Геометрические аксиомы, опровергающие континуум-гипотезу

Дм. Ватолин
dmvatolin@rambler.ru

В работе формулируются три геометрические аксиомы, из которых доказывается, что мощность действительной прямой больше мощности любого вполне упорядоченного множества. Т.е. из аксиом следует, что континуум сколь угодно долго можно приводить в состояние вполне порядка, но этот процесс так и останется незавершённым. Из аксиом доказывается ещё одно важное равенство: $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. Основные результаты работы сосредоточены собственно в формулируемых аксиомах.

§1. Определение гиперпрямой

1.1. «Гиперпрямой» или «гипердействительной прямой» назовём множество формальных сумм, имеющих ω_1 слагаемых. Именно, с элементом гиперпрямой отождествим каждое формальное трансфинитное выражение вида: $\pm(\nu+\Sigma(\delta_\mu/2^\mu))$. Ординал $\nu < \omega_1$ здесь может быть и нулём, а μ пробегает, начиная с единицы, а не с нуля, все ординалы $< \omega_1$, по которым производится формальное несчётное суммирование. δ_μ принимает значение 0 или 1, в зависимости от μ. Элемент гиперпрямой будем записывать и в более простой форме: $\pm\ \nu, \delta_1\delta_2 \dots\ \delta_\omega \dots$, где последняя несчётная запись рассматривается как двоичная для некоего «гипердействительного числа». Знак «+» или «-» ставится так же, как перед обычными числами. Среди формальных записей вводится лексикографический порядок, отражающий естественный геометрический порядок расположенных на гиперпрямой точек. Для теорем, которые находятся ниже, «гипердействительные числа» удобно рассматривать как «порядковые числа непрерывного ряда», как «гипердействительные координаты», но не как числа, связанные алгебраическими операциями.

Гиперпрямую обозначим символом **C**$_1$. Нижний индекс после символа **C** - ординальный индекс, связанный с длиной двоичных последовательностей, но не с размерностью пространства. Множество **C**$_1$ включает в себя подмножество, которое будем называть (гиперрациональной) «базой». База обозначается, как **B** и содержит все вышеупомянутые бесконечные выражения, суммирование в которых обрывается на конечном или счётном ординале. Это означает, что если **x** принадлежит **B** и равен $\pm\ \nu, \delta_1\ \delta_2 \dots\ \delta_\omega \dots$, то для некоторого $\beta < \omega_1$ будет $\delta_\beta = 1$ и $\forall\alpha > \beta\ \delta_\alpha = 0$, или же, сразу после запятой идут одни нули, но ординал ν не является предельным. Точки базы являются аналогом рациональных точек действительной прямой. Точка из **B** считается заданной двумя двоичными выражениями, подобно двоично-рациональным числам, и поэтому считается «гиперрациональной». Если в первой записи «гиперрационального числа **x**» после запятой встречаются как нули, так и единицы, то в записи, задающей «гиперчисло **x**» уже вторым способом, левее β-ого места нули и единицы стоят в прежнем порядке, однако, на β-м месте стоит нуль, а все остальные места, расположенные правее, занимают единицы. Если же, в первой записи сразу после запятой идут одни нули, т.е. она имеет вид $\pm\ \nu,000 \dots$ то вторая запись имеет вид $\pm\ \chi,\ 111\dots$, где $\chi = \nu-1$, т.е. после запятой встречаются только единицы. Точки, не принадлежащие **B**, представимы только одной записью.

Считаем, что «в концах гиперпрямой» расположены бесконечно удалённые элементы. Их обозначим как $+\omega_1$ и $-\omega_1$. Бесконечно удалённые элементы берутся так, что они не принадлежат множеству $\mathbf{C_1}$. Элемент $+\omega_1$ вводится как самый правый (максимальный) по отношению к точкам из $\mathbf{C_1}$, элемент $-\omega_1$ вводится как самый левый (минимальный) по отношению к точкам из $\mathbf{C_1}$. Заметим, что лексикографический порядок на гиперпрямой является линейным порядком.

«Натуральной последовательностью» или «последовательностью длины ω_0» назовём последовательность, элементы которой пронумерованы всеми натуральными числами. «Трансфинитной последовательностью длины ω_1» назовём последовательность, элементы которой пронумерованы всеми конечными и счётными ординалами. Если не сделано специальных оговорок, то последовательности «длины ω_1» будем называть просто «трансфинитными». Считается, что мощность последовательности совпадает с мощностью множества индексов, которыми нумеруются элементы последовательности.

Пусть Q и P - точки гиперпрямой, и Q < P. Интервалом с концами в Q и P считается множество всех точек расположенных между Q и P, объединённое, возможно, с одной или обеими точками из пары Q, P. Открытым интервалом считается интервал, не включающий свои концы. Полуоткрытым справа (слева) считается интервал, включающий точку Q (включающий P) и не включающий P (не включающий Q). Замкнутым будет интервал, включающий оба свои конца.

В качестве окрестности элемента гиперпрямой мы возьмём любой открытый интервал, содержащий этот элемент. Окрестностью бесконечно удалённого элемента будет любой открытый интервал гиперпрямой, такой, что конец интервала совпадает с этим самым бесконечно удалённым элементом.

Пределом натуральной последовательности будет элемент, в любой окрестности которого содержатся все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного их числа. Пределом трансфинитной последовательности является элемент, в любой окрестности которого содержатся все элементы последовательности, за исключением не более чем счётного количества её членов. Если последовательность имеет предел, то она называется «сходящейся».

«Точкой типа $\delta\sigma$» назовём такой элемент гиперпрямой, который является пределом для строго возрастающей последовательности длины ω_δ и для строго убывающей последовательности длины ω_σ. Последовательность строго возрастает, если каждый последующий её член правее всех предыдущих, и строго убывает, если каждый её последующий член левее всех предыдущих. Точки одного типа образуют множество, которое обозначается как $\mathbf{T}(\delta\sigma)$.

