambda; \|ON\| = \lambda \|OB\| \Rightarrow \frac{\|ON\|}{\|OB\|} = \lambda;$$



$$\|OP\| = \lambda \|OC\|, \Rightarrow \frac{\|OP\|}{\|OC\|} = \lambda$$

În planul  $DAC$  avem:

$$\frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \frac{\|OP\|}{\|OC\|} \xrightarrow{?} PM \parallel AC.$$

În planul  $DAB$  avem:

$$\frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \frac{\|ON\|}{\|OB\|} \Rightarrow MN \parallel AB.$$

În planul  $OBC$  avem:

$$\frac{\|ON\|}{\|OB\|} = \frac{\|OP\|}{\|OC\|} \Rightarrow PN \parallel BC.$$

Din  $PM \parallel AC$  și  $PN \parallel BC \Rightarrow (MNR) \parallel (ABC)$

Fie  $Q$  și  $D$  respectiv mijloacele laturilor  $|MN|$  și  $|AB|$

$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN \sim OAB \Rightarrow \frac{\|OM\|}{\|OA\|} = \frac{\|MN\|}{\|AB\|} = \frac{\frac{1}{2}\|MN\|}{\frac{1}{2}\|AB\|} = \frac{\|MN\|}{\|AB\|} \\ \widehat{OMQ} = \widehat{OAB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OMQ \sim OAD \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{MOQ} = \widehat{AOD} \Rightarrow O, Q, D$  sunt colineare.

Dreptele concurente  $OD$  și  $OC$  determină un plan care taie planele paralele  $\Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} PQ \parallel CD \\ \text{în } (OCD) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OPQ \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{\|OP\|}{\|OC\|} = \frac{\|PQ\|}{\|CD\|} = \frac{\frac{2}{3}\|PQ\|}{\frac{2}{3}\|CD\|} = \frac{\|PG'\|}{\|CB\|} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{OPG'} \equiv \widehat{OCQ} \Rightarrow \triangle OPG' \sim \triangle OCQ \Rightarrow \widehat{POG'} \equiv \widehat{COG} \Rightarrow O, G', G$  sînt colineare deci

$G' \in |OG \Rightarrow$  locul geometric căutat este semidreapta  $|OG$ .

**Reciproc:** luăm un punct pe  $|OG$ ,  $G''$  ducem prin el un plan paralel cu  $(ABC)$ , planul  $(M'', N'', P'')$ , se formează triunghiuri asemenea și apar rapoartele din ipoteză.

12)  $ABCD$  și  $A_1B_1C_1D_1$  fiind două paralelograme oarecare în spațiu se iau punctele  $A_2, B_2, C_2, D_2$  care împart segmentele  $[AA_1], [BB_1], [CC_1], [DD_1]$  în același raport. Să se arate că  $A_2, B_2, C_2, D_2$  este un paralelogram.

**Soluție:**

$$\text{Fie } A_2, B_2, C_2, D_2 \text{ a.i. } \frac{\|AA_2\|}{\|A_2A_1\|} = \frac{\|BB_2\|}{\|B_2B_1\|} = \frac{\|CC_2\|}{\|C_2C_1\|} = \frac{\|DD_2\|}{\|D_2D_1\|} = k.$$

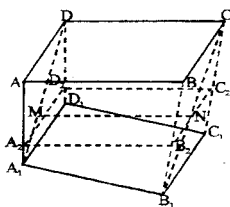
Luăm pe dreptele  $AD_1$  și  $BC_1$  punctele  $M$  și  $N$  a.i.  $M \in |AD_1|, \frac{\|AM\|}{\|MD_1\|} = k$  și

$$N \in \{BC_1\}, \frac{\|BN\|}{\|NC_1\|} = k$$

$$\text{Din } \frac{\|AA_2\|}{\|A_2A_1\|} = \frac{\|AM\|}{\|MD_1\|} = k \xrightarrow{T.Tajles} A_2M \parallel A_1D_1 \quad (1)$$

$$A_2M \parallel A_1D_1 \Rightarrow \triangle AA_2M \sim \triangle AA_1D_1 \Rightarrow \frac{\|AA_2\|}{\|AA_1\|} = \frac{\|A_2M\|}{\|A_1D_1\|}$$

Urmează



$$\frac{\|A_1M_1\|}{\|A_2D_1\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \|A_2M\| = \frac{k}{k+1} \|A_1D_1\| \quad (2)$$

$$\text{La fel } \frac{\|BB_2\|}{\|B_2B_1\|} = \frac{\|BN\|}{\|NC_1\|} = k \Rightarrow B_2N \parallel B_1C_1 \quad (3)$$

$$B_2N \parallel B_1C_1 \Rightarrow \triangle BB_1N \sim \triangle BB_1C_1,$$

$$\Rightarrow \frac{\|BB_2\|}{\|BB_1\|} = \frac{\|B_2N\|}{\|B_1C_1\|}. \text{ Cum } \frac{\|BB_2\|}{\|BB_1\|} = \frac{\|AA_2\|}{\|AA_1\|} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\text{obținem } \frac{\|B_2N\|}{\|B_1C_1\|} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \|B_2N\| = \frac{k}{k+1} \|B_1C_1\| \quad (4)$$

$$\text{Din } A_1D_1 \parallel B_1C_1 \Rightarrow \|A_1D_1\| \parallel \|B_1C_1\|$$

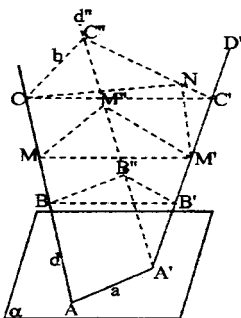
$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow A_2M \parallel B_2N \text{ și } \|A_2M\| = \|B_2N\| \Rightarrow A_2D_2NM \text{ este paralelogram.}$$

$$\Rightarrow A_2B_2 \parallel MN, \|A_2B_2\| \parallel \|MN\| \Rightarrow D_2C_2NM \text{ paralelogram.}$$

$\Rightarrow D_2C_2 \parallel MN, \|D_2C_2\| \parallel \|MN\|$  deci  $A_2B_2 \parallel D_2C_2$  și  $\|A_2D_2\| \parallel \|D_2C_2\| \Rightarrow A_2B_2C_2D_2$  paralelogram.

13) Se dau dreptele  $d, d'$  care taie un plan dat  $\alpha$  în  $A$  și  $A'$ . Să se construiască punctele  $M, M'$  situate respectiv pe  $d, d'$  a.i.  $MM' \parallel \alpha$  și segmentul  $[MM']$  să aibe o lungime dată  $l$ .  
Discuție.

**Soluție:**



Ducem prin  $A'$  o dreaptă  $d'' \parallel d$ . Ducem două plane paralele cu  $\alpha$ , care vor intersecta cele trei drepte respectiv în  $B', B'', B$  și  $C', C'', C$ . Planul  $(d, d'')$  intersectează planele  $\alpha$ ,  $(BB'B'')$ ,  $(CC'C'')$  după drepte paralele  $AA' \parallel BB'' \parallel CC''$  }  $\Rightarrow \|AA'\| = a = \|BB''\| = \|CC''\|$ .  
 $d \parallel d''$  }  $\Rightarrow \|AA'\| = a = \|BB''\| = \|CC''\|$ . Planul  $(d', d'')$  intersectează planele paralele  $(BB'B'')$ ,  $(CC'C'')$  după drepte paralele  $\Rightarrow B'B'' \parallel C'C'', BB'' \parallel CC'' \Rightarrow \widehat{BB''B'} \equiv \widehat{CC''C'}$ .

Deci  $(\forall)$  plan paralel cu  $\alpha$  pe care îl construim, triunghiul obținut are o latură construită de lungime  $a$  și unghiul corespunzător lui  $\widehat{BB''B'}$  constant. Notăm cu o linie acea poziție a plan pentru care lungimea opusă unghiului căutat este  $l$ . Cu virful compasului în  $C$  și o deschidere egală cu  $l$ , trasăm un arc de cerc care taie segmentul  $|C'C'|$  în  $N$  sau dr.  $C'C'$ . Prin  $N$  ducem în  $(d' d'')$  o paralelă la  $d''$  care întâlnește precis de  $d'$  într-un punct  $M'$ . Prin  $M'$  ducem planul  $\parallel$  la  $\alpha$  care va intersecta cele trei drepte în  $M, M', M''$ .

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} NM' \parallel C''M'' \\ C''N \parallel M''M' \end{array} \right\} \Rightarrow M''M'NC'' \text{ paralelogram}$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \|NM'\| = \|C^*M^*\| \\ NM' \parallel C^*M \\ CM \parallel C^*M^* \\ \|CM\| = \|C^*M^*\| \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left. \right\} NM' \parallel CM, \|NM'\| = \|CM\| \Rightarrow CNM'M \text{ paralelogram}$$

$\Rightarrow \|MN'\| = \|CN\| = l$  iar dreapta  $MM'$  aflându-se, într-un plan paralel cu  $\alpha$  este paralelă cu  $\alpha$ .

**Discuție:**

Presupunind planul  $(CC'C^*)$  variabil, cum  $\|CC^*\|$  și  $\widehat{CC^*C^'}$  sînt constante atunci și  $d(C, C^*C') = b = \text{constant}$

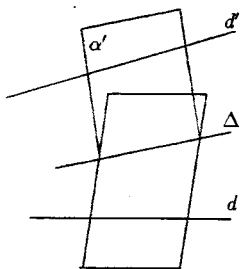
Dacă  $l < d$  nu avem soluții

Dacă  $l = d$  ( $\exists$ ) o soluție, cercul de raza  $l$ , tangent la  $C^*C'$

Dacă  $l > d$  ( $\exists$ ) două soluții: cercul de raza  $l$ , taie  $C^*C'$  în două puncte  $N$  și  $P$ .

14) Să se construiască o dreaptă care să treacă printr-un punct dat  $A$  și să fie perpendiculară pe două drepte date  $d$  și  $d'$ .

**Soluție:**



Ducem prin  $A$  planele  $\alpha \perp d$  și  $\alpha' \perp d'$

Cum  $A$  este punct comun  $\Rightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \alpha' =$

$\Delta \Rightarrow A \in \Delta.$

$d \perp \alpha \Rightarrow d \perp \Delta$

$d' \perp \alpha' \Rightarrow d' \perp \Delta$

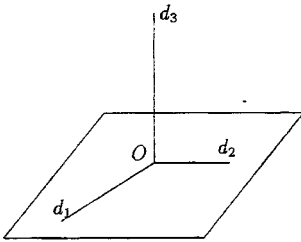
$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha \Rightarrow d \perp \Delta \\ d' \perp \alpha' \Rightarrow d' \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \text{ dreapta căutată}$

Dacă  $\alpha \neq \alpha'$  soluția este unică.

Dacă  $\alpha = \alpha'$  ( $\forall$ ) dreaptă din  $\alpha$  ce trece prin  $A$  corespunde problemei deci ( $\exists$ ) o infinitate de soluții.

15) Să se arate că există trei drepte cu un punct comun, perpendicularare două este două.

**Soluție:**



Fie  $d_1 \perp d_2$ , două drepte concurente și perpendiculare  $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ .

Ele determină un plan  $\alpha = (d_1, d_2)$  și  $O \in \alpha$ . Construim perpendiculara pe  $\alpha$  în  $O$ .

$d_3 \perp \alpha$ ,  $O \in d_3 \rightarrow d_3 \perp d_1$ ,  $d_3 \perp d_2$ .

16) Fie  $a, b, c, d$  patru drepte cu un punct comun,  $d$  fiind perpendiculară pe  $a, b, c$ . Să se arate că dreptele  $a, b, c$  sînt coplanare.

**Soluție:**

Folosim metoda reducerii la absurd.

Fie  $d \perp a$ ,  $d \perp b$ ,  $d \perp c$ . Presupunem că aceste drepte nu sunt coplanare. Fie  $\alpha = (b, c)$ ,  $\alpha' = (a, b)$ ,  $\alpha \neq \alpha'$ . Rezultă  $d \perp \alpha$ ,  $d \perp \alpha'$ .

Deci prin punctul  $O$  se pot duce 2 plane perpendiculare pe  $d$ . Fals  $\Rightarrow a, b, c$  sunt coplanare.

17) Arătați că nu există 4 drepte cu un punct comun, perpendiculare două câte două.

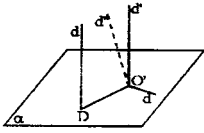
**Soluție:**(reducere la absurd)

Fie  $a \cap b \cap c \cap d = \{O\}$  și perpendiculare două câte două. Din  $d \perp a$ ;  $d \perp b$ ;  $d \perp c \Rightarrow a, b, c$  sînt coplanare și  $b \perp a$ ,  $c \perp a$  deci în punctul  $O$  se pot duce pe  $d$  două perpendiculare distincte.

Fals. Deci cele 4 drepte nu pot fi perpendiculare 2 câte 2.

18) Fie  $d \perp \alpha$  și  $d' \parallel d$ . Arătați că  $d' \perp \alpha$ .

**Soluție:**(reducere la absurd)



Presupunem că  $d \not\perp \alpha$ .

În  $d' \cap \alpha = \{O'\}$  ducem dreapta  $d'' \perp \alpha$ . Dreptele  $d'$  și  $d''$  fiind concurente determină un plan  $\beta = (d', d'')$  și cum  $O' \in \beta$ ,  $O' \in \alpha \Rightarrow$

$$\alpha \cap \beta = a \Rightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'' \perp \alpha \Rightarrow d'' \perp a & (1) \\ d \perp \alpha \Rightarrow d \perp a \\ d' \parallel d \Rightarrow d' \perp a & (2) \end{cases}$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow$  că în planul  $\beta$  pe dreapta  $a$  în punctul  $O'$  s-au dus două perpendiculare distincte. Fals. Deci  $d' \parallel \alpha$ ,

19) Să se arate că două drepte distincte perpendiculare pe un plan  $\alpha$  sunt paralele.

**Soluție:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } d \perp \alpha \\ d' \perp \alpha \\ d \neq d' \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel d'$$

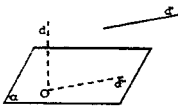
Reducere la absurd. Fie  $d \not\parallel d'$ . Ducem  $d'' \parallel d$  prin  $O'$ .

$$\left. \begin{array}{l} d'' \parallel d \\ d \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d'' \perp \alpha \\ d' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{în punctul } O' \text{ se pot duce două perpendiculare pe planul } \alpha. \text{ Fals.}$$

Deci  $d \parallel d'$ .

20) Fie  $d \perp \alpha$  și  $d' \parallel \alpha$ . Arătați că  $d' \perp d$ .

**Soluție:**



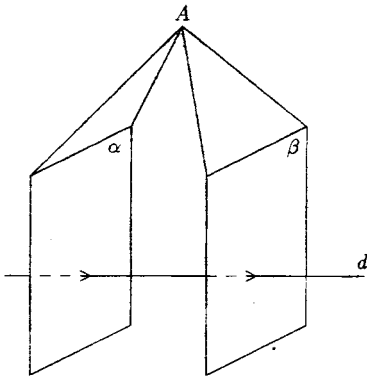
Fie  $d \perp \alpha$  și  $d' \parallel \alpha$ . Ducem prin  $O$  o paralelă la  $d'$ , care va fi conținută în  $\alpha$ , atunci  $d' \parallel \alpha$ .

$$d'' \parallel d', O \in d'' \Rightarrow d'' \subset \alpha, d \perp \alpha \Rightarrow d \perp d'' \Rightarrow d \perp d'.$$

21) Arătați că două plane perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele între ele.

**Soluție:**



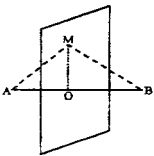


Presupunem  $\alpha \not\perp \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset$  și fie  $A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow$  printr-un punct  $A$  se pot duce două plane distincte perpendiculare pe această dreaptă. Fals.

$d \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ .

22) Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte distincte  $A$  și  $B$  este un plan perpendicular pe  $AB$ , care trece prin mijlocul  $O$  al segmentului  $[AB]$  (numit plan mediator al lui  $[AB]$ ).

**Soluție:**



Fie  $M$  un punct din spațiu cu proprietatea  $\|MA\| = \|MB\|$ .

Unim  $M$  cu mijlocul segmentului  $[AB]$  punctul  $O$ .

$\Rightarrow \triangle AMO = \triangle BMO \Rightarrow MO \perp AB$ . Deci  $M$  se află pe o dreaptă dusă prin  $O$ , perpendiculara pe  $AB$ .

Dar reuniunea tuturor perpendicularelor duse prin  $O$  pe  $AB$  este planul perpendicular pe  $AB$  în punctul  $O$ , notat cu  $\alpha$ , deci  $M \in \alpha$ .

**Reciproc:** fie  $M \in \alpha$

$d = AB \perp \alpha \Rightarrow d \perp MO$

$|AO| \equiv |OB|$

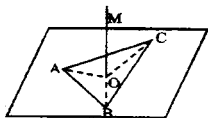
$|MO|$  latură comună

$MO \perp AB$

$\Rightarrow \triangle AMO \equiv \triangle BMO \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$ .

23) Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de vîrfurile unui triunghi  $ABC$ .

**Soluție:**



Fie  $M$  un punct din spațiu cu această proprietate

$$\|MA\| = \|MB\| = \|MC\|$$

Fie  $O$  centrul cercului circumscris  $\triangle ABC \Rightarrow \|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$ , deci  $O$  este și el un punct al locului geometric căutat.

Conform problemei precedente locul geometric al punctelor din spațiu egal

depărtate de  $A$  și  $B$  se află în planul mediator al segmentului  $[AB]$  care conține și pe  $M$ . Notăm cu  $\alpha$  acest plan. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de  $B$  și de  $C$  se află în planul mediator al segmentului  $[BC]$ , notăm  $\beta$ , care conține și pe  $O$  și pe  $M$ .

Deci  $\alpha \cap \beta = OM$ .

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \Rightarrow AB \perp OM \\ BC \perp \alpha \Rightarrow BC \perp OM \end{array} \right\} \Rightarrow OM \perp (ABC)$$

deci  $M \in$  perpendicularei pe planul  $(ABC)$  în centrul cercului circumscris  $\triangle ABC$ .

