

Тезис Гёделя «о неполноте формальной арифметики» не доказан, и не является даже правдоподобной гипотезой

Дм. Ватолин

§1

«Первая теорема Гёделя» утверждает, что в гёделева арифметике существует гёделева формула такая, что ни сама формула, ни её отрицание не могут быть доказаны. Из построения гёделева формулы делается вывод, что достаточно богатая теория арифметики всегда неполна или противоречива. Выводы Гёделя выдаются в качестве «глубинного результата», значимого, как утверждают, и в теории множеств. Но на самом деле, «результат Гёделя» не влечёт вечной неполноты достаточно богатой арифметики. Такой вывод приписан бездоказательно.

§2

Пусть в теории арифметики используются подстановки формул и функторов в формулы и функторы. Числовые значения функторов и истинностные значения формул, пусть зависят от таких же значений, используемых при подстановках. В частности, значения функторов могут зависеть от истинностных значений формул.

Гёдель [1] даёт способ рекурсивного перечисления через натуральные числа всех формул теории арифметики и всех доказательств арифметики – последних, как некоторых упорядоченных цепочек формул, выстраиваемых по правилам логического вывода. Таким образом, каждая формула и каждая цепочка формул имеет свой натуральный номер, называемый «гёделевым номером», и из цепочек формул выделяемы рекурсивным перечислением те цепочки, которые считаются доказательствами. Гёделевы номера формул и цепочек формул выбираются так, что они не равны нулю.

Следуя изложению [3], определим функторы τ и φ :

$\tau(\mathbf{n})$ = гёделеву номеру той формулы, доказательство которой имеет гёделев номер \mathbf{n} .

$\tau(\mathbf{n}) = 0$, если \mathbf{n} не является номером какого-либо доказательства.

$\varphi(\mathbf{m}, \mathbf{p})$ = гёделеву номеру той формулы, которая получена из формулы Ψ с одной свободной переменной и с гёделевым номером \mathbf{m} , путём подстановки значения \mathbf{p} в Ψ вместо свободной переменной.

$\varphi(\mathbf{m}, \mathbf{p}) = 0$, в противном случае.

Рассуждение Гёделя сводимо к следующему: Пусть формула: **не** $\exists n$ ($\varphi(x, x) = \tau(n)$), обозначенная как Ψ , имеет гёделев номер M . Тогда формула Гёделя Φ , полученная подстановкой номера M в формулу Ψ , такова: **не** $\exists n$ ($\varphi(M, M) = \tau(n)$). Φ имеет гёделев номер $\varphi(M, M)$, в связи с указанной подстановкой. Предположим, Φ доказуема. Тогда, существует номер n некоторого доказательства формулы Φ . По определению функции τ получаем, что $\tau(n) =$ **гёделеву номеру формулы $\Phi = \varphi(M, M)$** . Т.е. истинно, что $\varphi(M, M) = \tau(n)$, т.е. истинно отрицание формулы Φ . Т.к. из доказуемости следует истинность Φ , то предположение ведёт к противоречию. Предположим, что доказуема (следовательно, истинна) формула **не** Φ . Отрицание Φ говорит в точности о том, что существует номер n такой, что $\varphi(M, M) = \tau(n)$. Так как гёделевы номера формул не равны нулю, то n не может быть номером, не являющимся номером доказательства. Т.е. n – номер доказательства. Тогда, т.к. $\varphi(M, M) = \tau(n)$, это доказательство формулы с гёделевым номером $\varphi(M, M)$. Т.е. Φ доказуема. Значит, Φ истинна одновременно с истинностью **не** Φ . Приводим к противоречию предположение о доказуемости формулы **не** Φ .

§3

В гёделевой арифметике можно говорить о доказательствах как о предметах и о взаимоотношениях между числами и доказательствами. Собственно, формула $\exists n$ ($m = \tau(n)$) считается содержательно говорящей о том, что **формула, имеющая гёделев номер m , доказуема**. Следовательно, по поводу этих взаимоотношений можно рассуждать внутри гёделевой арифметики, для чего и создан её язык. В частности поэтому (как можно хотя бы ожидать по логике вещей), изложенное выше рассуждение должно быть рассуждением гёделевой арифметики.