1.2. Из данных определений извлекается:

Свойство I. Любое не пустое и не более чем счётное множество точек базы ограничено слева и справа точками базы, не принадлежащими этому не более чем счётному множеству. Бесконечно удалённые элементы есть пределы несчётных последовательностей.

Свойство II. Пусть L и M – не пустые не более чем счётные множества, составленные из точек базы так, что все элементы L меньше всех элементов M. Тогда, найдётся $q \in \mathbf{B}$ который расположен строго между множествами L и M, т.е. любой элемент из L будет $< q$, а любой элемент из M $> q$.

Свойство III. Никакая счётная последовательность, составленная из точек базы, не сходится к элементу **B**, при условии, что все члены последовательности отличны от предела.

Свойство IV. Множество **B** всюду плотно на гиперпрямой, т.е. на любом открытом интервале, лежащем в $\mathbf{C}_1$, содержатся точки базы.

Чтобы дополнительно пояснить перечисленные свойства, рассмотрим аналогию между множеством **B** и множеством рациональных чисел **Q** (вместо **Q** можно взять также множество двоично-рациональных чисел, представленных конечными двоичными последовательностями). В самом деле:

(i) любое не более чем конечное подмножество **Q** ограничено, и элементы, бесконечно удалённые в отношении чисел действительной прямой, можно рассматривать как пределы некоторых счётных последовательностей;

(ii) между любыми двумя конечными множествами рациональных чисел, расположенных так, что все элементы одного множества больше всех элементов другого, всегда найдётся рациональное число не равное ни одному из чисел данных множеств;

(iii) никакая конечная последовательность рациональных чисел не сходится к рациональному числу, если все элементы последовательности отличны от предполагаемого предела;

(iv) множество всех рациональных чисел всюду плотно на действительной прямой.

Доказательство свойств I - IV сводится к примитивному, но в то же время, достаточно длинному разбирательству на трансфинитных последовательностях, и приводиться не будет. Отличие от аналогичного разбирательства, на множестве натуральных последовательностей нулей и единиц, только количественное (в трансфинитном количестве шагов рассуждения). Обратно, свойства I и II влекут возможность задания гиперконтинуума через двоичные последовательности:

Утверждение. Пусть **S** - непустое частично упорядоченное множество, обладающее свойствами I и II. Тогда, в **S** можно выделить подмножество **U**, изоморфное множеству **B**.

Иначе говоря, из свойств I и II следует, что существует функция F, отображающая взаимно однозначно все элементы множества **U** на все элементы множества **B** так, что $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$.

Доказательство утверждения также опустим. Оно проводится методом уплотнения извлечённых из **S** элементов, через трансфинитное количество шагов.

Свойство V. Мощность множества **B** равна мощности континуума действительных чисел:. card(**B**) = card($\mathbf{C}_0$), где $\mathbf{C}_0$ - множество действительных чисел.

Свойство VI. Мощность гиперпрямой равна $2^{\aleph_1}$.

Доказательство свойств V и VI. В самом деле, элементы множества **B** задаются счётными множествами нулей и единиц и значением положительного или отрицательного ординала $\nu < \omega_1$, стоящего до запятой двоичной записи. Каждое отмеченное счётное множество задаётся множеством ординалов **M**, меньших некоторого $\beta < \omega_1$. При фиксированных ν и β **M** однозначно соответствует определённому q $\in$ **B** следующим образом: если $\alpha \in$ **M**, то δ_α=1, если $\alpha \notin$ M, то δ_α=0; q равен ± ν, $\delta_1\delta_2\delta_3 \ldots \delta_\omega \ldots$; значение δ_β равно 1; для $\alpha > \beta$ δ_α = 0. Отсюда, card(**B**) равна количеству всех совокупностей вида $\{\delta_\alpha\}$, где $\alpha < \beta$, помноженному на количество ординалов β и на количество всех указанных ν с учётом знака. Т.е. card(**B**) = $2^{\aleph_0} \times \aleph_1 \times \aleph_1 \times 2 = 2^{\aleph_0}$. Для $\mathbf{C_1}$, счётные двоичные записи должны быть заменены на несчётные, которых всего $2^{\aleph_1}$, и поэтому: card($\mathbf{C_1}$) = $2^{\aleph_1} \times \aleph_1 \times 2 = 2^{\aleph_1}$.

Чтобы подробнее описать структуру гиперпрямой, отметим

Свойство VII. Точка гиперпрямой не может принадлежать разным типам. Точки из **B** принадлежат типу 11. На гиперпрямой нет точек типа 00.

Утверждение можно сформулировать так: **T** ($\delta'\sigma'$) $\cap$ **T** ($\delta\sigma$) = $\varnothing$, если $\delta' \neq \delta$ или $\sigma' \neq \sigma$. **B** $\subseteq$ **T (11). T (00)** = $\varnothing$.

§2. Метаматематическая терминология

«Канонической деформацией» назовём гомеоморфизм, интерпретируя его определённым образом. Область определения гомеоморфизма трактуется как начальное место расположения множества, подвергаемого деформации. Область значений гомеоморфизма трактуем как конечное место расположения точечного множества. Промежуточные положения точечного множества, возникающие в процессе деформирования между начальным и конечным положениями, не рассматриваются.

Деформированное множество, и до и после деформации считается одним и тем же объектом, подобно тому, как физическое тело остаётся самим собой при изгибах. Если следовать этому признаку в определении о том, что является «деформацией», то через отображения задаются далеко не все теоретико-множественные объекты, интуитивно соответствующие термину «деформация». Термином «интуиционистские деформации», охарактеризуем те деформации, которые определимы на классическом формальном языке, существование которых, на данный момент, не доказано, и которые вводятся через аксиомы. Мы будем называть их так же «метаморфозами» или «трансформациями».

Пусть, M - точечное множество подвергаемое каноническому или интуиционистскому деформированию. После деформирования можно обозначить его снова как M, не смотря на то, что это множество переходит в новое состояние. В нашем изложении, иногда удобнее не менять обозначение объекта при смене его состояний. Но в каком именно состоянии находится объект, так или иначе отмечается. Деформирование, если его обозначить Ω, трактуется как оператор, действующий на объект M. В результате деформирования объект переходит в состояние ΩM.