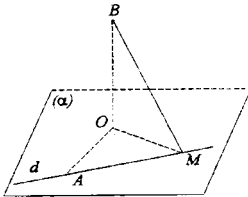
Reciproc, fie  $M \in$  acestei perpendiculare

$$\left. \begin{array}{l} OM \perp OA \\ OM \perp OB \\ OM \perp OC \\ \|OA\| = \|OB\| = \|OC\| \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMA \equiv \triangle OMB \equiv \triangle OMC \Rightarrow \|AM\| = \|BM\| =$$

$\|CM\|$ , deci  $M$  are proprietate din enunț.

23) Se dau planul  $\alpha$  și punctele  $A \in \alpha$ ,  $B \notin \alpha$ . O dreaptă variabilă  $d$  trece prin  $A$  și este conținută în planul  $\alpha$ . Să se afle locul geometric al picioarelor  $\perp$  din  $B$  pe  $d$ .

**Soluție:**



Ducem  $\perp$  din  $B$  pe plan. Fie  $O$  piciorul acestei perpendiculare.

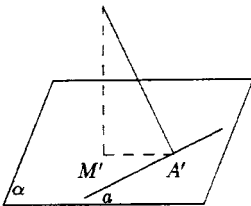
$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } BM \perp d \\ BO \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow MO \perp d \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\widehat{OMA}) = 90^\circ \Rightarrow M \in$  cercului de diametru  $OA$ . Reciproc, fie  $M \in$  acestui cerc  $\Rightarrow OM \perp AM$ ,  $BO \perp \alpha \Rightarrow BM \perp AM \Rightarrow BM \perp d$ , deci  $M$  reprezintă piciorul din  $B$  pe  $AM$ .

24) Se dau: dreapta  $a$ , punctul  $A \notin a$ . Se cere locul geometric al picioarelor perpendicularelor din  $A$  pe planele care trec prin  $a$ .

**Soluție:**

Fie  $\alpha$  un plan care trece prin  $a$  și fie  $M$  piciorul  $\perp$  din  $A$  pe  $\alpha \Rightarrow AM \perp \alpha$ .



Din  $AM \perp \alpha$  }  $\Rightarrow MA' \perp a$ , deci  $M \in$  unei perpendiculare pe  $a$  în  $A'$ , deci aparține planului perpendicular pe  $a$  în  $A'$  pe care-l notăm cu  $\pi$  și care-l conține și pe  $A$ .

$AM \perp \alpha \Rightarrow AM \perp MA' \Rightarrow M \in$  cercului de diametru  $AA'$  din planul  $\pi$ .

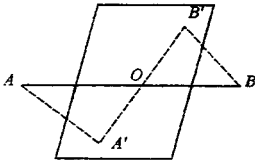
\* Reciproc, fie  $M$  un punct de pe acest cerc de diametru  $AA'$  din planul  $\pi$ .

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} MA' \perp \alpha \\ AA' \perp a \\ AM \perp MA' \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (M, a) \Rightarrow M \text{ este piciorul unei } \perp \text{ duse din } A \text{ pe un plan ce trece prin } a.$$

25) Se consideră un plan  $\alpha$  care trece prin mijlocul unui segment  $[AB]$ . Să se arate că

punctele  $A$  și  $B$  sînt egal depărtate de planul  $\alpha$ .

**Soluție:**

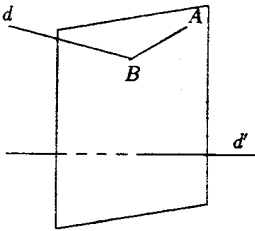


În planul  $\beta$  avem

$$\left. \begin{array}{l} \|OA\| = \|OB\| \\ \widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'} \\ \triangle \text{ dreptunghic} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOA' \equiv \triangle BOB' \Rightarrow \|AA'\| = \|BB'\|$$

26) Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să intersecțeze o dreaptă dată și să fie  $\perp$  pe o altă dreapta dată.

**Soluție:**



Fie  $d, d'$  dreptele date,  $A$  punctul dat. Ducem prin  $A$  planul  $\alpha \perp$  pe  $d'$ .

Dacă  $a \cap \alpha = \{B\}$ , atunci dreapta  $AB$  este cea căutăată căci trece prin  $A$ , întilnește pe  $d$  și din  $d' \perp \alpha \Rightarrow d' \perp AB$ . Dacă  $d \cap \alpha = \emptyset$  nu sînt soluții.

Dacă  $d \subset \alpha$ , atunci orice dreaptă determinată de  $A$  și un punct al lui  $d$  reprezintă soluție a problemei, deci o infinitate de soluții.

27) Fie  $\alpha$  și  $\beta$  două plane distincte, a căror intersecție este dreapta  $d$  și fie  $M$  un punct nesituat în  $\alpha \cup \beta$ . Se duc dreptele  $MM_1$  și  $MM_2 \perp$  respectiv pe  $\alpha$  și  $\beta$ . Să se arate că dreapta  $d$  este  $\perp$  pe  $(MM_1M_2)$ .

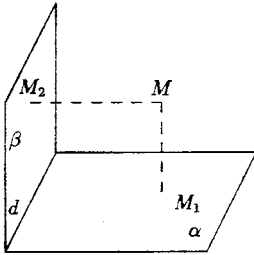
**Soluție :**

Fie  $A'$  și  $B'$  picioarele perpendicularelor din  $A$  și  $B$  pe  $\alpha$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp \alpha \\ BB' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists)$  un plan  $\beta = (AA', BB')$  și  $AB \subset \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} O \in \beta \\ O \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow O \in \alpha \cap \beta = A'B' \Rightarrow O, A', B'$   
sînt colineare.

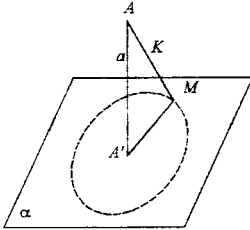


$$\alpha \cap \beta = d \Rightarrow \begin{cases} d \subset \alpha \\ d \subset \beta \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} MM_1 \perp \alpha &\Rightarrow MM_1 \perp d \\ MM_2 \perp \beta &\Rightarrow MM_2 \perp d \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \perp (MM_1M_2)$$

28) Se dau un plan  $\alpha$  și un punct  $A$ ,  $A \notin \alpha$ . Să se afie locul geometric al punctelor  $M \in \alpha$  astfel că segmentul  $|AM|$  să aibă a lungime dată.

**Soluție:**



Fie  $M$  un punct a.î.  $\|AM\| = k$ .

Ducem  $AA' \perp \alpha \Rightarrow A'$  punct fix și  $AA' \perp A'M$

Notăm  $\|AA'\| = a$ .

$$\text{Atunci } \left. \begin{aligned} \|AM\| &= \sqrt{k^2 - a^2} = ct \\ A^2 &- \text{fix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$M \in$  unui cerc cu centrul în  $A'$  și de rază  $\sqrt{k^2 - a^2}$ ,  
pentru  $k > a$ .

Pentru  $k = a$  obținem 1 punct.

Pentru  $k < a$  mulțime vidă.

$$\text{Reciproc, fie } M \text{ un punct pe acest cerc } \Rightarrow \left. \begin{aligned} \|A'M\| &= \sqrt{k^2 - a^2} \\ \|AA'\| &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|AM\| =$$

$$= \sqrt{k^2 - a^2 + a^2} = k \text{ deci } M \text{ are proprietatea din enunț.}$$

29) Fie  $O, A, B, C$  patru puncte a.î.  $OA \perp OB \perp OC \perp DA$  și se notează  $a = \|OA\|$ ,  $b = \|OB\|$ ,  $c = \|OC\|$ .

1) Să se calculeze lungimile laturilor  $\triangle ABC$  în funcție de  $a, b, c$ .

2) Să se calculeze  $\sigma[ABC]$  și să se demonstreze relația  $\sigma[ABC]^2 = \sigma[DAB]^2 + \sigma[OBC]^2 + \sigma[OCA]^2$ .

3) Să se arate că proiecția ortogonală a punctului  $O$  pe planul  $(ABC)$  este ortocentrul

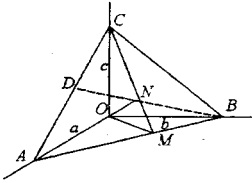
$H$  al  $\triangle ABC$ .

4) Să se calculeze distanța  $\|OH\|$ .

**Soluție:**

1)  $\|AB\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\|BC\| = \sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $\|CA\| = \sqrt{a^2 + c^2}$

2) Ducem  $\left. \begin{array}{l} OM \perp AB \\ CO \perp (OAB) \end{array} \right\} \Rightarrow CM \perp AB$



În  $\triangle OCM$

$$\|CM\| = \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{c^2 a^2 + c^2 b^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}}$$

$$\sigma[ABC] = \frac{\|AB\| \cdot \|CM\|}{2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{a^2 c^2 + c^2 b^2 + a^2 b^2}{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^2[ABC] = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{4}$$

Dar  $\sigma[OAB] = \frac{ab}{2}$

$\alpha[BOC] = \frac{bc}{2}$ ;  $\sigma[COA] = \frac{ac}{2}$

Deci  $\sigma^2[ABC] = \frac{a^2 b^2}{4} + \frac{a^2 c^2}{4} + \frac{b^2 c^2}{4} = \sigma^2[AOB] + \sigma^2[DOC] + \sigma^2[COA]$ .

3) Fie  $H$  proiecția lui  $O$  pe planul  $ABC$ , deci  $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC$

$$\left. \begin{array}{l} OC \perp DA \\ OC \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$$

$\Rightarrow AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp CH \Rightarrow H \in$  înălțimi corespunzătoare laturii  $AB$ .

La fel se arată că  $AC \perp BH$  și deci  $H$  este punctul de intersecție al înălțimilor, deci ortocentrul.

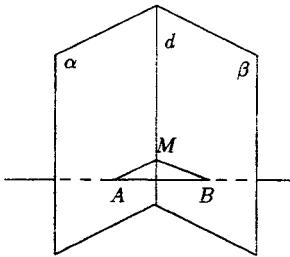
4)  $\|OH\| \cdot \|CM\| = \|OC\| \cdot \|OM\| \Rightarrow OH \cdot \sqrt{\frac{a^2 c^2 + c^2 b^2 + b^2 a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|OH\| = \frac{\frac{cab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{\frac{a^2 c^2 + c^2 b^2 + b^2 a^2}{a^2 + b^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}$$

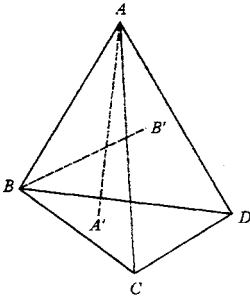
30) Se consideră punctele necoplanare  $A, B, C, D$  și dreptele  $AA', BB', CC', DD'$  perpendiculare respectiv pe  $(BCD), (ACD), (ABD)$ . Să se arate că dacă dreptele  $AA'$  și  $BB'$

sînt concurente, atunci dreptele  $CC'$ ,  $DD'$  sînt coplanare.

**Soluție :**



Revenim la problema dată.



Arătăm întîi că dacă o dreaptă este  $\perp$  pe două plane concurente  $\Rightarrow$  planele coincid.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Fie  $A = a \cap \alpha$ ,  $B = a \cap \beta$ ,  $M \in d$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \Rightarrow a \perp AM \\ a \perp \beta \Rightarrow a \perp BM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \text{ are 2 unghiuri drepte.}$$

Fals.

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD \\ BB' \perp (ACD) \Rightarrow BB' \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (AA', BB')$$

care fiind concurente determină un plan  $\Rightarrow CD \perp AB$ .

$$CC' \perp (ABD) \Rightarrow CC' \perp AB$$

$$DD' \perp (ABC) \Rightarrow DD' \perp AB$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp CD \\ AB \perp DD' \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (CDD')$$

$$(CDC') \cap (CDD') = CD$$

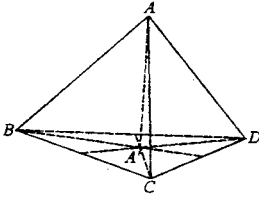
$$\left. \begin{array}{l} AB \perp CD \\ AB \perp CC' \end{array} \right\} \Rightarrow AB' \perp (CDC')$$

pr. de la  
incoercut

$\Rightarrow (CDC') = (CDD') \Rightarrow C, D, C', D'$  sînt coplanare  $\Rightarrow CC'$  și  $DD'$  sînt coplanare.

31) Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare. Să se arate că  $AB \perp CD$  și  $AC \perp BD \Rightarrow AD \perp BC$ .

**Soluție:**



Ducem  $AA' \perp (BCD)$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BC \\ AB \perp DC \end{array} \right\} \Rightarrow DC \perp (ABA') \Rightarrow DC \perp BA'$$

$$\Rightarrow BA' \text{ înălțime în } \triangle BCD \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BD \\ AC \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C$$

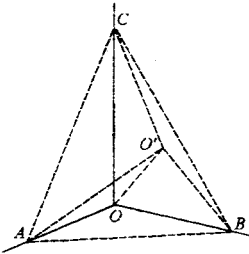
$$\Rightarrow A'C \text{ este înălțime în } \triangle ABC \quad (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow A'$  este ortocentrul  $\triangle ABC \Rightarrow OA' \perp BC$

$$\left. \begin{array}{l} DA' \perp BC \\ AA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (DAA') \Rightarrow BC \perp AD$$

32) Pe muchiile unui unghi cu vârful  $O$  se iau punctele  $A, B, C$ , a.î.  $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$ . Să se arate că piciorul  $\perp$  din  $O$  pe planul  $(ABC)$  coincide cu punctul de intersecție al mediatoarelor  $\triangle ABC$ .

**Soluție:**



$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } OO' \perp (ABC) \Rightarrow OO' \perp AO' \\ OO' \perp BO' \\ OO' \perp CO' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOO',$$

$\triangle BOO'$  și  $\triangle COO'$  sînt dreptunghice în  $O'$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } |OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \\ |OO'| \text{ latură comună} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

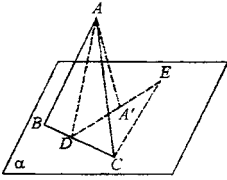
$$\Rightarrow \triangle AOO' \equiv \triangle BOO' \equiv \triangle COO'$$

$$\Rightarrow \|OA\| = \|BO'\| = \|CO'\| \Rightarrow O' \text{ este centrul cercului circumscris } \triangle ABC.$$

33) Fie vârful  $A$  al triunghiului isoscel  $ABC$  ( $|AB| \equiv |AC|$ ) se proiectează ortogonal în  $A'$  pe un plan  $\alpha$  care trece prin  $BC$ . Arătați că  $\widehat{BA'C} > \widehat{BAC}$ .

**Soluție:**





Fie  $D$  mijlocul lui  $[BC]$  și  $E \in |DA'$  a.i.

$$\|DE\| = \|DA\|$$

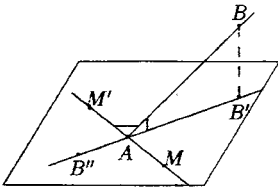
$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ mediană în } \triangle \text{ isoscel} \Rightarrow AD \perp BC \\ AA' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow A'D \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} |AD| \equiv |DE| \\ |DC| \text{ comună} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle DCE \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{DEC}$$

$$\widehat{DA'C} > \widehat{DEC} \text{ fiind exterior } \triangle CA'E \Rightarrow \widehat{DAC} > \widehat{BAC} \Rightarrow 2\widehat{DA'C} > 2\widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{BA'C} > \widehat{BAC}.$$

34) Cu notațiile teoremei 1, fie  $[AB'$  semidreapta opusă lui  $[AB''$ . Să se arate că pentru orice punct  $M \in \alpha - [AB''$  avem  $B''\widehat{AB} > M\widehat{AB}$ .

**Soluție:**



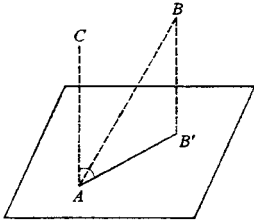
Fie  $M$  un punct în plan și  $[AM'$  semidreapta opusă lui  $AM$ .

$$\begin{aligned} \text{Conform teoremei 1} &\Rightarrow B'\widehat{AB} < M\widehat{AB} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m(B'\widehat{AB}) < M\widehat{AB} \Rightarrow m(B'\widehat{AB}) < m(M'\widehat{AB}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -m(B'\widehat{AB}) > -m(M'\widehat{AB}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - m(B'\widehat{AB}) > 180^\circ - m(M'\widehat{AB}) \Rightarrow m(B''\widehat{AB}) > m(M\widehat{AB}) \Rightarrow B''\widehat{AB} > M\widehat{AB}.$$

35) Fie  $\alpha$  un plan,  $A \in \alpha$  și  $B$  și  $C$  două puncte de aceeași parte a lui  $\alpha$  a.i.  $AC \perp \alpha$ . Arătați că  $C\widehat{AB}$  este complement al unghiului format de  $[AB$  cu  $\alpha$ .

**Soluție:**



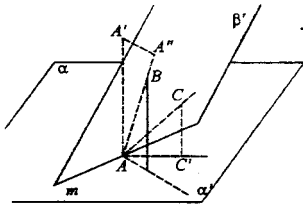
Proiectăm  $B$  pe plan  $\Rightarrow BB' \perp \alpha$  }  
 $AC \perp \alpha$  }  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC$  și  $BB'$  determină un plan  $\beta = (AC, BB')$   $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \subset \beta$  și în acest plan  $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ -$   
 $-m(\widehat{BAB'})$

36) Fie  $\alpha' \beta'$  un unghi triedru cu muchia  $m$  și  $A \in m$ . Să se arate că dintre toate semidreptele cu originea  $A$  și conținute în semiplanul  $\beta'$ , aceea formează unghiul cel mai mare posibil cu planul  $\alpha$ , care este  $\perp p \in m$  (suportul ei se numește dreapta de cea mai mare pantă a lui  $\beta$  față de  $\alpha$ ).

Soluție:



Fie semidreapta  $|AB \subset \beta'$  a.i.  $AB \perp m$ . Fie  $|AC$  o altă semidreaptă a.i.  $|AC \subset \beta'$ . Ducem  $BB' \perp \alpha$  și  $CC' \perp \alpha$  pentru a obține unghiul celor 2 semidrepte cu  $\alpha$  și anume  $\widehat{BAB'} > \widehat{CAC'}$ . Ducem semidreapta  $|AA'$  a.i.  $AA' \perp \alpha$  și să se afle de aceeași parte a planului  $\alpha$  ca și semiplanul  $\beta'$ .