Если же вывод о недоказуемости гёделевой формулы можно сделать внутри гёделевой арифметики, то совместное определение такой формулы и функтора, перечисляющего доказательства, оказывается противоречивым. Действительно, пусть предположение о доказуемости формулы Φ уже приведено к противоречию безусловно, т.е. из аксиом гёделевой арифметики (например, так, как это сделано выше). Выводим отсюда безусловно, т.е. как формулу гёделевой арифметики, что **Φ недоказуема**. Тогда, каков бы ни был натуральный номер n , он не номер доказательства для формулы Φ . Тогда, по определению τ , для каждого n верно, что $\varphi(M, M) \neq \tau(n)$. Т.е. верна формула **не** $\exists n$ ($\varphi(M, M) = \tau(n)$), т.е. верна Φ . Это есть вывод формулы Φ из аксиом гёделевой теории арифметики. Вывод имеет конкретный гёделев номер. Выводим отсюда, что **Φ доказуема**.

Чтобы избежать явного противоречия, формалисты утверждают, что вывод о недоказуемости Φ проводится в метатеории и не может быть проведён в самой теории. Но в таком виде вывод возможен лишь в условиях, когда в теории запрещено в полной мере рассуждать о доказательствах как о предметах, которые описывает язык теории, и для которых он был создан. Кроме того, тогда же вводится существенное и совершенно неоправданное ограничение на дедукцию: в гёделевой дедукции доказуемость не влечёт истинности. Формалистские доводы уже только поэтому ложны.

Можно встретить и ещё одно возражение, что существует техническая трактовка гёделевой арифметики, в которой только и следует понимать все её построения, а содержательная интерпретация гёделевой арифметики лишь вспомогательный ход, помогающий понять как «жёстко» устанавливается невыводимость гёделевой формулы. Отвечая на эту новую уловку, можно утверждать, что ни Гёделем, ни его последователями, не установлено, что в возможной технической трактовке гёделева теория совпадает с тем, что следует называть «арифметикой», что в предполагаемом толковании можно употребить все до сих пор известные логические и математические ходы, которые как минимум требуется употребить для построения нормальной арифметики. В §§4-9 ситуация рассматривается в подробностях.

§4

Сначала, применим гёделевы определения к «настоящей доказуемости» – к способу фактического узнавания положения вещей. Посмотрим, к чему приведёт наша прямая позиция.

Формула и функтор Гёделя задаются непредикативным определением, соотношением, которое после того, как оно определено, ещё необходимо доказать. Непредикативное определение подобно уравнению, в котором неизвестное стоит в обеих частях равенства. Уравнение может считаться определением неизвестной, но необходимо ещё доказать, что уравнение имеет решение. В «логических уравнениях» место «равенства» занимает «равносильность». «Неизвестным» гёделевых определений выступает пара из функтора и формулы. По-видимому, непредикативные определения могут быть полезны и непротиворечивы, но их необходимо проверять:

Значение τ зависит не только от натурального аргумента, но и от того, доказуема или недоказуема формула Φ . Т.е. τ зависит от Φ . Чтобы определить Φ необходимо полностью определить τ , но, чтобы определить τ необходимо определить Φ . Если мы хотим определить формулу Гёделя так, чтобы она была недоказуема, то мы должны для всех значений N определить $\tau(N) \neq \varphi(M, M)$. Тем самым, мы тривиально устанавливаем, доказываем саму Φ . Если мы хотим доказуемости Φ , то для конкретных N должны приписать $\tau(N) = \varphi(M, M)$, и снова приходим к противоречию. Но мы должны приписать или $\tau(N) \neq \varphi(M, M)$ или $\tau(N) = \varphi(M, M)$, что-то конкретное, иначе определение не будет определением. Отсюда находим только то, что данное определение невыполнимо (не имеет решения).

Можно интерпретировать «парадокс лжеца», на содержании которого основана идея «теоремы Гёделя», как непредикативное определение «утверждаемого лжецом». Утверждение «я лгу» можно интерпретировать фразой: «утверждаемое мною равносильно отрицаемому мною». Причём, не известно, что же в конце концов утверждает говорящий. Это утверждаемое есть X , определяемое непредикативно в форме: $X \Leftrightarrow \text{не } X$. Если эквивалентность $X \Leftrightarrow \text{не } X$ принять истинной лишь на том основании, что даётся определение X , то можно вывести, что истинной является как X , так и $\text{не } X$. По существу же, лжец лжёт.

Иногда гёделеву формулу определяют непредикативно как формулу эквивалентную утверждению о собственной недоказуемости: Φ участвует в соотношении $\Phi \Leftrightarrow \text{не доказуема } \Phi$. В итоге, если гёделева формула только неконструктивно определена через такое соотношение, то просто выводим (§§ 5-9), что такой формулы в арифметике не существует. Если пытаться конструктивно определить Φ средствами арифметики, надеясь выполнить соотношение, то придём к противоречию в процессе определения. Иными словами, из определений Гёделя можно вывести только то, что для полной непротиворечивой теории гёделевым способом невозможно непротиворечиво определить функтор τ , формулу Φ и «предикат доказуемости» – в теории не существует алгоритма, задающего подобные объекты.