Замыкание и внутренность точечного множества L обозначаются как cl(L) и int(L) соответственно. Под (собственной) внутренностью отрезка линии, не пересекающего себя, подразумевается множество всех точек отрезка, не совпадающих с его концами. У плоской фигуры (собственная) внутренность совпадает с объединением всех подмножеств фигуры гомеоморфных открытому евклидовому кругу (как критерию открытого множества). Дополнение множества (геометрической фигуры) L в множество (фигуру) M обозначается как M⌉L. Через ⌉L обозначается дополнение к множеству L «во внешнее пространство», ясное по контексту.

§3. Определение евклидовых линий, условно различающиеся концы которых расположены как точки базы **B**. Формулировка двух аксиом, позволяющих разрешить континуум-проблему

3.1. В евклидовой плоскости, в которой введены ортогональные оси координат, возьмем открытый круг единичного радиуса, имеющий центр в начале координат O. Пусть область D является пересечением круга с первым квадрантом рассматриваемой плоскости. Считаем, что D совпадает со своей внутренностью: int(D) = D. Через C обозначим дугу окружности – ту часть границы отмеченного круга, которая лежит в первом квадранте. Считаем, что дуга содержит свои концы, и можно написать C = дуга XY, где X - точка, расположенная на положительной части оси x-ов, а Y - точка на положительной части оси y-ов (рис. 1).

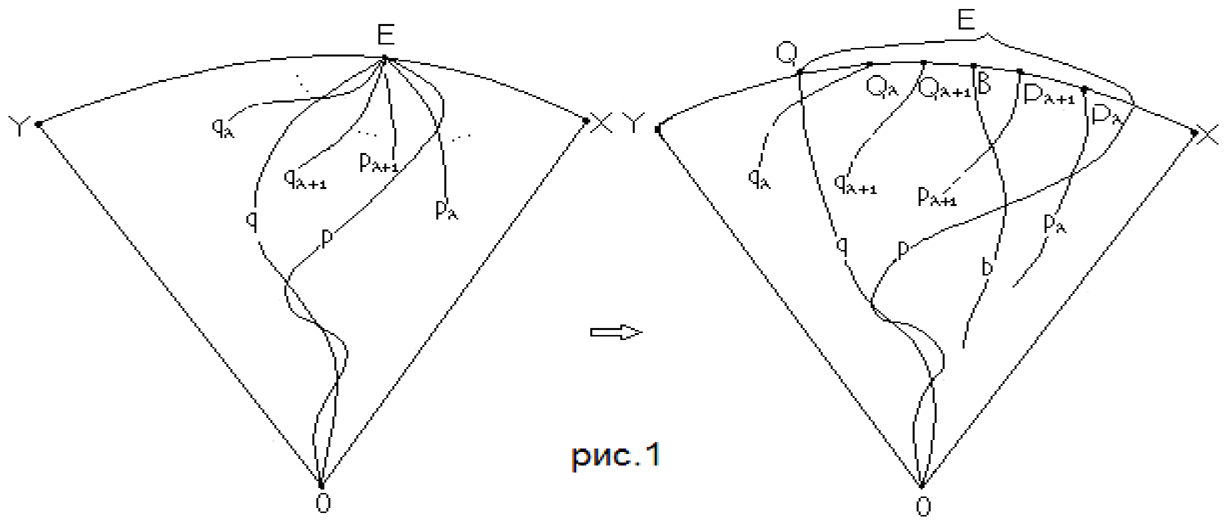


рис.1

Составим множество **H** из всех непрерывных линий, расположенных в области D так, что один конец каждой из этих линий совпадает с точкой O, и сама линия неограниченно приближается к дуге C (в частности, второй конец линии может совпадать с какой-нибудь точкой E на дуге C), причём: если точка Z пробегает линию q из **H**, длина отрезка OZ равна r, а величина угла XOZ равна φ, то линия однозначно задаётся непрерывной функцией f_q такой, что, если $0 < r < 1$, и через эту функцию определяется значение угла $\varphi = f_q(r)$, которому разрешается лежать в интервале $0 < \varphi < \pi/2$. Области определения и значений функций, задающих линии, содержат только обычные действительные числа.

Каждая q из **H** делит область D на две части, не содержащие точек линии. Эти части назовём «левым» и «правым» множествами в отношении к этой линии. Любая точка левого множества считается расположенной левее q, а любая правого – правее q, если вдоль q, как по кривому лучу, смотреть по направлению от точки O к дуге C. В частности, это означает, что если $W \in D$ & $|OW| = r$ & $\psi =$ угол XOW, то W левее q, если $\psi > \phi = f_q(r)$, и W правее q, если $\psi < \phi = f_q(r)$.

Пусть $q, p \in$ **H**. Рассмотрим подвижные точки U и V, которые пробегают q и p от O до дуги C соответственно так, что во время пробега они не занимают два раза одного положения. Пусть U и V стартуют одновременно в нулевой момент времени и также достигают C в один и тот же финальный момент времени t_f. Тогда, если, начиная с некоторого момента $\tau < t_f$ для всех моментов времени, взятых с открытого интервала от τ до t_f, будет оказываться, что U левее p или V правее q, то будем писать: q << p (или p >> q) и говорить: «q заканчивается левее p», или «p заканчивается правее q». Если же после момента τ точка U всё оставшееся до t_f время будет двигаться по линии p, или точка V будет двигаться по линии q, то это означает, что некоторые сегменты линий, примыкающие к дуге C, совпадают. Тогда говорим, что линии q и p «эквивалентны», и обозначать это положение вещей так: $q \sim p$. Все требования к отношению эквивалентности при этом соблюдаются. Если $q \ll p \vee q \sim p \vee q \gg p$, то линии назовём «сравнимыми». В противном случае, линии назовём «несравнимыми». Несравнимы q и p будут, например, тогда, когда точка U в любой временной окрестности момента t_f будет оказываться как левее, так и правее линии p.