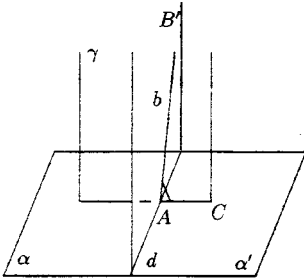
$AA' \perp \alpha \Rightarrow AA' \perp m$  }  
 $AB \perp m$  }  $\Rightarrow A'A'' \perp \beta' \Rightarrow |AB$  este proiecția semidreptei  $|AA'$  pe planul  
 $A'A'' \perp AB$  }

$\beta \stackrel{!}{\Rightarrow} \widehat{A'AB} < \widehat{A'AC} \Rightarrow m(\widehat{A'AB}) < m(\widehat{A'AC}) \Rightarrow -m(\widehat{A'AB}) > -m(\widehat{A'AC}) \Rightarrow 90^\circ -$   
 $-m(\widehat{A'AB}) > 90^\circ - m(\widehat{A'AC}) \Rightarrow \widehat{BAB'} > \widehat{CAC'}$

37) Fie  $\alpha$  un plan,  $\sigma$  un semispațiu închis, limitat de  $\alpha$ ,  $\alpha'$  un semiplan conținut în  $\alpha$  și  $a$  un număr real, cuprins între  $0^\circ$  și  $180^\circ$ . Să se arate că există un singur semiplan  $\beta'$  având

frontiera comună cu  $\alpha'$  a.i.  $\beta' \subset \sigma$  și  $m(\alpha'\beta') = a$ .

**Soluție:**



Fie  $d$  frontiera lui  $\alpha'$  și  $A \in d$ . Ducem un plan  $\perp$  pe  $d$  în  $A$  pe care-l notăm cu  $\gamma$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \cap c = c \\ d \perp \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp c$$

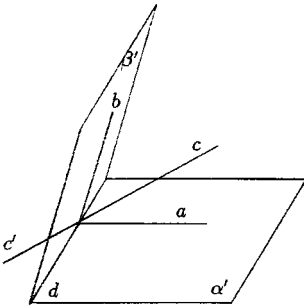
În acest plan există o singură semidreaptă  $b$ , cu originea în  $A$ , a.i.  $m(\widehat{c, b}) = a$ .

Semiplanul determinat de  $d$  și semidreapta  $b$  este cel căutat, căci

$$\left. \begin{array}{l} \text{din } d \perp \gamma \Rightarrow d \perp b \\ d \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow m(\alpha'\beta') = m(\widehat{b, c}) = a.$$

38) Fie  $(\alpha'\beta')$  un unghi diedru propriu. Construieți un semiplan  $\gamma'$  a.i.  $m(\alpha'\beta') = m(\gamma'\beta')$ . Arătați că problema are două soluții dintre care una este situată în  $\text{int.}\alpha'\beta'$  (numit semiplan bisector al lui  $\alpha'\beta'$ ).

**Soluție:**



Fie  $d$  muchia diedrului și  $A \in d$ . Ducem  $a \perp d$ ,  $a \subset \alpha'$  și  $b \perp d$ ,  $b \subset \beta'$  două semidrepte cu originea în  $A$ . Rezultă  $d \perp (ab)$ . Ducem în planul  $(a, b)$  semidreapta  $c$  a.i.  $m(\widehat{ac}) = m(\widehat{cb})$  (1)

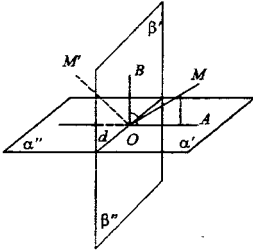
Cum  $d \perp (ab) \Rightarrow d \perp c$

$$\left. \begin{array}{l} m(\alpha'\gamma') = m(\widehat{a, c}) \\ m(\gamma'\beta') = m(\widehat{c, b}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha'\gamma') = m(\gamma'\beta'). \text{ Dacă vom}$$

considera semidreapta opusă lui  $c$ ,  $c'$ , semiplanul  $\gamma'' = (d, c')$  formează de asemenea unghiuri concurente cu cele două semiplane, fiind suplementele celorlalte.

39) Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane secante  $\alpha, \beta$  este format din două plane  $\perp$ , și anume din reuniunea planelor bisectoare ale unghiurilor diedre de  $\alpha$  și  $\beta$ .

**Soluție:**



Fie  $M$  un punct din spațiu egal depărtat de semiplanele  $\alpha', \beta' \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp \alpha \Rightarrow MA \perp d \\ MB \perp \beta \Rightarrow MB \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (MAB),$$

unde  $d = \alpha \cap \beta$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } d \cap (MAB) = \{O\} \Rightarrow d \perp OA \\ \phantom{\text{Fie } } \phantom{d \cap (MAB) = \{O\}} \Rightarrow d \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow m(\alpha' \beta') = m(\widehat{AOB}).$$

$$\left. \begin{array}{l} |MA| = |MB| \\ |OM| \text{ latura comună} \\ \text{triunghi drept.} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MOA \equiv \triangle MOB \Rightarrow \widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB} \Rightarrow M \in \text{bisectoarei unghiului}$$

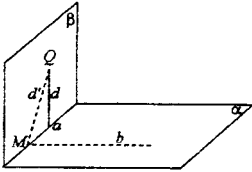
$\widehat{AOB} \Rightarrow M \in$  semiplanului bisector al unghiului semiplanelor  $\alpha', \beta'$ .

Dacă  $M'$  este egal depărtat de semiplanele  $\beta'$  și  $\alpha''$  se va arăta la fel ca  $M' \in$  semiplanului bisector al acestor semiplane. Presupunem că  $M$  și  $M'$  se află în acest plan  $\perp$  pe  $d$ , observăm că  $m(\widehat{OMM'}) = 90^\circ$ , deci cele două semiplane sînt  $\perp$ . Considerînd și celelalte 2 unghiuri diedre se obțin 2 plane perpendiculare, cele 2 plane bisectoare.

**Reciproc:** se arată ușor că un punct din aceste plane este egal depărtat de planele  $\alpha$  și  $\beta$ .

40) Dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sînt 2 plane  $\perp$ ,  $Q \in \beta$  și  $d \perp$  prin  $Q$  pe  $\alpha$ . Să se arate că  $d \subset \beta$ .

**Soluție:**



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ Q \in \beta \\ d \perp \alpha \\ Q \in d \end{array} \right\} \Rightarrow d \subset \beta.$$

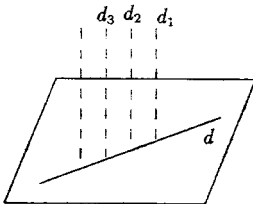
Fie  $\alpha \cap \beta = a$ . În planul  $\beta$  ducem  $d' \perp a$ ,  $Q \in d'$ .

Cum  $\alpha \perp \beta \Rightarrow m(\widehat{d'b}) = 90^\circ \Rightarrow d' \perp b$   
 $d' \perp a$  }  $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d' \perp \alpha \\ \text{dar } d \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d = d'$  pentru ca dintr-un punct să se poată duce pe un plan o singură perpendiculară.

Cum  $d' \subset \beta \Rightarrow d \subset \beta$ .

41) Se consideră o dreaptă  $d \subset \alpha$ . Arătați că reuniunea dreptelor  $\perp$  pe  $\alpha$ , care intersectează dreapta  $d$ , este un plan  $\perp \alpha$ .

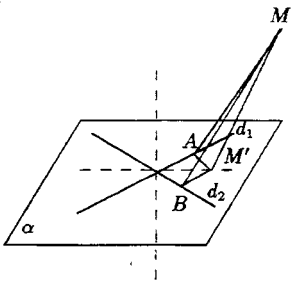
**Soluție:**



Fie  $d_1 \perp \alpha$   
 $d_2 \perp \alpha$   
 $d_3 \perp \alpha$  }  $\Rightarrow d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow$  dreapta cu aceeași direcție. Se știe că reuniunea dreptelor care au aceeași direcție și se sprijină pe o dreaptă dată este un plan. Cum acest plan conține o perpendiculară pe  $\alpha$ , el este perpendicular pe  $\alpha$ .

42) Să se afle locul geometric al punctelor situate la egală distanță de două drepte concurente.

**Soluție:**



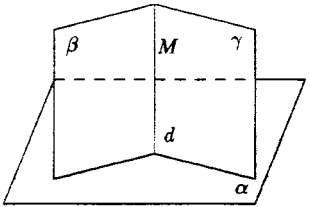
Fie  $\alpha = (d_1, d_2)$  planul celor două drepte concurente și  $M$  un punct cu proprietatea că  $d(M, d_1) = d(M, d_2)$ .  
 Ducem  $MA \perp d_1$ ,  $MB \perp d_2 \Rightarrow \|MA\| = \|MB\|$ . Fie  $M' = \text{pr}_\alpha M \Rightarrow \triangle MAM' \equiv \triangle MBM' \Rightarrow \|M'A\| = \|M'B\| \Rightarrow M' \in$  unei bisectoare a unghiului format de cele două drepte, iar  $M$  aflându-se pe o dreaptă  $\perp \alpha$  ce întâlnește o bisectoare  $\xrightarrow{\text{pr.5}} M \in$  unui plan  $\perp \alpha$  și care intersectează pe  $\alpha$  după o bisectoare. Deci locul geometric

va fi format din două plane  $\perp \alpha$  și care intersectează pe  $\alpha$  după cele 2 bisectoare ale unghiului formate de  $d_1$  și  $d_2$ . Cele două plane sînt și  $\perp$  între ele.

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \|M'A\| = \|M'B\| \\ \|MM'\| \text{ lat. com.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA \perp d_1 \text{ și la fel } MB \perp d_2 \Rightarrow M \text{ are proprietatea din enunț.}$$

43) Arătați că un plan  $\alpha \perp$  pe 2 plane secante este  $\perp$  pe intersecția lor.

**Soluție:**

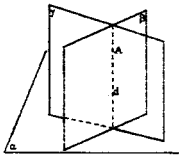


Fie  $\beta \cap \gamma = d$  și  $M \in d \Rightarrow M \in \beta$ ,  $M \in \gamma$ . Ducem  $\perp$  din  $M$  pe  $\alpha$ , dreapta  $d'$ .

$$\text{Conform problemei 4} \Rightarrow \left. \begin{aligned} d' \subset \beta \\ d' \subset \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \perp \alpha.$$

44) Fie  $A$  un punct nesituat în planul  $\alpha$ . Să se afle intersecția tuturor planelor care conțin punctul  $A$  și sînt  $\perp$  pe planul  $\alpha$ .

**Soluție:**



Fie  $\beta$  și  $\gamma$  astfel de plane, adică  $A \in \beta$ ,  $\beta \perp \alpha$   
 $A \in \gamma$ ,  $\gamma \perp \alpha$

$\left. \begin{aligned} \text{Din } A \in \beta \\ A \in \gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta \cap \gamma \neq \emptyset \Rightarrow$  sînt plane secante și  $\perp$  pe  $\alpha \xrightarrow{\text{pr.1}} \alpha \perp (\beta \cap \gamma) = d$ ,  $A \in d$ . Deci intersecția lor este  $\perp$  prin  $A$  pe planul  $\alpha$ .

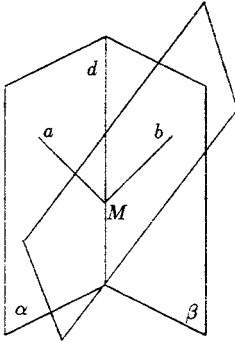
45) Duceți printr-un punct dat un plan  $\perp$  pe 2 plane date.

**Soluție:**

Se proiectează punctul pe cele 2 plane și planul căutat este determinat de cele două perpendiculare.

46) Intersectați un unghi diedru cu un plan a.f. unghiul de secțiuni să fie drept.

**Soluție:**

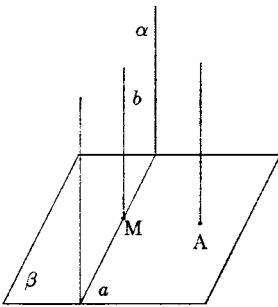


Fie  $\alpha \cap \beta = d$  și  $M \in d$ . Considerăm a semidreaptă cu originea în  $M$ ,  $a \in \alpha$  și construim un plan  $\perp$  pe  $a$  în  $M$ , planul  $\gamma$ .

Întrucit  $M \in \beta$   
 $M \in \gamma$  }  $\Rightarrow \beta \cap \gamma \neq \emptyset$  și fie o semidreapta cu originea în  $M$ ,  $b \subset \beta \cap \gamma \Rightarrow b \subset \beta$ ,  $b \subset \gamma$ . Cum  $a \perp \gamma \Rightarrow a \perp b$  și planul căutat este cel determinat de semidreptele  $(a, b)$ .

47) Arătați că o dreaptă  $d$  și un plan  $\alpha$ , perpendiculare pe un alt plan sînt paralele între ele sau dreapta  $d$  este conținută în  $\alpha$ .

**Soluție:**



Fie  $\alpha \cap \beta = a$  și  $d \cap \beta = \{A\}$ .

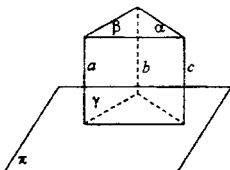
Presupunem că  $A \notin a$ . Fie  $M \in a$ , construim  $b \perp \beta$ ,  $M \in b \Rightarrow b \subset \alpha$ .

$b \perp \beta$ ,  $d \perp \beta \Rightarrow d \parallel b \Rightarrow d \parallel \alpha$ .

Dacă  $A \in a$  }  $\Rightarrow d \subset \alpha$ .  
 $d \perp \beta$

48) Dacă 3 plane  $\perp$  pe un plan se intersectează două cîte două după dreptele  $a, b, c$  arătați că  $a \parallel b \parallel c$ .

**Soluție:**



$$\alpha \cap \gamma = b$$

$$\alpha \cap \beta = c$$

$$\gamma \cap \beta = a$$

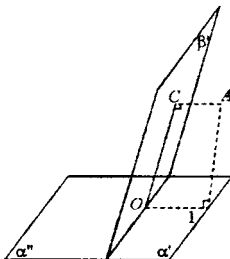
$$\left. \begin{array}{l} \pi \perp \alpha \\ \pi \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \perp c \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi \perp \alpha \\ \pi \perp \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \perp b \quad (2) \quad \left. \begin{array}{l} \pi \perp \beta \\ \pi \perp \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \perp a \quad (3)$$

Din (1), (2), (3)  $\Rightarrow a \parallel b \parallel c$ .

49) Dintr-un punct  $A$  se duc perpendicularele  $AB$  și  $AC$  pe planele fețelor unui unghi diedru  $\alpha' \beta'$ . Să se arate că  $m(\widehat{BAC}) = m(\alpha' \beta')$  sau  $m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha' \beta')$ .

**Soluție:**



Fie  $A \in \text{int}(\alpha' \beta')$ ,  $\alpha \cap \beta = d$

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \alpha \Rightarrow AB \perp d \\ AC \perp \beta \Rightarrow AC \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \cap (ABC) = \{O\} \\ d \perp OC \\ d \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow m(\alpha' \beta') = m(\widehat{BOC})$$

$$\left. \begin{array}{l} m(\widehat{ABO}) = 90^\circ \\ m(\widehat{ACO}) = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{BAC}) + m(\alpha' \beta') = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow m(\alpha' \beta') = 180^\circ - m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha' \beta')$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fie } A \in \text{int}(\alpha'' \beta''). \text{ Se arată la fel că } m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha'' \beta'') \\ m(\alpha'' \beta'') = 180^\circ - m(\alpha' \beta') \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - 180^\circ + m(\alpha' \beta') = m(\alpha' \beta').$$

$$\text{Dacă } A \in \text{int}(\alpha'' \beta'') \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - m(\alpha' \beta').$$

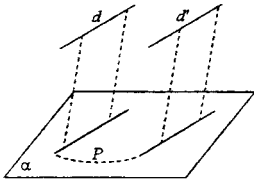
$$\text{Dacă } A \in \text{int}(\alpha' \beta') \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = m(\alpha' \beta').$$



## PROIECȚII

1) Să se arate: dacă dreptele  $d$  și  $d'$  sînt paralele, atunci  $pr_\alpha d \parallel pr_\alpha d'$  sau  $pr_\alpha d = pr_\alpha d'$ .  
Ce putem spune despre planele proiectante ale lui  $d$  și  $d'$ .

**Soluție:**



Fie  $d \parallel d'$ ,  $\beta$  planul proiectant al lui  $d$ .

a) Presupunem  $d' \not\subset \beta$ , adică planul  $d, d' \not\perp \alpha \Rightarrow$  planul proiectant al lui  $d'$  este atunci  $\beta'$ . Vrem să arătăm că  $pr_\alpha d \parallel pr_\alpha d'$ . Presupunem prin observații că  $pr_\alpha d \cap pr_\alpha d' = \{P\} \Rightarrow (\exists)M \in d$  a.i.  $pr_\alpha M = P$  și  $(\exists)M' \in d'$  a.i.  $pr_\alpha M' = P$ .

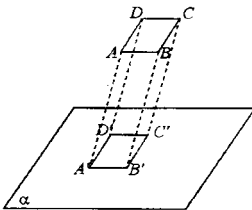
$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} PM \perp \alpha \\ PM' \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$  în punctul  $P$  pe planul  $\alpha$  se pot duce 2 perpendiculare distincte. Fals.

Dacă  $\beta$  este planul proiectant al lui  $d$  și  $\beta'$  al lui  $d'$ , atunci  $\beta \parallel \beta'$ , căci dacă ar avea un punct comun proiecțiile lor ar trebui să aparțină și  $pr_\alpha d$  și  $pr_\alpha d'$  și deci n-ar mai fi paralele.

b) Dacă  $d' \subset \beta$  sau  $d \subset \beta'$ , adică  $(d, d') \perp \alpha \Rightarrow d$  și  $d'$  au același plan proiectant  $\Rightarrow pr_\alpha d = pr_\alpha d'$ .

2) Arătați că proiecția unui paralelogram pe un plan este un paralelogram sau un segment.

**Soluție:**



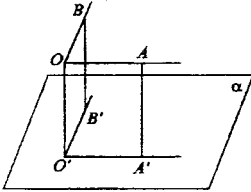
a) Presupunem că  $(ABCD) \not\perp \alpha$ . Fie  $A', B', C', D'$  respectiv proiecțiile punctelor  $A, B, C, D$ .

$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DC \xrightarrow{pr} A'B' \parallel D'C' \\ AD \parallel BC \Rightarrow A'D' \parallel B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow A'B'C'D' \text{ paralelogram.}$

b) Dacă  $(ABCD) \perp \alpha \Rightarrow$  proiecțiile  $A', B', C', D' \in$  dreptei  $(ABCD) \cap \alpha \Rightarrow$  proiecția paralelogramului este un segment.