Формула Φ простейшим образом разрешима без противоречия внутри самой арифметики, если сделать простейшее переопределение. Для этого, определим функтор τ , перечисляющим доказательства по-другому, положив $\tau(N) = 0$, не смотря на то, что N есть номер доказательства для формулы Φ . Вывод, связанный с указанным переопределением, проводимый внутри арифметики, содержит ссылки на доказательства, на номера доказательств и т.п. ничем не худшие, чем ссылки, использованные в рассуждении, приводящем Φ к противоречию. И «внезапный прыжок в метатеорию» для таких рассуждений ничем не обоснован.

Уточним «исходные данные». T – теория, в которой даются все нижеследующие определения (метатеория). S – теория, интерпретируемая средствами теории T . Это означает, что в T : определяются отношения и функторы для теории S ; доказываются теоремы, которые суть – аксиомы теории S .

В результате, средствами T даётся определение, что означает «формула $\in S$ ». Теория здесь отождествляется с множеством формул, функторов и т.п., которые в ней могут быть сформулированы или заданы, и тем самым, содержатся. Если ψ – формула, то $\psi \in S \Rightarrow \psi \in T$, обратная импликация, вообще говоря, неверна. Если M – теория, ψ – формула, то считаем, что выражение « ψ есть M -формула» означает то же, что и « $\psi \in M$ ».

В качестве S формулируем арифметику, называемую здесь GA – «арифметикой Гёделя». В теории S так или иначе можно говорить: о доказуемости S -формул, о гёделевых номерах S -формул, о гёделевых номерах цепочек S -формул, о гёделевых номерах доказательств. Для этого, средствами T определён оператор Pf так, что если ψ есть S -формула, то $Pf(\psi)$ – так же S -формула, означающая, что « ψ доказуема средствами S ». При этом, «гед.ном.(ψ)» означает гёделев номер формулы ψ . Если W – цепочка S -формул, то «гед.ном.(W)» означает гёделев номер цепочки W . Функтор, ставящий в соответствие каждой S -формуле её гёделев номер, принадлежит S . Аналогично, принадлежат S функторы, перечисляющие цепочки формул, выводы и доказательства.

В качестве T выберем теорию классической арифметики CA . В CA классическим способом определяются формулы и функторы, которые можно подставлять друг в друга. Считаем, что в CA невозможно говорить о доказуемости CA -формул, хотя это требование не обязательно выполнять, при соответствующих аксиомах.

Арифметику Пеано обозначим PA . Эту теорию можно выбрать в качестве теории T , или можно отождествить с GA . В последнем случае, обозначение PA не справедливо, так как Пеано рассматривал свою арифметику совершенно в другом контексте. Естественнее считать $PA = CA$.

В любом из указанных случаев, теорию S формулируем как теорию, в которой по некой «технической интерпретации» речь идёт только о числах. Т.е. с формальной точки зрения, «с точки зрения теории T », «с точки зрения формального понимания теории S » разговор идёт только о числах. Но «с точки зрения содержательного понимания теории S », мы, например, можем рассматривать функторы не только от чисел, но и от формул.

S-вывод формулы ψ – это цепочка S-формул, являющаяся выводом в теории T формулы ψ из посылок, которые суть S-формулы, проводимый без расшифровки атомарных S-формул. Атомарные формулы теории S, это такие её формулы, которые не могут быть разбиты на подформулы средствами теории S. S-теорема – это такая формула, которая стоит в конце хотя бы одного S-вывода из аксиом теории S (S-аксиом). S-доказательство или безусловный S-вывод – это такой S-вывод, посылки которого суть S-аксиомы. Если S-вывод не является безусловным, то он является условным S-выводом.

Аналогично определяется T-вывод, T-доказательство и т.п. Каждый S-вывод является одновременно T-выводом. Обратное не верно. Каждая S-теорема есть T-теорема, но не наоборот.

В теории S вводится логическое **правило вывода**: если вывод формулы ψ есть S-доказательство, то мы можем отсюда заключить, что верна формула $Pf(\psi)$.