Если q заканчивается левее линии h, а линия h заканчивается левее линии p, то q заканчивается левее p. Т.е. q << h и h << p влечёт q << p. Кроме того, заменив линии q, h, p на эквивалентные им: q', h', p' соответственно, получим, что q' << h' << p'. Т.е. отношение порядка на линиях множества **H** транзитивно.

3.2. Пусть точки S и T расположены на дуге C так, что угол YOS меньше угла YOT. Тогда считается, что «S расположена левее T», а «T расположена правее S», обозначается S < T или T > S.

Предположим, что q << p. Если расположенные на дуге C концы линий – Q и P соответственно – различаются, то угол YOQ должен быть меньше угла YOP, т.е. должно быть Q < P. Если же концы линий совпадают в точке E (рис. 1), то рассмотрим дуги окружностей, имеющих центр в O, заданные уравнением r = const < 1. Осуществим каноническую деформацию области D так, чтобы указанные дуги в результате деформации перешли каждая на себя. Пусть каждая точка области, при этом, взаимно однозначно переходит в другую точку области, а q и p пусть переходят в линии, концы которых уже различаются на C, т. е. после деформирования оказывается Q < P (Q и P – концы деформированных линий). Точка E, при этом, вытянется в дугу окружности; концами этой дуги будут точки Q и P. q и p перейдут в линии того же класса **H**, так что q будет заканчиваться левее деформированной p. Этот факт можно записать кратко: деф q << деф p (записи деф q и деф p означают, что q и p рассматриваются в деформированном виде).

Рассмотрим три линии: q, b и p, для которых известно, что q << b << p. Пусть концы всех трёх линий, обозначенные соответственно Q, B и P, совпадают. Тогда, всегда можно развести эти концы, применяя последовательно две деформации подобные вышеописанным, так что после деформации окажется, что Q < B < P.

Возьмем, дальше, счётное количество линий q_λ и p_μ, где каждый из индексов λ и μ пробегает все натуральные числа, а Q_λ и P_μ являются концами этих линий соответственно, совпадающими в одной точке E на дуге C. Пусть, при этом, $q_\lambda << q_{\lambda+1} << p_{\mu+1} << p_\mu$. Тогда, осуществима каноническая деформация области D на себя, переводящая разные точки переходят в разные вдоль окружностей r = const < 1, в результате которой, при любых натуральных λ и μ, концы линий будут разведены между собой, так что окажется:

$$Q_\lambda < Q_{\lambda+1} < P_{\mu+1} < P_\mu,$$

$$\text{деф } q_\lambda << \text{деф } q_{\lambda+1} << \text{деф } p_{\mu+1} << \text{деф } p_\mu.$$

В самом деле, для осуществления деформации, разводящей концы счётного количества линий, воспользуемся сходящейся натуральной последовательностью канонических деформаций, осуществляющих разведение концов только двух линий.

При последнем деформированном состоянии области D, пусть B – точка дуги C, которая лежит между точечными множествами $\{Q_\lambda\}$ и $\{P_\mu\}$, т.е. $Q_\lambda < B < P_\mu$ при любых λ и μ. Тогда, можно провести линию $b \in$ **H**, конец которой будет совпадать с точкой B (рис. 1). Это будет означать, что при любых λ и μ деф $q_\lambda << b << $ деф p_μ.

Докажем, что линия b существует и тогда, когда одно, или оба множества $\{q_\lambda\}$ и $\{p_\mu\}$ конечны, или когда одно из этих множеств пусто.

Если оба множества конечны, то линия b находится тривиально. Рассмотрим случай, когда множество $\{p_\mu\}$ конечно, множество $\{q_\lambda\}$ счётно (рис. 2).

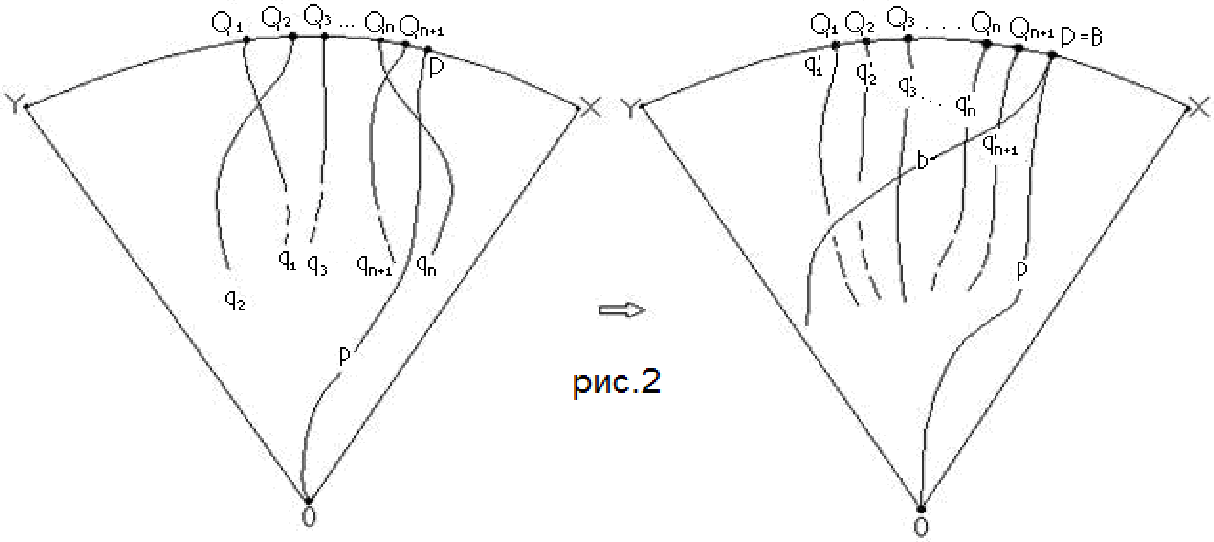


рис.2

Тогда, найдётся линия $p \in \{p_\mu\}$ такая, что для любой линии d из множества $\{p_\mu\}$, отличной от p, и для любой линии множества $\{q_\lambda\}$ оказывается $q_\lambda << p << d$. Заменим каждую линию q_λ на эквивалентную ей линию q_λ' так, что каждая точка линии q_λ' пусть располагается правее линии $q_{\lambda-1}'$ (если $\lambda > 1$) и левее линии p. Затем, проводим искомую линию b так, чтобы она пересекла каждую из линий q_λ' и каждую дугу r = const в одной точке, и каждая точка из b расположилась бы левее линии p. Очевидно, что оказывается $q_\lambda' << b << p$, и, следовательно, $q_\lambda << b << p$. Аналогично строим b в случае, когда конечно множество $\{q_\lambda\}$, а $\{p_\mu\}$ - счётно.