3) Știind că latura  $[OA$  a unghiului drept  $AOB$  este paralelă cu un plan  $\alpha$ , să se arate că proiecția pe planul  $\alpha$  a unghiului  $\widehat{AOB}$  este un unghi drept.

Soluție:

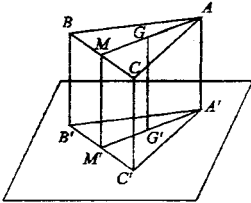


Dacă  $OA \parallel \alpha \Rightarrow \text{pr}_{\alpha} OA \parallel OA \Rightarrow O'A' \parallel OA$  întrucit  
( $\forall$ ) plan ca trece prin  $OA$  taie planul  $\alpha$  după o paralelă la  $OA$ .

$$\left. \begin{array}{l} OO' \perp O'A' \\ O'A' \parallel OA \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OA \perp OO' \\ OA \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OA \perp (OO'B) \\ O'A' \parallel OA \end{array} \right\} \Rightarrow O'A' \perp (OO'B) \Rightarrow \\ \Rightarrow O'A' \perp O'B' \Rightarrow \widehat{A'O'B'} \text{ unghi drept.}$$

4) Fie  $A'B'C'$  proiecția  $\triangle ABC$  pe un plan  $\alpha$ . Arătați că centrul de greutate al  $\triangle ABC$  se proiectează în centrul de greutate al  $\triangle A'B'C'$ . Este valabil un rezultat analog pentru ortocentru?

Soluție:



În trapezul  $BCC'B'$  ( $BB' \parallel CC'$ )

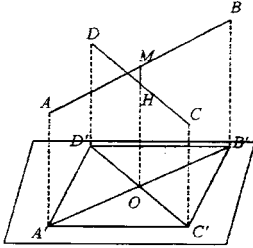
$$\left. \begin{array}{l} |BM| \equiv |MC| \\ MM' \parallel BB' \end{array} \right\} \Rightarrow |B'M'| \equiv |MC'| \Rightarrow A'M' \text{ mediană.}$$

$$\left. \begin{array}{l} MM' \parallel AA' \Rightarrow MM'A'A \text{ trapez} \\ \frac{\|AG\|}{\|GM\|} = 2, GG' \parallel AA' \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\|A'G'\|}{\|G'M'\|} = \frac{\|AG\|}{\|GM\|} = 2 \Rightarrow G' \text{ se află pe mediana}$$

$A'M'$  la  $2/3$  de vîrf și  $1/3$  de bază. În general nu, căci ar trebui că  $\nexists$  drept  $AMC$  să se proiecteze tot după un unghi drept și la fel pentru încă o înălțime. Acest lustru se realizează dacă laturile  $\triangle$  sînt paralele cu planul.

5) Fiind date punctele necoplanare  $A, B, C, D$  să se determine un plan pe care punctele  $A, B, C, D$  se proiectează în virfurile un paralelogram.

Soluție:



Fie  $A, B, C, D$  cele 4 puncte necoplanare și  $M, N$  mijloacele segmentelor  $|AB|$  și  $|CD|$ .  $M$  și  $N$  determină o dreaptă și fie un plan  $\alpha \perp MN \Rightarrow M$  și  $N$  se proiectează în același punct  $O$  pe  $\alpha$ .

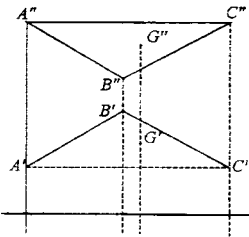
$$\left. \begin{array}{l} AA' \parallel MO \parallel BB' \\ |AM| \equiv |MB| \end{array} \right\} \Rightarrow |A'O| \equiv |OB'|$$

$$\left. \begin{array}{l} CC' \parallel DD' \parallel NO \\ |DN| \equiv |NC| \end{array} \right\} \Rightarrow |D'O| \equiv |OC'|$$

$\Rightarrow A'B'C'D'$  paralelogram.

6) Se consideră toate triunghiurile din spațiu care se proiectează pe un plan  $\alpha$  după același triunghi. Să se afle locul geometric al centrului de greutate.

**Soluție:**



Fie  $A'B'C', A''B''C''$  două astfel de  $\Delta$ , cu proprietatea  $pr_{\alpha} A'B'C' = ABC$ ,  $pr_{\alpha} A''B''C'' = ABC$ .

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} pr_{\alpha} G' = G \Rightarrow G'G \perp \alpha \\ pr_{\alpha} G'' = G \Rightarrow G''G \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

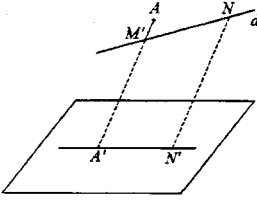
$\Rightarrow G'G = G''G \Rightarrow G'', G', G$  sunt coliniare.

Datorită faptului că prin proiecție se păstrează raportul se arată că  $G'$  este de greutate al lui  $A, B, C$ .

$$\frac{\|BG'\|}{\|GM'\|} = \frac{\|B_1G'\|}{\|G_1M_1\|} = 2.$$

7) Fie  $A$  un punct nesituat pe dreapta  $d$ . Determinați un plan  $\alpha$  a.f.  $pr_{\alpha} d$  să treacă prin  $pr_{\alpha} A$ .

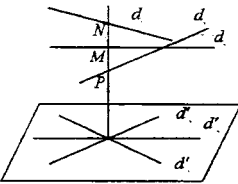
**Soluție:**



Fie  $M \in d$  și  $A \notin d$ . Cele două puncte determină o dreaptă și fie  $\alpha$  un plan perpendicular pe această dreaptă,  $AM \perp \alpha \Rightarrow A$  și  $M$  se proiectează pe  $\alpha$  în același punct  $A'$  prin care trece și  $pr_\alpha d = pr_\alpha A \in pr_\alpha d$ .

8) Determinați un plan pe care trei drepte date să se proiecteze după drepte concurente.

**Soluție:**



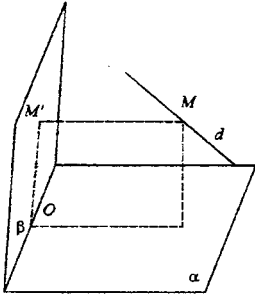
Determinăm o dreaptă care să întâlnească cele 3 drepte în felul următor.

Fie  $M \in d_2 \Rightarrow \beta = (M, d_1)$ ,  $\gamma = (M, d_3)$  și  $\beta \cap \gamma = d \Rightarrow d \subset \beta_1$ ,  $d \cap d_1 = \{N\}$ ,  $d \subset \gamma_1$ ,  $d \cap d_3 = \{P\}$ .

Fie acum un plan  $\alpha \perp d \Rightarrow pr_\alpha M = pr_\alpha N = pr_\alpha P = O \Rightarrow pr_\alpha d_1 \cap pr_\alpha d_2 \cap pr_\alpha d_3 \neq \emptyset \Rightarrow d'_1 \cap d'_2 \cap d'_3 = \{O\}$ .

9) Fie  $\alpha, \beta$  plane care se taie după o dreaptă  $a$  și fie  $d$  o dreaptă perpendiculară pe  $a$ . Să se arate că proiecțiile dreptei  $d$  pe  $\alpha, \beta$  sint concurente.

**Soluție:**



Fie  $\alpha \cap \beta = a$  și  $M \in d$ . Proiectăm acest punct pe  $\alpha$  și  $\beta$ :  $MM' \perp \alpha \Rightarrow \left. \begin{array}{l} MM' \perp a \\ d \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (MM', d)$

$MM'' \perp \beta \Rightarrow \left. \begin{array}{l} MM'' \perp a \\ d \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (MM'', d) \Rightarrow a \perp$  pe planul proiectant al lui  $d$  pe  $\beta$ .

$$\left. \begin{array}{l} (MM', d) \perp d \\ (MM'', d) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (MM', d) \parallel (MM'', d) \\ d \text{ dr. comună} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

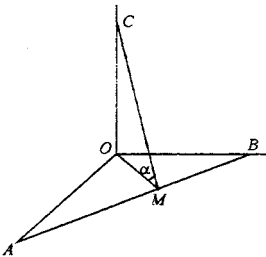
$$\Rightarrow (MM', d) = (MM'', d) = (MM'M'')$$

$$\text{Fie } a \cap (MM'M'') = \{O\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{pr}_\alpha d = OM' \\ \text{pr}_\beta d = OM'' \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow OM' \cap OM'' = \{O\}$  și deci cele două proiecții sînt concurente.

10) Se consideră dreptele  $OA, OB, OC, \perp$  două cîte două. Știm că  $\|OA\| = a, \|OB\| = b, \|OC\| = c$ . Să se calculeze măsura unghiului planelor  $(ABC)$  și  $(OAB)$ .

**Soluție:**



$$\left. \begin{array}{l} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} OC \perp (OAB) \\ OM \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow CM \perp AB \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  unghiul planelor  $(ABC)$  și  $(OAB)$  este  $\widehat{OMC} = \alpha$ .

$$\|AB\| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \|OM\| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\|OC\|}{\|OM\|} = \frac{c}{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

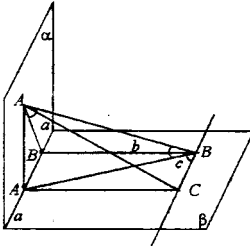
11) O dreaptă taie două plane perpendiculare  $\alpha$  și  $\beta$  în  $A$  și  $B$ . Fie  $A'$  și  $B'$  proiecțiile punctelor  $A$  și  $B$  pe dreapta  $\alpha \cap \beta$ .

1) Arătați că  $\|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B'\|^2 + \|B'B\|^2$

2) Dacă  $a, b, c$  sînt măsurile unghiurilor dreptei  $AB$  cu planele  $\alpha, \beta$  și cu  $\alpha \cap \beta$ , atunci

$$\cos c = \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|} \text{ și } \sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 c.$$

**Soluție:**



Fie  $\alpha \cap \beta = a$  și  $AA' \perp a$ ,  $BB' \perp a$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ A \in \alpha \\ AA' \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \perp \beta \Rightarrow AA' \perp A'B \Rightarrow AA' \perp a$$

$$\Rightarrow \|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B\|^2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } BB' \perp a \\ \beta \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BB' \perp \alpha \Rightarrow \text{pr}_\alpha AB = AB' \Rightarrow \text{ș dreptei } AB \text{ cu } \alpha, \widehat{BAB'} = a$$

$AA' \perp \beta \Rightarrow \text{pr}_\beta AB = A'B \Rightarrow \text{ș dreptei } AB \text{ cu } \beta \text{ este } \widehat{ABA'} = b.$

În planul  $\beta$  ducem prin  $B$  o paralelă la  $a$  și prin  $A'$  o paralelă la  $BB'$ . Intersecția lor este  $C$ , iar  $\|A'B'\| = \|BC\|$ ,  $\|BB'\| = \|A'C\|$ . Ungiul dreptei  $AB$  cu  $a$  este  $\widehat{ABC} = c.$

$$\text{Cum } AA' \perp \beta \Rightarrow AA' \perp A'C \Rightarrow \|AC\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'C\|^2 = \|AA'\|^2 + \|B'B\|^2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} B'BCA \text{ dreptunghi} \Rightarrow A'C \perp CB \\ AA' \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp CB.$$

$\Rightarrow \triangle ACB$  dreptunghic în  $C.$

Împărțim relația (1) cu  $\|AB\|^2$

$$\frac{\|AC\|^2}{\|AB\|^2} = \frac{\|AA'\|^2}{\|AB\|^2} + \frac{\|B'B\|^2}{\|AB\|^2} \Rightarrow \sin^2 c = \sin^2 b + \sin^2 a.$$

12) Fie  $ABC$  un triunghi situat într-un plan  $\alpha$ ,  $A'B'C'$  proiecția  $\triangle A'B'C'$  pe planul  $\alpha$ . Notînd cu  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  ariile  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'B'C'$ ,  $\triangle A''B''C''$ , să se arate că  $S'$  este medie proporțională între  $S$  și  $S''$ .

**Soluție:**

$$S' = S \cos a, \quad a \in (\widehat{\alpha, \beta})$$

$$S'' = S' \cos a$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos a = \frac{S'}{S''} \\ \cos a = \frac{S''}{S'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{S''}{S'} \Rightarrow S'^2 = SS'' \Rightarrow S' = \sqrt{SS''}.$$

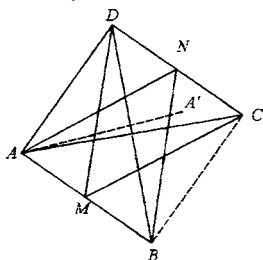
13) Un triedru  $[ABCD]$  are  $|AC| \equiv |AD| \equiv |BC| \equiv |BD|$ .  $M, N$  fiind mijloacele muchiilor  $[AB], [CD]$  să se arate:

a)  $MN \perp AB$ ,  $MN \perp CD$ ,  $AB \perp CD$ ;

b) Dacă  $A', B', C', D'$  sînt picioarele perpendicularelor duse în vîrfurile  $A, B, C, D$  pe fețele opuse al tetraedrului, punctele  $B, A', N$  sînt colineare și la fel  $A, B', N$ ;  $D, C', M$ ;  $C, D', M$ .

c)  $AA', BB', MN$  și  $CC', DD', MN$  sînt cîte trei drepte concurente.

**Soluție:**



$$\left. \begin{array}{l} |AC| \equiv |BC| \Rightarrow \triangle ACB \text{ isoscel} \\ CM \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow CM \perp AB \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |AD| \equiv |BD| \Rightarrow \triangle ABD \text{ isoscel} \\ DM \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow DM \perp AB \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow AB \perp (DMC) = \left. \begin{array}{l} AB \perp MN \\ AB \perp DC \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} |BC| \equiv |BD| \\ BN \text{ mediană} \\ |AD| \equiv |AC| \\ AN \text{ mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BN \perp DC \\ AN \perp DC \end{array} \right\} \Rightarrow DC \perp (ABN) \Rightarrow DC \perp MN$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} DC \perp MN \\ DC \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} DC \perp (ABN) \\ DC \subset (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (BDC) \perp (ABN) \\ AA' \perp (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AA' \subset (ABN) \\ A' \in (BDC) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A' \in BN \Rightarrow B, A', N$  sînt colineare.

La fel:

Din  $(ADC) \perp (ABN) \Rightarrow A, B', N$  colineare

$(ABC) \perp (DMC) \Rightarrow M, D', C$  colineare

$(ABD) \perp (DMC) \Rightarrow D, C', M$  colineare

c) La a) am arătat că  $MN \perp AB$

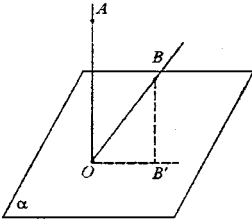
$$\left. \begin{array}{l} \text{Din } AA' \perp (BDC) \\ BN \subset (BDC) \\ \text{Din } BB' \perp (ADC) \\ AN \subset (ADC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AA' \perp BN \\ A' \in BN \\ BB' \perp AN \\ B' \in AN \end{array} \right\} \Rightarrow AA', BB' \text{ și } MN \text{ sînt înălțimi în } \triangle ABN \text{ deci}$$

concurente.

La fel  $DD', CC', MN$  vor fi înălțimi în  $\triangle DMC$ .

14) Dacă semidreptele  $[OA$  și  $]OB$  cu originea lor în planul  $\alpha$ ,  $OA \perp \alpha$ ,  $OB \not\perp \alpha$  atunci cele 2 semidrepte formează un unghi ascuțit sau obtuz, după cum sînt sau nu de aceeași parte a planului  $\alpha$ .

**Soluție:**



Presupunem că  $[OA, ]OB$  sînt de aceeași parte a planului  $\alpha$ .

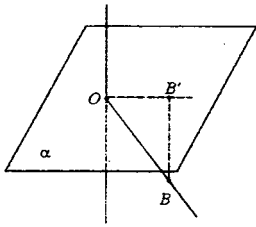
$$\left. \begin{array}{l} \text{Ducem } BB' \perp \alpha \\ AO \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow BB' \parallel AO \Rightarrow$$

( $\exists$ ) planul  $(AD, BB') = \beta \Rightarrow [OA, ]OB$  sînt în același semiplan.

$AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp OB'$ ,  $m(\widehat{BOB'}) < 90^\circ \Rightarrow ]OB \subset$  int  $\widehat{AOB'}$ .

În planul  $\beta$  avem  $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ = m(\widehat{BOB'}) < 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}$  ascuțit.



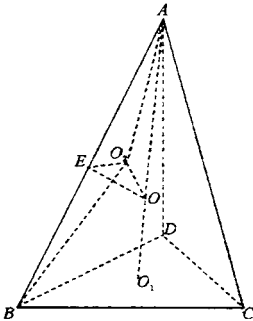


Presupunem că  $[OA]$  și  $[OB]$  sînt în semispații diferite față de  $\alpha \Rightarrow A$  și  $B$  sînt în semiplane diferite față de  $OB'$  în planul  $\beta \Rightarrow [OB' \subset \text{int.} \widehat{BOA} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = 90^\circ + m(\widehat{BOB'}) > 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}$  este obtuz.

15) a) Arătați că cele 6 plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru au un punct comun.

b) Prin acest punct trec ș perpendicularare pe fețele tetraedrului, duse prin centrele cercurilor acestoe fețe.

**Soluție:**



Se știe că locul geometric al punctelor din spațiu egal depățate de vîrfurile  $\triangle BCD$  este perpendiculara  $d$  pe pl.  $\triangle$  în centrul cercului circumscris acestui  $\triangle$  notat cu  $O$ . Ducem planul mediator al laturii  $|AC|$  care intersectează aceasta  $\perp d$  în punctul  $O$ . Punctul  $O$  este egal depățat atunci de toate vîrfurile tetraedrului  $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\| = \|OD\|$ . Unim  $O$  cu mijlocul  $E$  al laturii  $|AB|$ . Din  $|OA| \equiv |OB| \Rightarrow \triangle OAB$  isoscel  $\Rightarrow OC \perp AB$  (1)

Proiectăm  $O$  pe planul  $(ABD)$  în punctul  $O_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cum } |OA| \equiv |OB| \equiv |OD| \\ |OO_2| \text{ latură comună} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAO_2 = \triangle OBO_2 = \triangle ODO_2$$

$\Rightarrow |O_2A| \equiv |BO_2| \equiv |DO_2| \Rightarrow O_2$  este centrul cercului circumscris  $\triangle ABD$ . La fel se arată că  $O$  se proiectează și pe celelalte fețe în centrele cercurilor circumscrise, deci prin  $O$  trec toate perpendicularare pe fețele tetraedrului duse prin centrele cercurilor circumscrise. Deci b) este demonstrat.

Din  $|O_2A| \equiv |O_2B| \Rightarrow \triangle O_2AB$  isoscel  $\Rightarrow O_2E \perp AB$  (2)

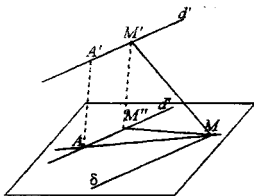
Din (1) și (2)  $\Rightarrow AB \perp (EO_2O)$   
 $|AE| \equiv |EB|$   $\Rightarrow (EO_2O)$  este plan mediator al laturii  $|AB|$  și trece

prin  $O$ , iar dreapta  $d$  îi aparține intesecția celor 3 plane mediatoare ale laturilor  $|BC|$ ,  $|CD|$ ,  $|BD|$ , deci  $O$  este punctul comun pentru cele 6 plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru.

16) Fie  $d$  și  $d'$  două drepte necoplanare. Să se arate că  $(\exists)$  puncte unice  $A \in d$ ,  $A' \in d'$  a.î.  $AA' \perp d$  și  $AA' \perp d'$ .

Dreapta  $AA'$  se numește perpendiculara comună a dreptelor  $d$  și  $d'$ .

Soluție:



Fie  $M \in d$  și  $\delta \parallel d'$ ,  $M \in \delta$ . Fie  $\alpha = (d, \delta) \Rightarrow d' \parallel \alpha$ .

Fie:  $d'' = \text{pr}_{\alpha} d'$   $\Rightarrow d'' \parallel d' \Rightarrow d'' \parallel d \Rightarrow d' \cap d = \{A\}$  altfel  $d$  și  $d'$  ar fi paralele deci coplanare. Fie

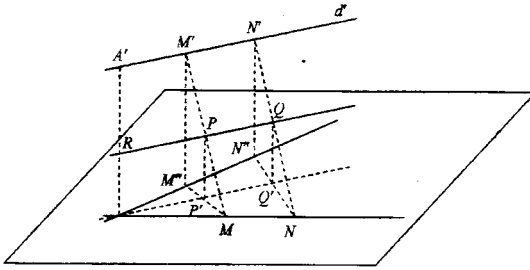
$\beta$  planul proiectant al dreptei  $d'' \Rightarrow \beta \perp \alpha$   
 $\beta \cap \alpha = d''$

În planul  $\beta$  construim perpendiculara pe  $d''$  în punctul  $A$  și

$AA' \perp d''$   $\Rightarrow AA' \perp d'$   
 $d' \parallel d''$

17) Cu notațiile problemei precedente fie  $M \in d$ ,  $M' \in d'$ . Să se arate că  $\|AA'\| \leq \|MM'\|$ , egalitatea fiind posibilă numai dacă  $M = A$  și  $M' = A'$ .

Soluție:



Ducem  $M'M'' \perp d \Rightarrow M'M'' \perp d \Rightarrow M'M'' \perp M''M \Rightarrow \|M'M\| \geq \|M'M''\| = \|A'A\|$ .

Egalitate se obține numai când  $M = A$  și  $M' = A'$ .

18) Fie  $AA' \perp$  comună a dreptelor necoplanare  $d, d'$  și  $M \in d, M' \in d'$  a.i.  $|AM| \equiv |A'M'|$ .

Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului  $[MM']$ .

**Soluție:**

Fie  $M \in d, M' \in d'$  a.i.  $|AM| \equiv |A'M'|$ . Fie  $d'' = \text{pr}_\alpha d'$  și  $M'M'' \perp d'' \Rightarrow M'M'' \perp \alpha \Rightarrow M'M'' \perp M''M$  și

$$\left. \begin{array}{l} M'' \parallel A'A \\ A'M' \parallel AM'' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |A'M'| \equiv |AM''| \\ |A'M'| \equiv |AM| \end{array} \right\} \Rightarrow |AM| \equiv |AM'| \Rightarrow \triangle AMM' \text{ isoscel.}$$

Fie  $P$  mijlocul lui  $[MM']$  și  $P' = \text{pr}_\alpha P \Rightarrow PP' \parallel M'M'' \Rightarrow P'$  este mijlocul lui  $MM''$ ,  $AMM''$  isoscel  $\Rightarrow [AP'$  bisectoarea  $\sphericalangle M'AM$ . ( $PP'$ ) fiind linie mijlocie în  $\triangle M'M''M \Rightarrow \|PP'\| = \frac{1}{2}\|M'M''\| = \frac{1}{2}\|A'A\| = \text{constant}$ .

Deci punctul se află la o distanță constantă de dreapta  $AP'$ , deci pe o paralelă la această dreaptă situată în planul  $\perp$  pe  $\alpha$  ce trece prin  $AP'$ .

Când  $M = A$  și  $M' = A' \Rightarrow \|AM\| = \|A'A\| = 0 \Rightarrow P = R$  unde  $R$  este mijlocul segmentului  $[AA']$ . Deci locul geometric trece prin  $R$  și cum

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp AP' \\ RP \parallel AP' \end{array} \right\} \Rightarrow RP \perp AA' \Rightarrow RP \text{ este conținută în planul mediator al segmentului } [AA']$$

Deci  $RP$  este intersecția planului mediator al segmentului  $[AA']$  cu planul  $\perp$  pe  $\alpha$  trecînd prin una din bisectoarele unghiurilor determinate de  $d$  și  $d'$ , se mai obține încă o dreaptă conținută în planul mediator al lui  $[AA']$  paralela cu cealaltă bisect. a unghiurilor det. de  $d$  și  $d''$ .

Deci locul geometric va fi format din două drepte perpendiculare.

\* **Reciproc**, fie  $Q \in RP$  un punct ( $\forall$ ) pe această dreaptă și  $Q' = \text{pr}_\alpha Q \Rightarrow Q' \in [AP']$  bisectoare. Ducem  $NN'' \perp AQ'$  și cum  $AQ'$  este și bisectoare și înălțime  $\Rightarrow \triangle ANN''$  isoscel  $\Rightarrow |AQ'|$  mediană  $\Rightarrow |NQ'| \equiv |Q'N''|$ .

$$\text{Ducem } N'N'' \perp d'' \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |A'N'| \equiv |AN''| \\ |AN''| \equiv |AN| \end{array} \right\} \Rightarrow |AN| \equiv |A'N'|$$

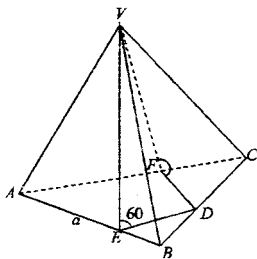
$QQ'' \parallel N'N'' \Rightarrow Q, Q', N', N''$  coplanare  $\Rightarrow N''Q' \in (QQ'N'N'') \Rightarrow N \in (QQ'N'N'')$

$$\text{Întrucît } \left. \begin{array}{l} \|Q'Q\| = \frac{1}{2}\|AA'\| = \frac{1}{2}\|N'N''\| \\ QQ' \parallel N'N'' \end{array} \right\} \Rightarrow |Q'Q| \text{ linie mijlocie în } \triangle NN'N'' \Rightarrow Q, N', N$$

coliniare și  $|QN'| \equiv |QN|$ .

19) Se consideră un tetraedru  $VABC$  cu următoarele proprietăți:  $ABC$  este un triunghi echilateral de latură  $a$ ,  $(ABC) \perp (VBC)$ , iar planele  $(VAC)$  și  $(VAB)$  formează cu planul  $(ABC)$  unghiuri de măsură  $60^\circ$ . Să se calculeze distanța de la punctul  $V$  la planul  $(ABC)$ .

**Soluție:**



$$\begin{aligned} D &= \text{pr}_{BC}V \text{ și } E = \text{pr}_{AB}V \quad FD = \text{pr}_{AC}V \\ (VBC) \perp (ABC) &\Rightarrow VD \perp (ABC) \Rightarrow d(V, \alpha) = \|VD\|, \\ \text{unde } \alpha &= (ABC). \\ \left. \begin{array}{l} VD \perp (ABC) \\ VE \perp AB \end{array} \right\} &\Rightarrow DE \perp AB \Rightarrow m(\widehat{VED}) = 60^\circ \\ \left. \begin{array}{l} VD \perp (ABC) \\ VF \perp AC \end{array} \right\} &\Rightarrow DF \perp AC \Rightarrow m(\widehat{VFD}) = 60^\circ \end{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow VD \text{ latură comună}$$

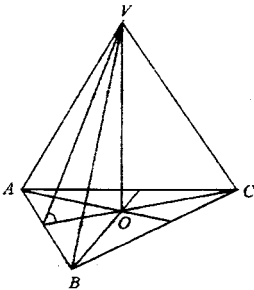
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta VDE = \Delta VDF \Rightarrow |ED| \equiv |FD| \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta EDB \equiv \Delta FDC \Rightarrow |BD| \equiv |DC| \Rightarrow \|BD\| = \frac{a}{2}$$

$$\|ED\| = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\|VD\| = \|ED\| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{4}$$

20) Toate muchiile unui triedru au lungimea  $a$ . Să se arate că un vîrf se proiectează pe fața opusă în centrul de greutate al acestuia. Să se afle măsură unghiurilor diedre determinate de cîte două fețe.

**Soluție:**



$$\left. \begin{aligned} \text{Fie } O = \operatorname{pr}_{(BAC)} V; \|VA\| = \|VB\| = \|VC\| = a \\ \|VO\| \text{ comună} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

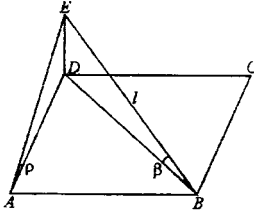
$$\Rightarrow \Delta VAO \equiv \Delta VBO \equiv \Delta VCO \Rightarrow |OA| \equiv |BO| \equiv |CO| \Rightarrow O \text{ este centrul cercului circumscris și cum } \Delta ABC \text{ este echilateral} \Rightarrow O \text{ este centrul de greutate} \Rightarrow \|OM\| = \frac{1}{3} \|MC\| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\|VM\| = \|MC\| = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{În } \Delta VOM \Rightarrow \cos(\widehat{VMO}) = \frac{\|OM\|}{\|VM\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{VMO} = \arccos \frac{1}{3}$$

21) Fie  $DE$  o dreaptă perpendiculară pe planul patratului  $ABCD$ . Știind că  $\|BE\| = l$  și măsura unghiului format de  $[BE$  și  $(ABC)$  este  $\beta$ , să se determine lungimea segmentului  $AE$  și unghiul lui  $[AE$  cu planul  $(ABC)$ .

**Soluție:**



$$\|DE\| = l$$

$$m(DBE) = \beta$$

$$\text{În } \triangle EDB: \|DE\| = l \sin \beta$$

$$\|DB\| = l \cos \beta.$$

Dar dacă  $\|AB\| = a \Rightarrow \|DB\| = a\sqrt{2}$ , deci

$$\|AB\| = \frac{\|DB\|}{\sqrt{2}} = \frac{l \cos \beta}{\sqrt{2}}.$$

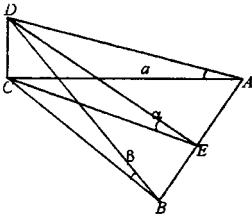
În  $\triangle AEB$ , dreptunghic în  $A$ :

$$\|AE\| = \sqrt{l^2 - \frac{l^2 \cos^2 \beta}{2}} = l\sqrt{\frac{2 - \cos^2 \beta}{2}} = l\sqrt{\frac{1 + \sin^2 \beta}{2}}$$

$$\text{În } \triangle ADE \ (m(\widehat{D}) = 90^\circ) \quad \text{tg } \rho = \frac{\|DE\|}{\|AD\|} = \frac{\rho \sin \beta}{\frac{\rho \cos \beta}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \text{ tg } \beta.$$

22) Dreapta  $CD \perp$  planul  $\triangle ABC$  echilateral de latură  $a$ , iar  $[AD]$  și  $[BD]$  formează cu planul  $(ABC)$  unghiuri de măsură  $\beta$ . Să se găsească unghiul planelor  $(ABC)$  și  $ABD$ .

Soluție:



$$\left. \begin{array}{l} CE \perp BA \\ DE \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pl. } (ABC) \text{ și } ABD \text{ are } m(\widehat{DEC}).$$

$$ABC \text{ echilateral} \Rightarrow \|CE\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Din } \triangle CBD: \|DB\| = \frac{a}{\cos \beta} = \|AD\|$$

$$DE^2 = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \beta} - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}} \text{ și}$$

$$\cos \alpha = \frac{\|CO\|}{\|CE\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}} = \frac{\sqrt{3} \cos \beta}{2 \cdot \sqrt{\sin \beta}}$$

sau

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\|CD\|}{\|CE\|} = \frac{\frac{a \cdot \sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

23) Fiind date planul  $\alpha$  și  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'B'C'$  nesituate în acest plan. Să se determine un  $\triangle DEF$ , așezat în  $\alpha$  a.i. pe de o parte dreptele  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  și pe de altă parte dreptele  $A'D$ ,  $B'E$ ,  $C'F$  să fie concurente.

**Soluție:**

Considerăm problema rezolvată și luăm în planul  $\alpha$ ,  $\triangle DEF$  apoi punctele  $O$  și  $O'$  nesituate în  $\alpha$ .

Construim și dreptele  $|DO$ ,  $|FO$ ,  $|EO$  respectiv  $|DO'$ ,  $|FO'$ ,  $|EO'$ . Pe aceste semidrepte luăm  $\triangle ABC$  și  $\triangle A'B'C'$ . Evident din modul în care am construit dreptele  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  se intersectează în  $O$ . Prelungim dreptele  $BA$ ,  $BC$ ,  $CA$  pînă intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $B$ ,  $C$ , respectiv  $A$ . Apoi prelungim dreptele  $C'A'$ ,  $C'B'$ ,  $A'B'$  pînă intersectează planul  $\alpha$  în punctele  $A_2$ ,  $C_2$  respectiv  $B_2$ .

Evident punctele  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  sînt coliniare (pentru că  $\in \alpha \cap (ABC)$ ) de asemenea  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  coliniare (deoarece  $\in \alpha \cap (A'B'C')$ ).

Pe o altă parte, punctele  $D$ ,  $F$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  sînt coliniare deoarece:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \in AC(ACOD) \\ \text{cum } A, D, F \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow O, F, A_1 \in \alpha \cap (ACO), \text{ deci coliniare} \quad (1)$$

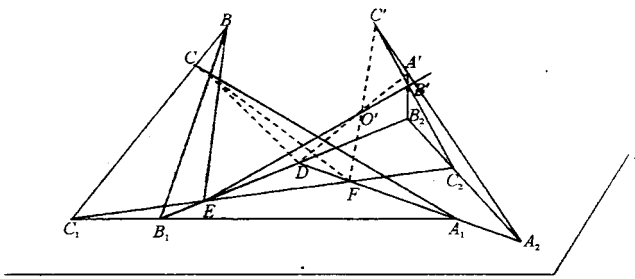
$$A_2 \in O'A' \subset (A'C'ODF)$$

$$D, F, A_2 \in \alpha$$

$$\Rightarrow D, F, A_2 \in \alpha \cap (C'A'O) \Rightarrow D, F, A_2 \text{ coliniare} \quad (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow D, F, A_1, A_2$  coliniare. Analog  $C, E, F, C_2$  coliniare și  $B_1, E, D, D_2$  coliniare.

În consecință  $DEF$  se află la intersecția dreptelor  $A_1A_2$ ,  $C_1C_2$ ,  $B_1B_2$  în planul  $\alpha$ , deci unic determinat.



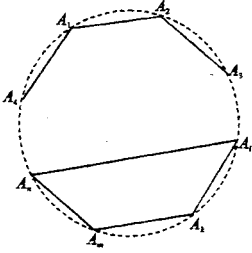


## GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

(clasa a X-a)

1) Să se arate că un poligon convex nu poate avea mai mult de trei unghiuri ascuțite.

**Soluție:**

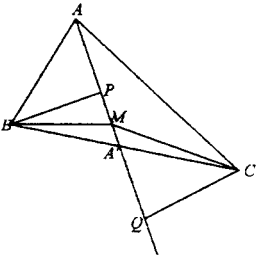


Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n$  vîrfurile poligonului convex. Să presupunem că are 4 unghiuri ascuțite. Vîrfurile acestor unghiuri formează un patrulater convex  $A_1A_kA_mA_n$ . Deoarece poligonul este convex, segmentele  $|A_1A_k|$ ,  $|A_kA_m|$ ,  $|A_mA_n|$ ,  $|A_nA_1|$  se află în interiorul poligonului inițial. Obținem că unghiurile patrulaterului sînt ascuțite, ceea ce este absurd, deoarece suma lor este  $360^\circ$ .

**Soluția 2.** Presupunem că  $A_1A_kA_mA_n$  este un poligon convex, cu toate unghiurile ascuțite  $\Rightarrow$  suma unghiurilor exterioare este mai mare decît  $360^\circ$ , ceea ce este absurd (suma măsurilor unghiurilor exterioare unui poligon convex este  $360^\circ$ ).

2) Fie  $ABC$  un triunghi. Să se găsească locul geometric al punctelor  $M \in (ABC)$ , pentru care  $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$ .