Если же множество $\{q_\lambda\}$ не пусто, а множество $\{p_\mu\}$ - пусто, то в качестве одноэлементного множества, заменяющего множество $\{p_\mu\}$, берём множество, состоящее из отрезка OX. Хотя OX не входит в класс линий $\mathbf{H}$, мы можем оперировать с ним так же, как с единственной линией множества, в одном из рассмотренных случаев. Отрезок OX, тогда же, может считаться правым бесконечно удалённым элементом. Аналогично мы оперируем с отрезком OY, который может считаться левым бесконечно удалённым элементом. Таким образом, если рассмотреть только одно не более чем счётное множество, то оно всегда может быть ограничено как сверху, так и снизу некоторыми линиями, входящими в множество $\mathbf{H}$ и построенными аналогично линии b. Отсюда же, можно построить трансфинитные последовательности, «сходящиеся к бесконечно удалённым элементам». Последнюю «сходимость» возрастающей (убывающей) трансфинитной последовательности $\{q_\lambda\}$ следует понимать в том смысле, что среди построенных линий не существует p такой, что $\forall\lambda\ q_\lambda << p$ ($\forall\lambda\ q_\lambda >> p$).

Из вышеизложенного заключаем:

I. Любое не пустое и не более чем счётное множество M сравнимых между собой линий, взятых из множества $\mathbf{H}$, ограничено в порядке на линиях, т.е. существуют линии q и $p \in \mathbf{H}$ такие, что для любой $m \in M$ оказывается $q << m << p$. Бесконечно удалённые элементы могут считаться пределами несчётных последовательностей.

II. Пусть L и M - не пустые и не более чем счётные множества, составленные из сравнимых между собой линий множества $\mathbf{H}$ так, что окончание любой линии множества L расположено левее окончания любой линии из M. Тогда, найдётся линия $h \in \mathbf{H}$, которая расположена строго между множествами L и M, т.е. любой элемент из L будет $<< h$, а любой элемент из M $>> h$.

Сравнивая последние два свойства линий со свойствами точек базы I и II из §1, видим полное совпадение. Отсюда, пользуясь выделенным утверждением §1, когда $\mathbf{S} = \mathbf{H}$, устанавливаем взаимно однозначное соответствие между всеми точками базы и некоторым несчётным подмножеством сравнимых между собой линий множества $\mathbf{H}$. Это соответствие обозначим F. Те элементы из $\mathbf{H}$, за которыми закреплены точки множества $\mathbf{B}$ в указанном соответствии, образуют множество, которое обозначается далее как $\mathbf{G}$. Таким образом, верна

Теорема I. Существуют множество $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ и взаимно однозначное соответствие F между всеми элементами множества $\mathbf{G}$ и всеми точками множества $\mathbf{B}$, так что $q << p \Leftrightarrow F(q) = S < T = F(p)$, где q и p – произвольные элементы множества $\mathbf{G}$, а S и T – точки из $\mathbf{B}$.

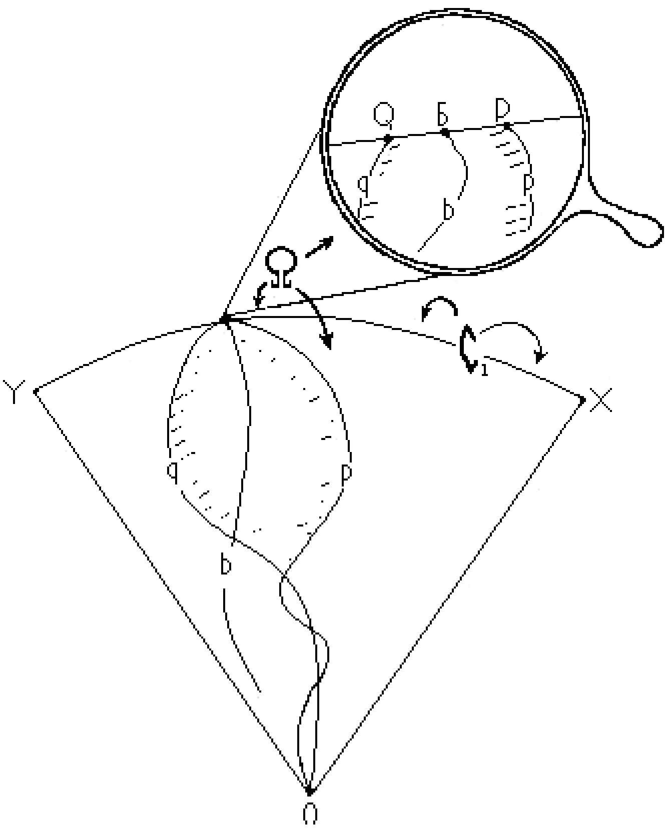
Теорема II. Мощность множества $\mathbf{H}$ равна $2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Любая непрерывная линия однозначно (именно в том, что это та линия, а не иная) задаётся отображением множества рациональных чисел в евклидову плоскость. Мощность плоскости равна мощности действительной прямой. Совокупность отображений счётного множества в множество мощности континуум, как известно, само имеет мощность континуума. Отсюда заключаем, что линий не больше чем $2^{\aleph_0}$. Но их и не меньше, чем $2^{\aleph_0}$, так как именно такое количество, по меньшей мере, заключается в множестве прямых отрезков, соединяющих точку O с точками C.