**Soluție:**



Fie  $|AA'|$  mediana din  $A$  și  $CQ \perp AA'$ ,  $BP \perp AA'$

$\triangle BAP \equiv \triangle CA'Q$  pentru că

$$\begin{cases} \widehat{PBC} \equiv \widehat{BC'Q} \text{ alterne interne} \\ \widehat{PAB} \equiv \widehat{CA'Q} \text{ opuse la vîrf} \\ |BA| \equiv |A'C| \end{cases}$$

$\Rightarrow \|BP\| = \|CQ\|$  și prin construcție  $BP \perp AA'$ ,  $CQ \perp AA'$

Locul geometric căutat este mediana  $|AA'|$ . Într-adevăr, pentru oricare  $M \in |AA'|$  avem  $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$

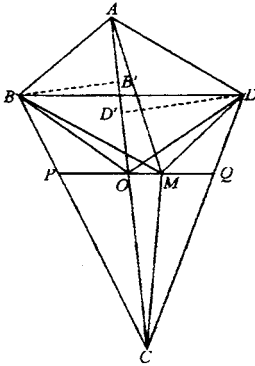
pentru că triunghiurile  $ABM$  și  $ACM$  au a latură comună  $|AM|$  și înălțime corespunzătoare acestei comune egale  $\|BP\| = \|CQ\|$

Reciproc: Dacă  $\sigma[ABM] = \sigma[ACM]$  să demonstrăm că  $M \in |AA'|$ . Într-adevăr:  $\sigma[ABM] = \sigma[ACM] \Rightarrow d(B, AM) = d(C, AM)$ , deoarece  $|AM|$  latură comună,  $d(B, AM) = \|BP\|$  și  $d(C, AM) = \|CQ\|$  și ambele sînt perpendiculare pe  $AM \Rightarrow PBQC$  paralelogram punctele  $P, M, Q$  sînt coliniare ( $P, Q$  picioarele perpendicularelor din  $B$  și  $C$  pe  $AM$ ).

În paralelogramul  $PBQC$  avem  $|PQ|$  și  $|BC|$  diagonale  $\Rightarrow AM$  trece prin mijlocului  $|BC|$  deci  $M \in |AA'|$  mediana din  $A$ .

3) Se dă un patrulater convex  $ABCD$ . Să se afle locul geometric al punctelor  $M \in \text{int.}ABCD$  pentru care  $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$ .

Soluție:



Fie  $O$  mijlocul diagonalei  $|AC| \Rightarrow \|AO\| = \|OC\|$

$$\sigma[AOD] = \sigma[COD] \quad (1)$$

pentru că  $\begin{cases} \|AO\| = \|OC\| \\ \|OD'\| \text{ înălțime comună} \end{cases}$

$$\sigma[AOB] = \sigma[COB] \quad (2)$$

aceleași motive; adunăm (1) și (2)  $\Rightarrow$

$$\sigma[ADOB] = \sigma[DCBO] \quad (3)$$

deci  $O$  este un punct al locului căutat.

Construim prin  $O$  o paralelă la  $BD$  pînă taie laturile  $|BC|$  și  $|DC|$  în  $P$  respectiv  $Q$ . Locul geometric căutat este  $|PQ|$ .

Într-adevăr  $(\forall) M \in |PQ|$  avem:

$$\sigma[MBAD] = \sigma[ABD] + \sigma[BDM] = \sigma[ABD] + \sigma[BOD] = \sigma[ABOD],$$

$$\sigma[BDO] = \sigma[BDM] \text{ pentru că } M \text{ și } Q \in \text{unei paralele la } BD.$$

$$\text{iar } \sigma[BCDM] = \sigma[PQC] + \sigma[PMB] + \sigma[MQD] = \sigma[PQC] + \sigma[PBO] + \sigma[OMB] + \sigma[MQD] \doteq$$

$$\sigma[OMB] = \sigma[OMD] \quad (B, D \in \text{unei paralele la } OM)$$

$$\doteq \sigma[PQC] + \sigma[PBO] + \sigma[OMD] + \sigma[MQD] = \sigma[OBCD]$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma[MBAD] = \sigma[ABOD] \\ \text{Deci și } \sigma[BCDM] = \sigma[OBCD] \\ \text{și din (3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma[MBAD] = \sigma[BCDM].$$

**Reciproc:** Dacă  $\sigma[MBCD] = \sigma[MBAD]$  să demonstrăm că  $M \in$  paralelei prin  $O$  la  $BD$ .

Într-adevăr:

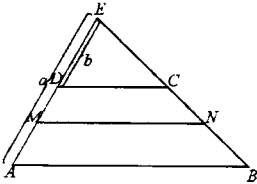
$$\left. \begin{array}{l} \sigma[BCDM] = \sigma[MBAD] \\ \text{și cum } \sigma[BCDM] + \sigma[MBAD] = \sigma[ABCD] \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma[MBCD] = \sigma[MBAD] =$$

$$= \frac{\sigma[ABCD]}{2} \quad (1) \text{ dar și } \sigma[ABOD] = \sigma[OBCD] = \frac{\sigma[ABCD]}{2} \quad (2)$$

Deci din (1) și (2)  $\Rightarrow \sigma[ABMD] = \sigma[ABOD] \Rightarrow \sigma[ABD] + \sigma[BDO] = \sigma[ABD] + \sigma[BDM] \Rightarrow \sigma[BDO] = \sigma[BDM] \Rightarrow M$  și  $O$  se află pe o paralelă la  $BD$ .

4) Să se determine o dreaptă  $MN$ , paralelă cu bazele unui trapez  $ABCD$  ( $M \in |AD|$ ,  $N \in |BC|$ ) astfel încât diferența ariilor lui  $[ABNM]$  și  $[MNCD]$  să fie egală cu un număr dat.

**Soluție:**



Notăm  $\|EA\| = a$  și  $\|ED\| = b$ ,  $\|EM\| = x$

$$\frac{\sigma[EMN]}{\sigma[EDC]} = \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{[MNCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{x^2 - b^2}{b^2} \quad (2)$$

$$\frac{\sigma[EAB]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{[ABCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (3)$$

$$\text{Din (3) scădem (2)} \Rightarrow \frac{\sigma[ABCD] - \sigma[MNCD]}{\sigma[EDC]} =$$

$$= \frac{a^2 - x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sigma[ABNM]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - x^2}{b^2} \quad (4)$$

$$\text{Din (4) scădem (2)} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\sigma[ABNM] - \sigma[MNCD]}{\sigma[EDC]} = \frac{a^2 - x^2 - x^2 - b^2}{b^2} \\ \text{din ipoteza } \sigma[ABNM] - \sigma[MNCD] = k \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k}{\sigma[EDC]} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2x^2}{b^2} \Rightarrow \frac{kb^2}{\sigma[ECD]} - a^2 - b^2 = -2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(a^2 + b^2)\sigma[ECD] - kb^2}{\sigma[ECD]}$$

Din relația (3) notînd  $\sigma[ABCD] - S \Rightarrow \sigma[ECD] = \frac{Sb^2}{a^2 - b^2}$

Înlocuind aceasta în relația lui  $x^2$  obținem:

$$x^2 = a^2 + b^2 - kb^2 \frac{a^2 - b^2}{Sb^2} \Rightarrow x^2 = \frac{(a^2 + b^2)s - k(a^2 - b^2)}{S} \Rightarrow$$

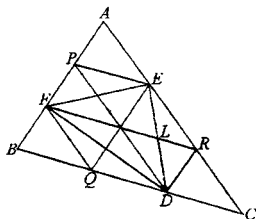
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 = \frac{(s-k)a^2 + (s+k)b^2}{S} \\ x = \|EM\| \end{array} \right\} \Rightarrow \|EM\| = \sqrt{\frac{(s-k)a^2 + (s+k)b^2}{S}} \text{ și ținînd seama de}$$

faptul că  $\|EM\| = \|DM\| + b$

avem  $\|DM\| = \sqrt{\frac{(s-k)a^2 + (s+k)b^2}{S}}$  deci avem poziția punctului  $M$  pe segment  $|DA|$  (era însă suficient și calcularea distanței  $\|EM\|$ ).

5) Pe laturile  $\triangle ABC$  se iau punctele  $D, E, F$  astfel încît  $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|CE\|}{\|EA\|} = \frac{\|AF\|}{\|FB\|} = 2$ . Să se afle raportul ariilor triunghiurilor  $DEF$  și  $ABC$ .

**Soluție:**



Se observă din construcție că  $EQ \parallel AB \parallel RD$  mai mult, acestea sînt paralele echidistante. Analog  $EQ, PD, AC$  și  $AB, EQ, RD$  sînt de asemenea paralele echidistante

$$(\|AP\| = \|PF\| = \|FB\|; \|AE\| = \|ER\| = \|RC\|, \\ \|BQ\| = \|QD\| = \|DC\|).$$

Notăm  $\sigma[BFQ] = S$ .

Bazîndu-ne pe proprietățile:

- două triunghiuri au arii egale dacă au baze egale și aceeași înălțime;
- două triunghiuri au arii egale dacă au aceeași bază și al treilea vîrf pe o paralelă la bază.

Avem:

$$\sigma[ABC] = \sigma[AFE] + \sigma[FER] + \sigma[FBO] + \sigma[FRD] + \sigma[DRC] = 9S$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma[FEL] &= \sigma[FER] - \sigma[ELR] = 2S - \sigma[ELR] \\ \sigma[FDL] &= \sigma[FRD] - \sigma[RLD] = 2S - \sigma[RLD] \end{aligned} \right\} \text{prin adunare}$$

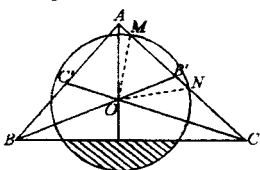
$$\Rightarrow \sigma[DEF] = 4S - (\sigma[ELR] + \sigma[RLD]) = 4S - S = 3S.$$

$$\text{Deci } \frac{\sigma[DEF]}{\sigma[ABC]} = \frac{3S}{9S} = \frac{1}{3}$$

(eventual pot fi aranjate ariile  $S$ ).

6) Se consideră un triunghi echilateral  $ABC$  și discul  $\left[ C \left( O, \frac{a}{3} \right) \right]$  unde  $O$  este ortocentrul triunghiului și  $a = \|AB\|$ . Să se determine aria  $[ABC] - \left[ C \left( O, \frac{a}{3} \right) \right]$ .

**Soluție:**



$$\|OB\| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad (BB' \text{ mediană})$$

În  $\triangle MOB'$ :

$$\cos \widehat{MOB'} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu(\widehat{MOB'}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Deci } \mu(\widehat{MON}) = \frac{\pi}{3}$$

Notăm cu  $\Sigma$  suprafața din disc limitată de o latură a triunghiului în exteriorul triunghiului.

$$\sigma[\Sigma] = \sigma[\text{sector circular } MON] - \sigma[MON] = \frac{\pi a^2}{9 \cdot 6} - \frac{a^2}{9 \cdot 2} \sin 60^\circ = \frac{\pi a^2}{9 \cdot 6} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cdot 9} = \frac{a^2}{18}$$

$$\left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Dacă prin aria discului vom scădea de 3 ori  $\sigma[\Sigma]$  vom afla aria porțiunii din disc din int.

$ABC$ . Deci aria suprafeței din disc din int.  $ABC$  este:

$$\frac{\pi a^2}{9} - 3 \frac{a^2}{18} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{\pi a^2}{18} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{\pi a^2}{18} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{12}$$

Aria căutată se obține scăzând din  $\sigma[ABC]$ , aria calculată.

$$\text{Deci } \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{18} - \frac{2a^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{12} - \frac{\pi a^2}{18} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} - \frac{\pi a^2}{18} = \frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi)$$

7) Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  avem:

$$a) 1 + \cos A \cos(B - C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}$$

$$b) (b^2 + c^2 = a^2) \operatorname{tg} A = 4S$$

$$c) \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + C\right)}{\sin(A+B)}$$

$$d) p = r \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} C \right)$$

$$e) \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

**Soluție:**

$$a) 1 + \cos A \cdot \cos(B-C) = \frac{b^2 + c^2}{4R^2}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos A \cos(B-C) &= 1 + \cos[\pi - (C+B)] \cos(B-C) = 1 - \cos(B+C) \cdot \cos(B-C) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\cos 2B + \cos 2C] = 1 - \frac{1}{2}[2 \cos^2 B - 1 + 2 \cos^2 C - 1] = 2 - \cos^2 B - \cos^2 C = \sin^2 B + \\ &+ \sin^2 C \stackrel{\sin T = \frac{t}{R}}{=} \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{b^2 + c^2}{4R^2} \end{aligned}$$

$$b) (b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = 4S$$

**Soluție:**

$$\text{Se demonstrează că } \operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1} = \frac{2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}}{\frac{2p(p-a)}{bc} - 1} = \frac{2S}{bc \left( \frac{2p(p-a) - bc}{bc} \right)} = \\ &= \frac{2S}{bc \left( \frac{2p(p-a) - bc}{bc} \right)} = \frac{2S}{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} - bc} = \\ &= \frac{4S}{ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ba + bc + c^2 - ac - 2bc} = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$d) \text{ Să demonstrăm că } \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} C = \frac{p}{r}$$

**Soluție:**

Într-adevăr

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

$$\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} = p \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}} = \frac{p^2}{S} \stackrel{S=pr}{=} \frac{p^2}{pr} = \frac{p}{r}.$$

Rămâne acum să demonstrăm că:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \iff \text{Într-adevăr} \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \iff \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \\ + \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \iff \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2})} &\iff \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2})} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2})} \quad (a) \end{aligned}$$

q.e.d.

$$c) \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin(\frac{A}{2} + C)}{\sin(A+B)} \stackrel{A+B=C}{=} \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin(\frac{A}{2} + C)}{\sin C} \implies$$

$$\implies \frac{b+c}{2c \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin A \cos C + \sin C \cos \frac{A}{2}}{\sin C} \implies (b+c) \sin C = 2C \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \cos C +$$

$$2c \sin C \cos^2 \frac{A}{2} \implies (b+c) \sin C = c \sin A \cos C + 2c \sin C \cos^2 \frac{A}{2} \text{ și}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \implies (b+c) \frac{ac}{2k} \cos C = \frac{2c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{2R} \implies$$

$$\implies b+c = a \cos C + 2 \cos^2 \frac{A}{2} \implies b+c = a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 2c \frac{p(p-a)}{bc} \implies b+c =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} + \frac{2p(p-a)}{b} \implies 2b^2 + 2bc = a^2 + b^2 - c^2 + (a+b+c)(c+b-a) \implies$$

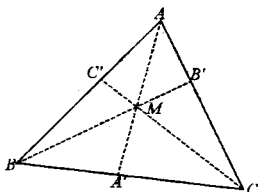
$\implies$  Toți termenii se reduc.

8) Dacă  $H$  este ortocentrul triunghiului  $ABC$ , să se arate că:

a)  $\|AH\| = 2R \cos A$ ;

b)  $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 4S$ .

**Soluție:**



a) În triunghiul  $ABB'$ :  $\|AB'\| = c \cos A$

$$\begin{aligned} \text{În } \triangle AHB' : \cos \widehat{HAB'} &= \|AB'\| : \|AH\| \Rightarrow \|AH\| = \\ &= \frac{\|AB'\|}{\cos \widehat{HAB'}} = \frac{\|AB'\|}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)} = \frac{c \cos A}{\sin C} \stackrel{T. \sin}{=} \frac{c \cos A}{\frac{c}{2R}} = \\ &= 2R \cos A \Rightarrow \|AH\| = 2R \cos A. \end{aligned}$$

b)  $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 2R(a \cos A + b \cos B + c \cos C) \stackrel{T. \sin}{=} 4R^2(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) = 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ .

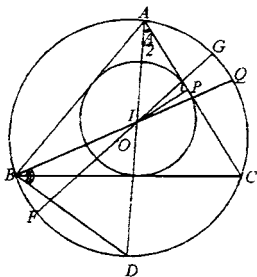
Am folosit:  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ .

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \underbrace{\sin(A+B)}_{\sin C} \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C = \\ &= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

9) Dacă  $O$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$  iar  $I$  este centrul cercului înscris, să se arate că  $\|OI\|^2 = R(R - 2r)$ .

**Soluție:**





Folosind puterea punctului  $I$  față de cercul  $C(O, R)$

$$\Rightarrow \|IG\| \cdot \|IF\| = \|AI\| \cdot \|ID\| \quad (1)$$

$$\text{dar } \|IG\| \cdot \|IF\| = (R - \|OI\|)(\|R + \|OI\|) \Rightarrow$$

$$\|IG\| \cdot \|IF\| = R^2 - \|OI\|^2.$$

Ținând seama de (1) avem  $\|IA\| \cdot \|ID\| = R^2 \|OI\|^2$ .

Calculăm acum distanțele  $\|IA\|$  și  $\|ID\|$

În triunghiul  $\triangle IAP$

$$\|IA\| = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \quad (2)$$

Calculăm și pe  $\|ID\|$ :

$\mu(\widehat{BID}) = \mu(\widehat{DBI})$  au aceeași măsură, mai precis:

$$\mu(\widehat{BID}) = \frac{m(\widehat{BD}) + m(\widehat{AQ})}{2} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2}$$

$$m\left(\frac{\widehat{DCQ}}{2}\right) = m(\widehat{DBI}) \text{ Deci } \|ID\| = \|BD\|. \quad (3)$$

În  $\triangle ABD$  cu teorema sinusilor avem:

$$\frac{\|BD\|}{\sin \frac{A}{2}} = 2R \Rightarrow \|BD\| = 2R \sin \frac{A}{2}. \text{ Deci ținând seama de (3)}$$

$$\|ID\| = 2R \sin \frac{A}{2}. \quad (4)$$

Revenind în relația  $\|IA\| \cdot \|ID\| = R^2 - \|IO\|^2$  cu (2) și (4) avem:  $\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot 2R \sin \frac{A}{2} =$

$$R^2 - \|IO\|^2 \Rightarrow \|IO\|^2 = R^2 - 2Rr \Rightarrow \|IO\|^2 = R(R - 2r).$$

10) Să se arate că în orice triunghi  $ABC$  avem:  $\cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}$ .

**Soluție:**

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow r = 2R \sin \frac{A}{2} \left( \cos \frac{B-C}{2} - \underbrace{\cos \frac{B+C}{2}}_{\sin \frac{A}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$r = 2R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2R \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow 2R \sin^2 \frac{A}{2} - 2R \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} + r \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 4R^2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 8Rr \geq 0 \Rightarrow R^2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 2Rr \geq 0 \Rightarrow \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

Nota. Rămâne să arătăm că  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ .

Într-adevăr:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$$

$$= \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} \stackrel{\substack{\text{J-1a Heron} \\ \text{și } abc \equiv 4RS}}{=} \frac{S^2}{p4RS} = \frac{pr}{p4R} = \frac{r}{4R}$$

11) Să se calculeze  $z^n + \frac{1}{z^n}$  știind că  $z + \frac{1}{z} = 2 \sin a$

**Soluție:**

$$z + \frac{1}{z} = 2 \sin a \Rightarrow z^2 - 2(\sin a)z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{\sin a \pm \sqrt{\sin^2 a - 1}}{1}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \sin a \pm \sqrt{-\cos^2 a} \Rightarrow z_{1,2} = \sin a \pm i \cos a$$

$$\text{Deci } z_1 = \sin a + i \cos a$$

$$z_2 = \sin a - i \cos a = \bar{z}_1$$

Calculăm pentru  $z_1$  și  $z_2$ :

$$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = z_1^n + \left(\frac{1}{z_1}\right)^n = z_1^n + z_2^n, \text{ deci } z^n + \frac{1}{z^n} \text{ ia aceiași valoare și pentru } z_1, \text{ și pentru } z_2$$

și este suficient să calculăm pentru  $z_1$ .

$$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = (\sin a + i \cos a)^n + \frac{1}{(\sin a + i \cos a)^n} = \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - a \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right]^n +$$

$$+ \frac{1}{\left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - a \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right]^n} = \cos \left[ n \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right] + i \sin \left[ n \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right] +$$

$$+ \cos \left[ n \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right] - i \sin \left[ n \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right] = 2 \cos \left[ n \left( \frac{\pi}{2} - a \right) \right] \stackrel{\text{cos, par}}{=} 2 \cos \left( na - \frac{a\pi}{2} \right).$$

$$\text{Analog } z_2^n + \frac{1}{z_2^n} = 2 \cos \left[ n \left( a - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

12) Să se rezolve ecuația:  $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$

**Soluție:**

$$\begin{aligned}
(z+1)^n - (z-1)^n &= a \Rightarrow (z+1)^n = (z-1)^n \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{z+1}{z-1} &= \sqrt[n]{1} \Rightarrow \frac{z+1}{z-1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \Rightarrow \\
\Rightarrow z+1 &= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) z - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} - 1\right) z &= \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(-2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) z &= 2 \cos^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \Rightarrow \\
\Rightarrow z &= \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)}{-2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}} = (\text{înlocuim } -1 \text{ cu } i^2 \text{ la numitor}) \\
&= \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin \frac{k\pi}{n} \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{i \sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{i^2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} = -i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}.
\end{aligned}$$

13) Să se demonstreze că dacă  $|z| < \frac{1}{2}$ , atunci  $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$ .

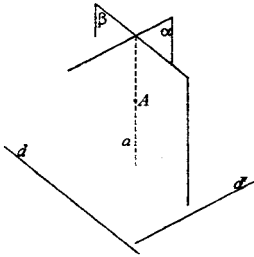
**Soluție:**

Într-adevăr:

$$\begin{aligned}
|(1+i)z^3 + iz| &\stackrel{\substack{\text{prop. modulului} \\ |a+b| \leq |a|+|b|}}{\leq} |(1+i)z^3| + |iz| \stackrel{\substack{\text{prop. } |ab|=|a||b| \\ \text{si pt. numere complexe}}}{=} |1+i| \cdot |z^3| + |i| \cdot |z| = \\
\stackrel{\substack{|1+i|=2 \\ |i|=1}}{=} 2|z^3| + |z| &\stackrel{\text{ip.}}{\leq} 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow |(1+i)z^3 + iz| \leq \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

14) Se dau dreptele  $d$  și  $d'$ . Să se arate că prin fiecare punct al spațiului trece o dreaptă perpendiculară pe  $d$  și  $d'$ .

**Soluție:**



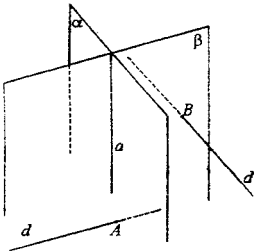
Construim  $\alpha \perp d$  și  $A \in \alpha$ . Planul  $\alpha$  astfel construit este unic. Analog construim  $\beta \perp d'$  și  $A \in \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = a \ni A$ .

Din  $\alpha \perp d \Rightarrow d \perp a$   
 Din  $\beta \perp d' \Rightarrow d' \perp a$  }  $\Rightarrow a$  este o dreaptă ce trece prin

$A$  și este perpendiculară și pe  $d$  și pe  $d'$ . Dreapta  $a$  este unică, deoarece  $\alpha$  și  $\beta$  construite ca mai sus sînt unice.

15) Se dau dreptele  $d$  și  $d'$  nesituate în același plan și punctele  $A \in d$ ,  $B \in d'$ . Să se afle locul geometric al punctelor  $M$  pentru care:

$$\text{pr}_d M = A \text{ și } \text{pr}_{d'} M = B.$$



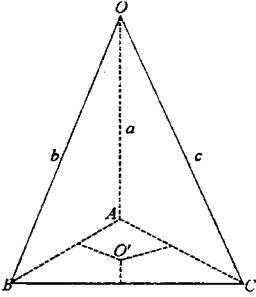
Construim planul  $\alpha$  astfel încît  $A \in \alpha$  și  $d \perp \alpha$ .  
 Construim planul  $\beta$  astfel încît  $B \in \beta$  și  $d' \perp \beta$ .  
 Planele  $\alpha$  și  $\beta$  astfel construite sînt unice. Fie  
 $a = \alpha \cap \beta \Rightarrow a \subset \alpha$  deci  $(\forall) M \in a$  are proprietatea  $\text{pr}_d M = A$ .

$a \subset \beta \Rightarrow (\forall) M \in a$  are proprietatea  $\text{pr}_{d'} M = B$ .

Reciproc. Dacă în spațiu există un punct  $M$  astfel încît  $\text{pr}_d M = A$  și  $\text{pr}_{d'} M = B \Rightarrow M \in \alpha$  și  $M \in \beta \Rightarrow M \in \alpha \cap \beta \Rightarrow M \in a$ .  
 ( $\alpha$  și  $\beta$  construite anterior)

16) Să se găsească locul geometric al punctelor din interiorul unui triedru  $\widehat{abc}$  egal depărtate de muchiile lui  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**Soluție:**



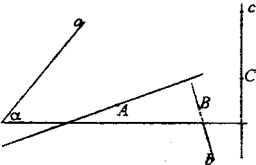
Fie  $A \in a$ ,  $B \in b$ ,  $C \in c$  astfel încît  $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\|$ . Triunghiurile  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OAC$  sunt isoscele. Planele mediatoare ale segmentelor  $\|AB\|$ ,  $\|AC\|$ ,  $\|BC\|$  trec prin  $O$  și  $O'$  (centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ ). Semidreapta  $|OO'|$  este locul geometric căutat.

Într-adevăr  $(\forall) M \in |OO'| \Rightarrow M \in$  palnului mediator al segmentelor  $|AB|$ ,  $|AC|$  și  $|BC| \Rightarrow M$  este egal depărtat de  $a$ ,  $b$  și  $c$ .

Reciproc:  $(\forall) M$  cu proprietatea:  $d(M, a) = d(M, b) = d(M, c) \Rightarrow M \in$  palnul mediator, planelor mediatoare ale segmentelor  $|AB|$ ,  $|AC|$ ,  $|BC| \Rightarrow M \in$  intersecției acestor plane  $\Rightarrow M \in |OO'|$ .

17) Să se construiască o dreaptă care să intersecteze două drepte date și să fie perpendiculară pe altă dreaptă dată.

**Soluție:**



Fie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  cele 3 drepte din spațiu.

I. Presupunem  $a \perp c$  și  $b \perp c$ . Fie  $\alpha$  un plan astfel încît:

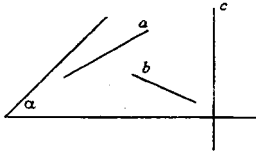
$$\alpha \cap c = \{C\}$$

$$\alpha \cap a = \{A\} \text{ și } \alpha \perp c$$

$$\alpha \cap b = \{B\}$$

Construcția este posibilă pentru că  $a \perp c$  și  $b \perp c$ . Dreapta  $AB$  întâlnește pe  $a$  pe  $p$  și este perpendiculară pe  $c$ , deoarece  $AB \subset \alpha$  și  $c \perp \alpha$ .

II. Dacă  $a \perp c$  sau  $b \perp c$ , construcția nu este mereu posibilă decît dacă planul  $p(a, b)$  este perpendicular pe  $c$ .

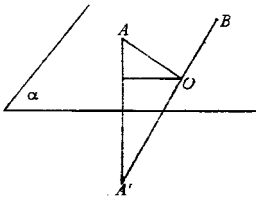


III. Dacă  $a \perp c$  și  $b \not\perp c$ , construim planul  $\alpha \perp c$  astfel încât  $a \subset \alpha$  și  $b \subset \alpha \neq \emptyset$ .

Orice punct de pe dreapta  $a$  unit cu punctul  $b \cap \alpha$  este o dreaptă căutată.

18) Fiind date punctele  $A$  și  $B$  situate de aceeași parte a unui plan, să se afle în acest plan punctul pentru care suma distanțelor sale la  $A$  și  $B$  este minimă.

**Soluție:**

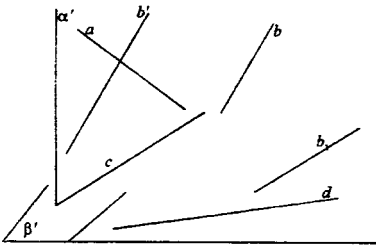


Se construiește  $A'$  simetricul lui  $A$  față de  $\alpha$ .  $A'$  și  $B$  sînt în semispații opuse,  $\alpha \cap |A'B| = O$ .

$O$  este punctul căutat, deoarece  $\|OA\| + \|OB\| = \|OA'\| + \|OB\|$  este minimă cînd  $O \in |A'B|$ , deci punctul căutat este  $O = |A'B| \cap \alpha$ .

19) Printr-o dreaptă să se ducă un plan pe care proiecțiile a două drepte să fie paralele.

**Soluție:**



Fie  $a, b, d$  cele 3 drepte date și prin  $d$  să construim un plan în care  $a$  și  $b$  să se proiecteze

după drepte paralele.

Fie  $A$  un punct arbitrar pe  $a$ . Prin  $A$  construim dreapta  $b' \parallel b$ . Din construcție rezultă  $b \parallel \alpha$ ,  $\alpha = p(a, b')$ .

Fie  $\beta$  astfel încît  $d \subset \beta$  și  $\beta \perp \alpha$ .

Dreptele  $a$  și  $b'$  se proiectează în  $\beta$  după aceeași dreaptă  $c$ . Dreapta  $b$  se proiectează în  $\beta$  după  $b_1$  și  $b_1 \parallel c$ .

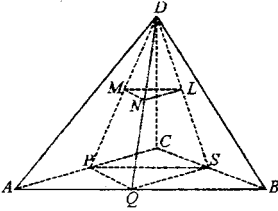
Dacă  $b_1 \not\parallel c \Rightarrow s \cap b_1 = \{N\} \Rightarrow \alpha \cap p(b, b_1) \neq \emptyset \Rightarrow b \cap \alpha \neq \emptyset$ , absurd pentru că  $b \parallel \alpha$  ( $b \parallel b'$ ).

20) Se consideră un tetraedru  $[ABCD]$  și centrele de greutate  $L, M, N$  ale triunghiurilor  $BCD, CAD, ABD$ .

a) Să se arate că  $(ABC) \parallel (LMN)$ ;

b) Să se afle raportul  $\frac{\sigma[ABC]}{\sigma[LMN]}$ .

**Soluție:**



$M$  centru de greutate în  $\triangle ACD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|MD|}{|MP|} = 2 \quad (1)$$

$N$  centru de greutate în  $\triangle ABD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|ND|}{|NQ|} = 2 \quad (2)$$

$L$  centru de greutate în  $\triangle BCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|LD|}{|LS|} = 2 \quad (3)$$

Din 1 și 2  $\Rightarrow MN \parallel PQ$   
 Din 2 și 3  $\Rightarrow ML \parallel QS$  }  $\Rightarrow (LMN) \parallel (PQS) = (ABC) \Rightarrow (LMN) \parallel (ABC)$ .

$$\frac{\sigma[SPQ]}{\sigma[ABC]} = \frac{s}{4s} = \frac{1}{4} \quad (\text{din faptul că } \sigma[AQP] = \sigma[PQS] = \sigma[QBS] = \sigma[PSC] = s).$$

$$\text{Deci } \frac{\sigma[ABC]}{\sigma[LMN]} = \frac{4}{1} \cdot \frac{9}{4} = 9.$$

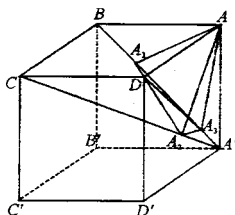
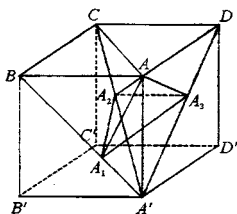
22) Se consideră un cub  $[ABCD A' B' C' D']$ . Punctul  $A$  se proiectează pe  $A' B, A' C, A' D$  respectiv în  $A_1, A_2, A_3$ . Să se arate că:

a)  $A' C \perp (A_1 A_2 A_3)$ ;

b)  $AA_1 \perp A_1A_2$ ,  $AA_3 \perp A_3A_2$ ;

c)  $AA_1A_2A_3$  este unpatrulater inscriptibil.

**Soluție:**



1.  $BD \perp (AA'C)$  din ipoteză  $ABCDA'B'C'D$  cub (1)

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \text{ mijlocul segmentului } |BA'| \\ (ABA') \text{ isoscel și } AA_1 \perp BA' \\ A_3 \text{ mijlocul lui } |A'D| \end{array} \right\} \Rightarrow |A_1A_3| \text{ layură mijlocie în } \triangle A'BD \Rightarrow A_1A_3 \parallel BD. \quad (2)$$

Din (1) și (2)  $\Rightarrow A_1A_3 \perp (AA'C) \Rightarrow A'C \perp A_1A_3$  (3)

Din  $\triangle ACA'$ :  $\|AA_2\| = \frac{\|AC\| \cdot \|AA'\|}{\|A'C\|} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

Din  $\triangle ABA'$ :  $\|AA_1\| = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ ; analog  $\|AA_3\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

În  $\triangle ACA'$ :  $\|AA'\|^2 = \|A'A_2\| \cdot \|A'C\| \Rightarrow a^2 = \|A'A_2\| \cdot a\sqrt{3} \Rightarrow \|A'A_2\| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  și

$\|A'A_1\| = \left\| \frac{a\sqrt{2}}{2} \right\|$ .

$$(\cos \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (\triangle A'BC))$$

$$\|A_1A_2\|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{3} - 2 \frac{a^2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5a^2}{6} - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$$

$$\|AA_2\|^2 = \|A_1A_2\|^2 + \|AA_1\|^2 \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{6}}{9} = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \text{ pct.}(B) \Rightarrow AA_1 \perp A_1A_2 \text{ pct.}(B)$$

$AA_3 \perp A_2A_3$ .

$\triangle A_1A_2A'$  drept. cu  $m(A'A_2A_1) = 90$  pt. că  $\|A'A_1\|^2 = \|A'A_2\|^2 + \|A_1A_2\|^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{6} (a) \Rightarrow A'C \perp A_1A_2 \quad (4)$

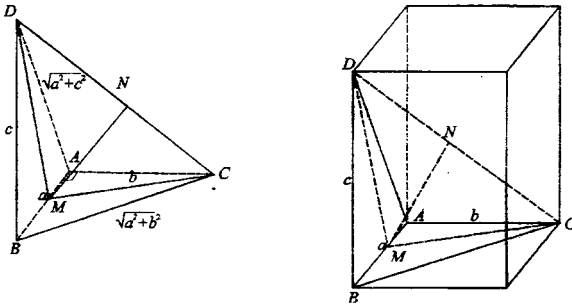
Din 4 și 3  $\Rightarrow A'C \perp (A_1A_2A_3)$ .



Cum  $\left. \begin{array}{l} A'C \perp (A_1A_2A_3) \\ A'C \perp A_2A \text{ (prin constr.)} \end{array} \right\} \Rightarrow A_1A_2A_3A \text{ coplanare} \Rightarrow A_1A_2A_3A \text{ patrulater cu unghiurile opuse } \widehat{A}_1 \text{ și } \widehat{A}_3 \text{ drepte} \Rightarrow A_1A_2A_3A \text{ patrulater inscriptibil.}$

29) Se consideră triunghiurile dreptunghice  $BAC$  și  $ABD(m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABD}) = 90^\circ)$  situate în plane perpendiculare  $M$  și  $N$  fiind mijloacele segmetelor  $[AB], [CD]$ . Să se arate că  $MN \perp CD$ .

**Soluție:**



Concluzia este adevărată numai dacă  $\|BD\| = \|AC\|$  adică  $b = c$

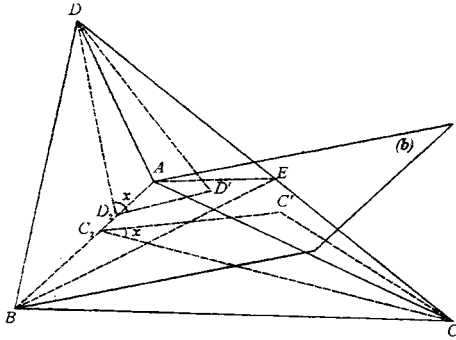
$$\|NC\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}; \|MC\| = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}; \|MN\| = \frac{b^2 + c^2}{3}$$

(cu teorema mediane în  $\triangle DMC$ ).

$$MN \perp DC \text{ dacă } \|MC\|^2 = \|MN\|^2 + \|NC\|^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + \frac{b^2 + c^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 4b^2 + a^2 \Rightarrow c^2 = b^2 \Rightarrow b = c.$$

30) Să se demonstreze că semiplanul bisector al unui unghi diedru într-un tetraedru, împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor alăturate.