3.3. Сформулируем аксиому, которую далее естественно выдвинуть:

Аксиома I. Существует трансформация Ω, проводимая вдоль дуг r = const < 1 над областью D, в результате которой, концы каждых двух линий q и p, взятых в множестве **G**, разводятся на дуге C. При этом, если q << p, то после трансформации оказывается Ωq << Ωp и Q < P, где Q и P – концы линий, расположенные на дуге ΩC, полученной в результате трансформации. Область ΩD остаётся гомеоморфной открытой евклидовой области.

Здесь считаем, что Q < P не потому, что угол YOQ меньше угла YOP – такие углы вообще невозможно определить – а потому, что в результате трансформации Ω дуга C входит в такое состояние ΩC, что совпадающие поначалу концы расположенных в D линий разводятся на бесконечно малое расстояние, измеряемое вдоль дуги. Порядок на линиях подразумевается сохранившимся после трансформации, поскольку, левое множество произвольной линии переходит в левое множество, а правое – в правое.



Аксиома I
рис. 3

В самом деле, пусть $q \ll p$. $F(q) = S < T = F(p)$ – точки гиперпрямой. Так как $Q < P$, то получаем взаимно однозначное соответствие между всеми точками базы и теми точками дуги ΩC, которые суть концы стандартных непрерывных линий множества **G** . Фактически, можно считать, что $S = Q$ и $T = P$, и что соответствие F состоит в том, что каждая линия q указывает на дуге C точку F(q) в качестве конца этой линии. Достаточно же близкие точки базы могут считаться расположенными на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Таким образом, можно считать, что гиперпрямая, в изогнутом и сжатом виде, расположилась на C.

Область D от проведения Ω входит в состояние, которое обозначается как ΩD, и это состояние, по-видимому, нельзя назвать обычным, о чём утверждает следующая теорема.

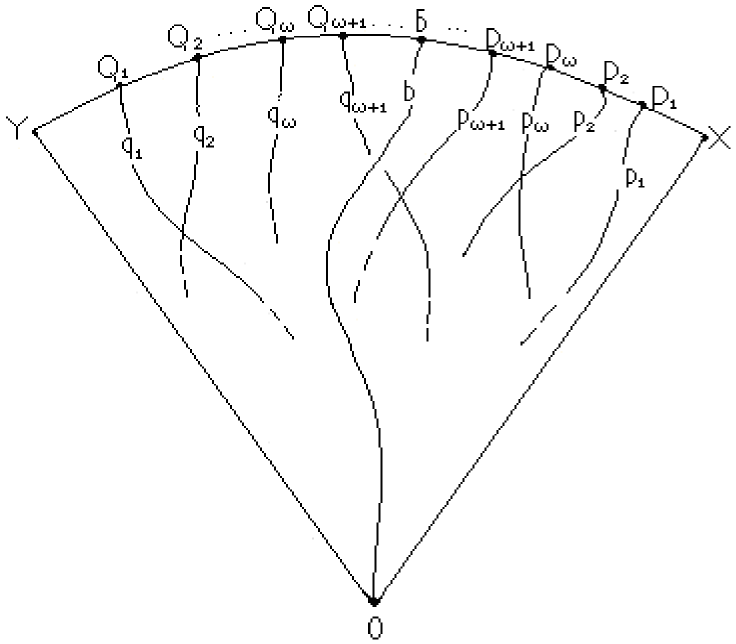
Теорема III. ΩD не может быть получена в результате отображения D на евклидову плоскость и, вообще, ни на какую плоскость со стандартной метрикой.

Доказательство. В состоянии ΩD на дуге C можно расположить несчётное количество непересекающихся отрезков. Ни на какой евклидовой линии, не пересекающей себя, этого сделать нельзя. Любую евклидову область можно отобразить на область со стандартной метрикой, и если бы ΩD отображалась на такую область, то ΩD отображалась бы на евклидову плоскость, но последнее невозможно.

Вместе с тем, состояние ΩD интерпретируется в канонической теории множеств, в рамках обычного математического анализа тем, что в области D определимы окрестности точек дуги C так, как будто эта дуга была бы границей области ΩD. В самом деле, пусть Б – формальная точка на дуге C, т.е. пусть мы считаем эту точкой расположенной на границе области ΩD, так как Б является концом некоторой линии. Если q и p – произвольные линии множества **G** такие, что концами их на ΩC являются формальные точки Q и P, и $q \ll p$, и на границе ΩD должно быть $Q < Б < P$, то область, лежащая в D, каждая точка которой расположена правее q и левее p, считается формальной окрестностью точки Б. Все требования к окрестностям при этом соблюдаются.

Ω получена в результате интуиционистски непрерывного акта, однако, как видим, не может быть сведена к перемещению точек с места на место. Ω осуществлена в пустоте через непрерывное изменение отношений между геометрическими объектами области, а не на подложке стандартного континуума. Кроме того, можно считать, что «Ω переводит объём области D на себя», так как ΩD рассматривается в том же интуиционистском двумерном объёме, в котором была расположена область D в недеформированном состоянии. Точно также, можно сказать, что «Ω переводит разные точки области D в разные точки», в то время как, никакого взаимно однозначного отображения не произведено.

Аксиома II. Когда область D приведена в состояние ΩD, для любой точки Б, расположенной на дуге ΩC, как на изогнутой гиперпрямой, можно найти линию множества H , имеющую своим концом эту точку Б (рис.4).



Аксиома II
рис.4

Пусть А и Б – точки на дуге ΩС, рассматриваемой в качестве границы ΩD, т.е. в качестве изогнутой гиперпрямой, после применения аксиомы I. Пусть α и β – линии множества **H** , концами которых являются точки А и Б соответственно, и А < Б – по аксиоме II. Множество **B** всюду плотно на гиперпрямой. Поэтому, всегда существуют две точки Q и P $\in$ **B** такие, что А < Q < P < Б, и соответственно существуют две евклидовые линии q и p, взятые из множества **G** так, что $\alpha \ll q \ll p \ll \beta$. Так как q и p различаются как классические точечные множества, то α и β различаются как классические точечные множества евклидовой области D.