**Soluție:**



plan bisector

$$\left. \begin{array}{l} DD' \perp (ABE) = b \\ DD_1 \perp AB \\ CC' \perp (ABE) \\ CC_1 \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} D'D_1 \perp AB \\ C'C_1 \perp AB \text{ cum } C', C_1, D', D_1 \end{array} \right\} \Rightarrow D_1D' \parallel C_1C''.$$

$$m(\widehat{DD_1D'}) = m(\widehat{C'C_1C}) = x \text{ (b semiplan bisector)}$$

$$\text{În triunghiul } DD_1D' : \left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{\|DD'\|}{\|DD_1\|} \\ \sin x = \frac{\|CC'\|}{\|CC_1\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|DD_1\|} = \frac{\|CC'\|}{\|CC_1\|} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{\|DD_1\|}{\|CC_1\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{\sigma[ABD]}{\sigma[ABC]} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} v[ABED] = \frac{\sigma[ABE] \cdot \|DD'\|}{3} \\ v[ABEC] = \frac{\sigma[ABE] \cdot \|CC'\|}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|DD'\|}{\|CC'\|} = \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} \quad (2)$$

dar

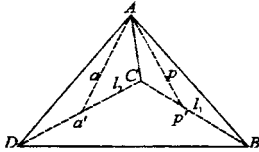
$$\left. \begin{array}{l} v[ABED] = \frac{\sigma[DEC] \cdot d(A, (DEC))}{3} \\ v[ABEC] = \frac{\sigma[BEC] \cdot d(A, (DBC))}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} = \frac{\sigma[BDE]}{\sigma[BEC]} = \frac{\|DE\| \cdot d(B, DC)}{\|EC\| \cdot d(B, DC)} =$$

$$= \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \Rightarrow \left| \frac{v[ABED]}{v[ABEC]} \right| = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \quad (3)$$

$$\text{Din 1, 2, 3} \Rightarrow \frac{\sigma[ABD]}{\sigma[ABC]} = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} \text{ c. t. d.}$$

31) Fie  $A$  un vîrf al unui tetraedru regulat și  $P, Q$  două puncte pe suprafața lui. Să se arate că  $m(\widehat{PAQ}) \leq 60^\circ$ .

**Soluție:**



Tetraedrul fiind regulat  $\Rightarrow \|AB\| = \dots =$

$$\|BD\| = l$$

$$\|CP'\| = l_1$$

$$\|CQ'\| = l_2$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{QAP} &= \cos(\widehat{Q'AP'}) = \frac{\|AQ'\|^2 + \|AP'\|^2 - \|Q'P'\|^2}{2\|AQ'\| \cdot \|AP'\|} \geq \text{majorăm numitorul} \geq \\ &\geq \frac{l^2 + l_2^2 - l_2 + l^2 - l_1 - l_1^2 - l_2^2 + l_1 l_2}{2l^2} = \frac{l^2 + l^2 - l_1 - l_2 + l_1 l_2}{2l^2} = \frac{1}{2} + \frac{(l - l_1)(l - l_2)}{2l^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \widehat{QAP} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{QAP}) \leq 60^\circ. \end{aligned}$$

Dacă unul din punctele  $P$  sau  $Q$  se află pe fața  $CBD$  problema este evidentă.

32) Să se arate că suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru este mai mare decît  $360^\circ$ .

**Soluție:**

163-2

Considerăm triedrul  $Oxyz$  demonstrăm că suma măsurilor diedrelor acestui triedru, este mai mare decît  $360^\circ$ . Într-adevăr: fie  $100'$  bisectoarea interioară triedrului  $Oxyz$  ( $1000'$  intersecția planelor bisectoare ale celor 3 diedre) ...? triedrului în  $A, B, C$ .

Mărima fiecărui diedru cu muchiile  $ox, oy, oz$  este mai mare decît mărimile unghiurilor corespunzătoare  $\triangle ABC$  suma măsurilor unghiurilor diedre ale triedrului  $Oxyz$  este mai mare decît  $180^\circ$ .

Fie  $(a, b)$  pl.  $\perp$  pe  $oz$  în  $C$ ;  $a \perp oz$  dar  $|CA$  și  $|CB$  sunt în același semispațiu față de  $b \perp oz$   
 $(ab) \Rightarrow m(\widehat{C}) < m(\widehat{ab})$ .

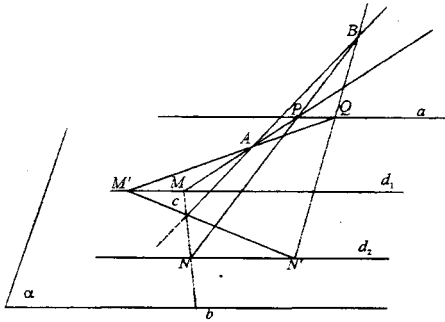
Fie în tetraedrul  $ABCD$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  și  $\alpha_6$  cele 6 unghiuri diedre formate de fețele tetraedrului.

$$\left. \begin{array}{l} m(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > 180 \\ m(\alpha_1) + m(\alpha_3) + m(\alpha_6) > 180 \\ m(\alpha_2) + m(\alpha_4) + m(\alpha_5) > 180 \\ m(\alpha_4) + m(\alpha_5) + m(\alpha_6) > 180 \end{array} \right\} \text{Conform inegalității stabilite anterior.}$$

$$2(m(\alpha_1) + m(\alpha_2) + \dots + m(\alpha_6)) > 4 \cdot 180 \Rightarrow m(\alpha_1) + \dots + m(\alpha_6) > 360^\circ.$$

33) Să se considere dreptele planele  $d_1, d_2$  conținute într-un plan  $\alpha$  și o dreaptă  $AB$  care intersectează planul  $\alpha$  în punctul  $C$ . O dreaptă variabilă, inclusă în  $\alpha$  și trecând prin  $C$  toate  $d_1, d_2$  respectiv în  $MN$ . Să se afle locul geometric al intersecției  $AM \cap BN$ . În ce caz locul geometric este mulțimea vidă.

**Soluție**



Notăm cu  $a$  intersecția planelor  $(A, d_1)$  și  $(B, d_2)$ . Deci

$$(A, d_1) \cap (B, d_2) = a.$$

Fie  $b$  o dreaptă variabilă ce trece prin  $C$  și conținută în  $\alpha$ , care taie pe  $d_1$  și  $d_2$  în  $M$  respectiv  $N$ . Avem:  $MA \subset (A, d_1)$   $MA \cap NB = P$  ( $MA$  și  $NB$  se intersectează deoarece sînt conținute în planul determinat de  $(AM, b)$ ).

Deci  $P \in (Ad_1)$  și  $P \in (Bd_2) \Rightarrow P \in a$  deci  $P$  descrie dreapta  $a$  intersecția planelor  $(A, d_1)$  și  $(B, d_2)$ . Reciproc: fie  $Q \in a$

În planul  $(A, d_1)$ :  $QA \cap d_1 = M'$ .

În planul  $(B, d_2)$ :  $QB \cap d_2 = N'$ .

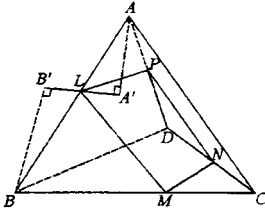
Drepte  $N'M'$  și  $AB$  sînt coplanare (ambele se află în planul  $(Q, A, B)$ ). Dar cum  $M'N' \subset \alpha$  și  $AB$  are doar punctul  $C$  comun cu  $\alpha \Rightarrow M'N' \cap AB = C$ .

Deci  $M'N'$  trece prin  $C$ . Dacă planele  $(A, d_1)$  și  $(B, d_2)$  sînt paralele locul geometric este mulțimea vidă.

34) Un plan  $\alpha$  intersectează laturile  $[AB], [BC], [CD], [DA]$  ale unui tetraedru  $\{ABCD\}$  în punctele  $L, M, N, P$ . Să se demonstreze că:

$$\|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|PD\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\| \quad a$$

**Soluție:** Caz particular. Dacă planul  $(LMNP) \parallel BD$  avem:



Reamintim teorema: Dacă un plan  $\gamma$  intersectează două plane  $\alpha$  și  $\beta$  a.i.  $\sigma \parallel \alpha \cap \beta \Rightarrow (\gamma \cap \alpha) \parallel (\gamma \cap \beta) \parallel (\alpha \cap \beta)$ . Dacă planul  $(LMNP) \parallel BD$  avem:

$$\left. \begin{aligned} LP \parallel MN \parallel BD &\Rightarrow \frac{\|LA\|}{\|AP\|} = \frac{\|LB\|}{\|PD\|} \Rightarrow \|LA\| \cdot \|PD\| = \|AP\| \cdot \|LB\| \\ MN \parallel BD &\Rightarrow \frac{\|NC\|}{\|MC\|} = \frac{\|ND\|}{\|MB\|} \Rightarrow \|BM\| \cdot \|NC\| = \|ND\| \cdot \|MC\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|DP\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\|.$$

Dacă  $(LMNP) \parallel AC$  avem:  $LM \parallel PN \parallel AC \Rightarrow \frac{\|PD\|}{\|DN\|}$  și  $\frac{\|AL\|}{\|MC\|} = \frac{\|LB\|}{\|BM\|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|CN\| \cdot \|DP\| = \|DN\| \cdot \|AP\| \\ \|AL\| \cdot \|BM\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \end{cases} \Rightarrow \text{relația } \alpha$$

**Soluție:**

Fie  $A', B', C', D'$  proiecțiile punctelor  $A, B, C, D$  în planul  $(MNPL)$ .

De ex. punctele  $B', L, A'$  sînt coliniare în planul  $(LPMN)$  deoarece se găsesc pe proiecția dreptei  $AB$  în acest plan.

$$\triangle ALA' \sim \triangle BLB'(U, U) \Rightarrow \frac{\|AL\|}{\|LB\|} = \frac{\|AA'\|}{\|BB'\|}$$

$$\text{Analog obținem: } \frac{\|PD\|}{\|AP\|} = \frac{\|DD'\|}{\|AA'\|}, \frac{\|CN\|}{\|ND\|} = \frac{\|CC'\|}{\|DD'\|}, \frac{\|BM\|}{\|MC\|} = \frac{\|BB'\|}{\|CC'\|}$$

Prin înmulțirea celor 4 relații  $\Rightarrow$

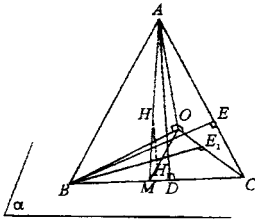
$$\frac{\|AL\| \cdot \|PD\| \cdot \|CN\| \cdot \|BM\|}{\|LB\| \cdot \|AP\| \cdot \|DN\| \cdot \|MC\|} = 1 \Rightarrow \text{relația (a) din d}$$

35) Dintr-un punct  $A$  exterior unui plan  $\alpha$  se duce perpendiculara  $AO$   $O \in \alpha$  și se iau  $B, C \in \alpha$ . Fie  $H, H_1$  respectiv ortocentrele triunghiurilor  $ABC, OBC$ ;  $AD$  și  $BE$  înălțimi în triunghiul  $ABC$ , iar  $BE_1$  înălțime în triunghiul  $OBC$ . Să se arate:

a)  $HH_1 \perp (ABC)$

b)  $\frac{\|OA\|}{\|AD\|} \cdot \frac{\|DH_1\|}{\|H_1B\|} \cdot \frac{\|BE\|}{\|EE_1\|} = 1$

**Soluție:**



M-Mijlocul lui  $|BC|$ .

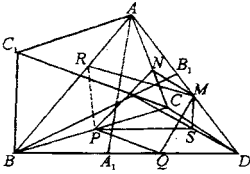
36) Se dă un tetraedru  $[ABCD]$  în care  $AB \perp CD$  și  $AC \perp BD$ .

Să se arate:

a)  $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 =$   
 $BC\|^2 + \|AD\|^2 = \|CA\|^2 + \|BD\|^2$

b) mijloacele celor 6 muchii se află pe o sferă.

**Soluție:**



(1)  $AB \perp CD$  (ipoteză).

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AB \Rightarrow AB \perp DH$  (2)

Din 1 și 2  $\Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CH \Rightarrow CH$   
 înălțime în  $\triangle ABC$  a

$AC \perp BD$  (3)

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AC \Rightarrow AC \perp DH$  (4)

Din 3 și 4  $\Rightarrow AC \perp (BDH) \Rightarrow AC \perp BH \Rightarrow BH$  înălțime în  $\triangle ABC$  b

Din a și b  $\Rightarrow H$  ortocentrul  $\triangle ABC$ . Fie  $C_1$  punctul diametral opus lui  $C$  în cercul  $C(ABC)$   $CC_1$  diametru  $\Rightarrow m(\widehat{BC}) = 90^\circ$  dar și  $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel BC_1$ . Analog  $BH \parallel C_1A$  deci  $AHBC_1$  paralelogram, avem astfel:

$\|AH\|^2 + \|BC\|^2 = \|BC_1\|^2 + \|BC\|^2 = \|CC_1\|^2 = (2R)^2$  analog

$\|BH\|^2 + \|AC\|^2 = (2R)^2$  ( $\|BH\| = \|AB_1\|$ )  $B_1$  diametral opus lui  $B$

$\|CH\|^2 + \|AB\|^2 = (2R)^2$  ( $\|CH\| = \|BA_1\|$ )

dar  $DH \perp (ABC) \Rightarrow \left. \begin{aligned} \|AH\|^2 &= \|AD\|^2 - \|DH\|^2 \\ \|BH\|^2 &= \|BD\|^2 - \|DH\|^2 \\ \|CH\|^2 &= \|DC\|^2 - \|DH\|^2 \end{aligned} \right\} \text{înlocuind sus avem:}$

$\|AD\|^2 + \|BC\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$

$\|BD\|^2 + \|AC\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$

$\|DC\|^2 + \|AB\|^2 = (2R)^2 + \|DH\|^2$  c.t.d.

Fie  $N, M, Q, P, S, R$  mijloacele muchiilor. Patrulaterului  $NMQP$  pentru că:

$NM \parallel CD \parallel PQ$  (linii mijlocii)

$QM \parallel AB \parallel PN$  — — — —

dar  $CD \perp AB$

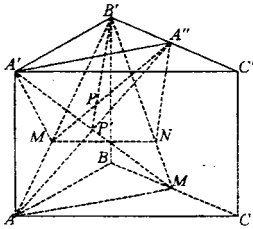
$\Rightarrow MNQP$  dreptunghi  $|NQ| \cap |PM| = \{O\}$ .

Analog  $MSPR$  dreptunghi cu  $|MP|$  diagonală comună cu a primul dreptunghi deci cele 6 puncte sînt egal depărtate de "O" mijlocul diagonalelor în cele două dreptunghiuri  $\Rightarrow$  cele 6

puncte sînt pe o sferă.

37) Se dă o prismă triunghiulară  $[ABC A'B'C']$  care are fețele laterale pătrate. Fie  $M$  un punct mobil pe  $[AB']$ ,  $N$  proiecția lui  $M$  pe  $(BCC')$  și  $A''$  mijlocul lui  $[B'C']$ . Să se arate că  $A'N$  și  $MA''$  se intersectează într-un punct  $P$  și să se afle locul geometric a lui  $P$ .

**Soluție:**



$M$  arbitrar pe  $|AB'|$

$N = pr_{(BCC')}M$

$A''$  mijlocul segmentului  $[B'C']$

Cînd  $M = B'$ , punctul  $P$  ocupă poziția  $B'$ .

Cînd  $M = A$ , punctul  $P$  ocupă poziția  $\{P_1\} = [A'A_1] \cap [AA'']$

( $A'A''A_1A$  dreptunghi, deci  $P_1$  este intersecția diagonalelor dreptunghiului)

[Locul geometric este  $[B'P_1]$ ].

Fie  $M$  arbitrar  $M \in |AB'|$ .

$N = pr_{(BCC')}M \in |A_1B'|$  deoarece:  $(B'AA_1) \perp (B'CC')$ .

Prin modul în care a fost construit  $AA_1 \perp BC$ ,  $AA_1 \perp CC' \Rightarrow AA_1 \perp (B'CC') \Rightarrow (\forall)$  plan ce conține pe  $AA_1$  este perpendicular pe  $(B'CC')$ , în particular  $(B'AA_1) \perp (B'CC')$

(1)  $[B'P_1] \subset (B'A''A)$  pentru că  $B', P \in (B'A''A)$

(2)  $[B'P_1] \subset (A'B'A_1)$  din acest motiv  $B', P_1 \in (A'B'A_1)$

Din 1 și 2  $\Rightarrow B'P_1 = (A'B'A_1) \cap (B'A''A)$

Fie  $\{P\} = |MA''| \cap |A'N|$

Cum  $|MA''| \subset (B'A''A)$  și

$|A'N| \subset (A'B'A_1)$

Deci  $(\forall) M \in |B'A|$  și avem că  $|MA''| \cap |A'N| \in |B'P_1|$ .

Reciproc. Fie  $P$  arbitrar,  $P \in |B'P_1|$  și

În planul  $(B'A''A)$ :  $\{M\} = |B'A| \cap |A''P|$

În planul  $(B'A'A_1)$ :  $\{N\} = |B'A_1| \cap |A'P|$

Trebuie să demonstrăm că ...?



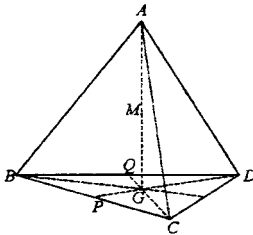
Într-adevăr:  $A'A'' \parallel (B'AA_1)$  deci orice plan care trece prin  $A'A''$  va intersecta  $(B'AA_1)$  după o dreaptă paralelă cu  $A'A''$ . Deci  $MN \parallel A'A''$  sau  $MN \parallel AA_1$  cum  $M \in (B'AA_1) \Rightarrow MN \perp (B'CC')$ .

Am dem.  $(\forall) M \in |B'A|$  și  $N = pr_{(B'CC')}$  avem că  $\{P\} = |MA'' \cap |A'N|$  descrie  $[B'P_1]$  și reciproc,  $(\forall) P \in [B'P_1]$  există  $M \in |B'A|$  și  $N \in |B'A_1|$  astfel încît  $N = pr_{(B'CC')}M$  și  $P$  este intersecția diagonalelor patrulaterului  $A'NMA''$ .

38) Fie tetraedrul  $[ABCD]$  și  $G$  centru de greutate al triunghiului  $BCD$ . Să se arate că dacă  $M \in AG$  atunci

$$v[MGBC] = v[MGCD] = v[MGDB].$$

**Soluție:**



$$1 \quad \sigma[CDG] = \sigma[BDG] = \sigma[BCG] = \frac{\sigma[BCD]}{3}$$

rezultat cunoscut

$$3 \quad \begin{cases} v[MGCD] = \frac{\sigma[GCD]d(M, (BCD))}{3} \\ v[MGDB] = \frac{\sigma[BDG]d(M, (BCD))}{3} \\ v[MGBC] = \frac{\sigma[BCG]d(M, (BCD))}{3} \end{cases}$$

$$\text{Din 1 și 3} \Rightarrow v[MGCD] = v[MGDB] = v[MBC].$$

**FLORENTIN SMARANDACHE**

**Probleme compilate și rezolvate  
de geometrie și trigonometrie**

Semnat pentru tipar 12.XII.97. Formatul 60×84. 1/16. Rotoprint.  
Comanda 268. Preț contractual.

Secția poligrafia operativă  
a U.S.M.. 2009. Chișinău,  
str. Mateevici, 60.