Так как точек на гиперпрямой всего $2^{\aleph_1}$, а этим точкам по аксиоме II, как концам расположенных в области D линий, однозначно соответствуют линии множества **H** , и различным точкам соответствуют различные линии, то линий множества **H** всего $2^{\aleph_1}$. Но, с другой стороны, по теореме III, **H** содержит $2^{\aleph_0}$ линий. Отсюда вытекает

Теорема IV. $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

Утверждаемое в теореме IV рассматривалось Лузиным в качестве гипотезы. Так как $2^{\aleph_1} > \aleph_1$, то равенство $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (континуум-гипотеза) не может быть совместно с рассмотренными аксиомами.

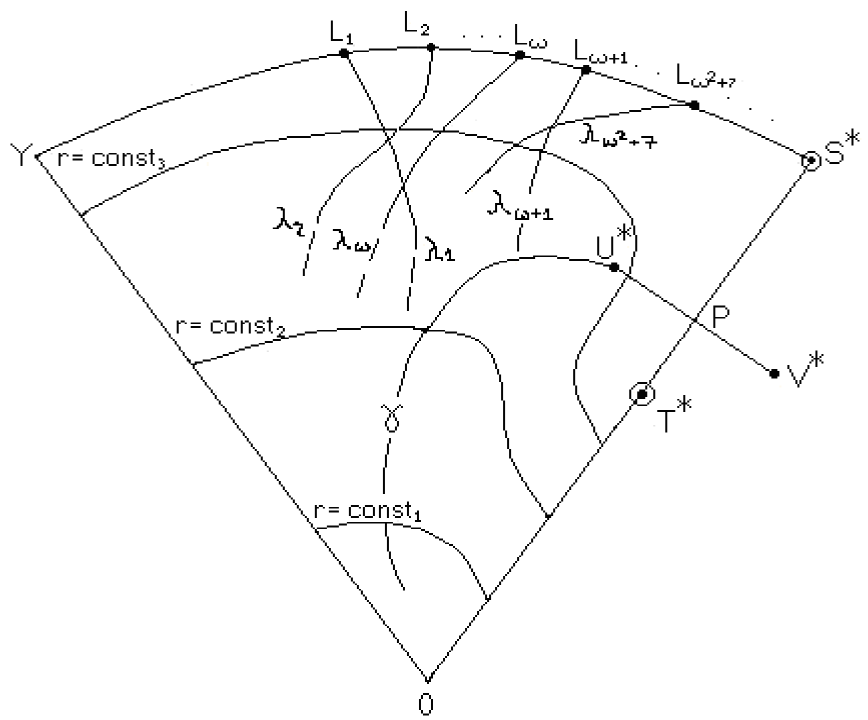
Можно сформулировать трансфинитную схему утверждений, в которой каждое утверждение будет аналогично аксиоме I или II, так что, по этой схеме, С будет последовательно превращаться в гиперконтинуум мощности $2^{\aleph_2}$, $2^{\aleph_3}$ и т.д. Развивая эту схему в очень сильную аксиому, можно доказать, что верна

Теорема V. Мощность действительной прямой превышает мощность любого вполне упорядоченного множества.

Теорема V, по крайней мере, явным образом, не следует из аксиом I и II, без отмеченной схемы утверждений. Однако, эту же теорему, можно вывести ещё через одну аксиому, рассматриваемую далее.

§4. Формулировка аксиомы III

4.1. Рассмотрим, вновь, сектор D и множество линий $\{\lambda_\nu\}$, индексированных ординалами так, что $\mu < \nu \Rightarrow \lambda_\mu << \lambda_\nu$. Будем считать, что концы линий различаются на C так, что $\mu < \nu \Rightarrow L_\mu < L_\nu$, и к точке X вдоль C стремится трансфинитная последовательность. Тем самым, мы указываем начальное – по отношению к некоторым нашим дальнейшим трансформациям – состояние сектора D. Пусть k – луч с началом в O такой, что на этом луче расположен отрезок OX. Из указанного состояния, проведём трансформацию Ω^* сектора D, зависящую от множества $\{\lambda_\nu\}$ таким образом, что точка X вытянется вдоль k в отрезок S*T*, расположенный на границе сектора Ω^*D, точка S* будет лежать на C, а точка T* расположится между O и S*, т.е. вся внутренность рассматриваемого до деформации Ω^* отрезка OX перейдёт во внутренность отрезка OT* (рис.5).



Аксиома III
рис. 5

При этом, на плоскости будет происходить следующее: а) каждая дуга r = const перейдёт в линию, один конец которой лежит внутри отрезка OY, а второй внутри отрезка OT*; б) концы линий, в которые перешли дуги r = const, непрерывно заполнят как отрезок OY, так и отрезок OT*; в) каждая линия множества $\{\lambda_\nu\}$ сохранит свой конец на C.

Трансформацию осуществим как переводящую разные точки в разные и непрерывную в области $(cl(D))\rceil\{X\}$, в том смысле, что если концы расположенных во внутренности сектора линий различались до трансформации в $(cl(D))\rceil\{X\}$ (при том, что на C до трансформации расположено вполне упорядоченное, несчётное множество отрезков $L_\nu L_{\nu+1}$), то они же будут различаться и после неё, располагаясь в $(cl(D))\rceil S^*T^*$, а если такие концы совпадали до трансформации в $(cl(D))\rceil\{X\}$, то они будут совпадать после трансформации в $(cl(D))\rceil$ S^*T^*.

Отрезок S^*T^* – в чистом виде интуиционистский. Относительно этого отрезка нам не известно, имеют ли его точки плоские отделимые окрестности. Мы постулируем, что такие окрестности имеются, в следующей форме:

Аксиома III. Какова бы ни была длина последовательности $\{\lambda_\nu\}$, существуют соответствующая последовательности трансформация Ω^* и отрезок U^*V^*, взятый от некоторой линии плоскости так, что $U^* \in int(\Omega^*D)$, $V^* \in \rceil cl(\Omega^*D)$, и U^*V^* пересекает отрезок S^*T^* в одной из внутренних точек S^*T^*. Точка P, лежащая на пересечении отрезков S^*T^* и U^*V^*, единственна.

Рассмотрим линию γ, проходящую строго внутри Ω^*D из точки O в точку P, так, что U^*P содержится в рассматриваемой линии. Можно считать, что линия γ построена так, что для любой линии λ_ν оказывается $\gamma >> \lambda_\nu$ (Во всяком случае, исходя из линии γ, всегда можно построить линию γ^* такую, что $\forall\nu$ верно $\gamma^* >> \lambda_\nu$). Отсюда, с помощью линий, аналогичных γ, имеющих конец на интуиционистском отрезке после соответствующей трансформации, можно пополнять множество $\{\lambda_\nu\}$ без ограничений его мощности. Таким образом, из аксиомы III следует теорема V.

Аксиоме III эквивалентна гипотеза о том, что, в качестве канонической деформации-отображения на евклидову плоскость, представима метаморфоза, полученная из Ω^* тем, что отрезок L_1S^* сжимается в точку S^* вдоль C. В самом деле, из такой гипотезы немедленно вытекает, что линия γ является стандартной евклидовой линией, которая обнаруживается тривиально. Обратно, если γ существует, то существует и некоторая линия $\gamma' >> \gamma$ (не ограничивая общности, можно считать, что отношение порядка между линиями соблюдается). Сохраняя условие $\gamma' >> \gamma$, и помещая конец линии γ в X, γ' можно заставить непрерывно пробегать некоторое, очевидно доказуемое, множество линий так, что искомая деформация-отображение окажется осуществимой именно потому, что конец линии γ' можно будет считать пробегающим отрезок S^*T^*.

4.2. Укажем на ещё один полезный эквивалент аксиомы III.

Теорема VI. Пусть S и S(n, m), при n, m $\in$ N, суть вполне упорядоченные множества такие, что $\forall n$ $S(n, m+1) \supset S(n, m)$, $S = U_m S(n, m)$, card S = card S(n, m) $\geq \aleph_0$. Тогда, существует строго возрастающая функция m* такая, что для каждой P $\in$ S, при всех достаточно больших n $\in$ N (зависящих от P), S(n, m*(n)) $\ni$ P.

Верны и более сложные формулы. В частности, в которой включение и объединение понимаются по модулю – с точностью до произвольного множества счётной мощности. Если S – множество всех конечных и счётных ординалов, то для каждого достаточно большого P $\in$ S, для всех достаточно больших n $\in$ N (зависящих от P) P $\in$ S(n, m*(n)).

Отметим общезначимость теоремы VI на классе вполне упорядоченных множеств, и то, что она не апеллирует к топологическим отношениям.

Доказательство. Для функций отображающих натуральный ряд в натуральный ряд введём отношение сравнения $-<$. Если f и g такие функции, то считаем, что $f -< g$, если для всех достаточно больших n $f(n) \leq g(n)$. Аксиома III эквивалентна утверждению, что для любого множества функций S’ мощности S существует функция h такая, что для любой функции f из S’ $f -< h$ (проверить эту очевидность предоставляется читателю). Для каждого $P \in S$, для каждого натурального числа n найдём натуральное число $m_P(n)$, что для всех $m \geq m_P(n)$ элемент P содержится в S(n, m). По аксиоме III, для множества функций m_P существует функция h такая, что $m_P -< h$ для любой m_P. Следовательно, каков бы ни был элемент P, для всех достаточно больших n $S(n, h(n)) \ni P$. Полагаем тогда $m^* = h$. Обратно, пусть m^* существует. Тогда из условия, что для всех достаточно больших n $S(n, m^*(n)) \ni P$, вытекает, что для каждой функции m_P верно неравенство $m_P -< m^*$, ч.т.д.

4.3. Теперь необходимо уделить внимание «парадоксу ординального ряда», чтобы в большей степени обосновать наш результат, поскольку, мы очевидно, сталкиваемся с подобным же парадоксом при применении рассмотренных аксиом. Будет ли существовать или нет противоречие, усматриваемое формалистами в ряде ординалов, во многом зависит от той или иной вербализации, от той или иной формальной схемы, описывающей интуитивные множества. Как минимум, можно изложить теорию множеств на таком формальном языке, что никакого противоречия найти будет нельзя. Но истинное решение парадокса, не зависящее от языковых манипуляций, с моей точки зрения, состоит в том, что никакого парадокса вовсе не существует. В ситуации с ординальным рядом, и в ситуации с континуумом, как это следует из предложенных аксиом, мы имеем дело с объективным свойством реальных множеств. Во всяком случае, с объективной ситуацией. Это свойство состоит в том, что для слишком больших множеств бессмысленно утверждать наличие «всех» или «не всех» элементов множеств. Тогда же, можно обойтись и без использования неаристотелевской логики, выразив свойство больших множеств, как свойство потенциальной бесконечности, всегда продолжаемой, но никогда не завершаемой. Актуальная бесконечность должна соответствовать завершаемым множествам. Элементы континуума, конечно, даны «все», но только в естественном порядке, не нарушаемом вполне упорядоченным перебором.

Благодарю д.ф.м.н. Н. В. Белякина, О. В. Кудинова, за полезные замечания при обсуждении работы.

Литература

1. Cohen P. J. The independence of continuum hypothesis. I, II Proc. Nat. Acad. USA, 50 (1963), p. 1143-1148, 51(1964), p. 105-110 (Русский перевод: Коэн П. Дж. Независимость континуум-гипотезы. Математика. 1965, т.9, N4, с.142-155).
2. Godel K. The consistency of the continuum Hypothesis. Princeton University Press, 1940.