Средствами T в теории S определяется множество формул «верных в S». Каждая числовая формула из T считается либо «верной в T», либо «неверной в T», т.е. попросту верной ли или неверной, вне зависимости от её доказуемости в T. Подразумевается, что возможно верифицировать каждую формулу. Это интуитивное требование (аксиома) классической логики. Формула теории S считается «верной в S», если эта формула верна в T, т.е., если попросту она верна. В частности, каждая S-теорема считается «верной в S». Однако, в смысле данных определений, если формула верна в S, то это не означает, что она S-теорема, т.е., что она безусловно выводима из аксиом теории S.

Замечание. Если ψ есть S-формула, полученная в результате вывода, среди посылок которого содержится формула $\notin S$, то мы не можем отсюда заключить средствами теории S, что $Pf(\psi)$ верна, даже если в T формула доказуема. Таким образом, мы не сможем средствами S установить $Pf(\psi)$ как теорему теории S. Мало того, если ψ получена в результате S-вывода, но хотя бы одна из посылок не является теоремой теории S (такая посылка может быть недоказуемой, но верной в S формулой), то мы не можем применить к формуле ψ определённое выше правило вывода и заключить средствами теории S, что $Pf(\psi)$ верна, т.е. не можем установить $Pf(\psi)$ как теорему из S.

Для вывода противоречия в S нам потребуются два утверждения:

1. Какова бы ни была S -формула ψ , средствами теории S из доказуемости ψ можно извлечь, что ψ верна. Т.е., в S верна аксиома: $\text{Pf}(\psi) \Rightarrow \psi$ (схема аксиом). Эту аксиому можно заменить некоторым эквивалентным правилом вывода.
2. Существует формула φ из S такая, что средствами теории S доказуемо, что $\varphi \Leftrightarrow \neg\text{Pf}(\varphi)$.

Утверждение 2 доказывают, предполагая, что завершено определение предиката Pf . В теории S определён предикат $\text{Pr}(z)$ означающий: «доказуема формула с гёделевым номером z ». Тогда, если χ – S -формула, то $\text{Pf}(\chi)$ вводится как S -формула $\text{Pr}(\text{гёд.ном.}(\chi))$. Пусть $\text{sb}(n, m)$ – гёделев номер формулы, полученной подстановкой номера m вместо свободной переменной в такую формулу с одной свободной переменной, гёделев номер которой есть n . Функтор sb всегда определим в S , посредством аксиом S . Пусть μ – S -формула, z – единственная свободная переменная этой формулы. Рассмотрим формулу $\mu(\text{sb}(x, x))$, x – свободная переменная. Пусть, $\text{гёд.ном.}(\mu(\text{sb}(x, x))) = L$. Определим в качестве ψ формулу $\mu(\text{sb}(L, L))$. По определению sb : $\text{гёд.ном.}(\psi) = \text{гёд.ном.}(\mu(\text{sb}(L, L))) = \text{sb}(L, L)$. Следовательно, $\psi \Leftrightarrow \mu(\text{sb}(L, L)) \Leftrightarrow \mu(\text{гёд.ном.}(\psi))$. В качестве φ возьмём формулу ψ , для которой μ есть $\neg\text{Pr}$, ч.т.д. Проведённый вывод есть S -доказательство.

Выведем противоречие, предполагая, что аксиома, упомянутая в утверждении 1, есть S -теорема. Действительно, рассуждая в S , предположим, что φ доказуема средствами S , т.е. в S предположим, что верно $\text{Pf}(\varphi)$. По указанной аксиоме получаем, что в S верна φ . Тогда, из утверждения 2, (таким образом, средствами S) извлекаем, что верно $\neg\text{Pf}(\varphi)$. Это противоречие. Следовательно, предположение о доказуемости φ неверно. Следовательно, (это вывод из аксиом S) верно $\neg\text{Pf}(\varphi)$. Но тогда, по утверждению, указанному в 2, верна φ . Это S -доказательство формулы φ . Применяя правило вывода §6, получаем верность $\text{Pf}(\varphi)$. Снова противоречие.

Если аксиома, указанная в 1, не является теоремой S , то она должна быть хотя бы теоремой теории T , причём эта теорема одновременно есть S -формула. Тогда, в T можно дать приведённый выше вывод и придти к утверждению «о безусловной недоказуемости формулы φ средствами S » – в качестве теоремы теории T и S -формулы, но не как S -теоремы. Из недоказуемости φ в S можно извлечь истинность φ (в силу 2), и установить истинность φ S -выводом. В силу замечания §6, тогда нельзя переходить к утверждению о верности $\text{Pf}(\varphi)$. Таким способом в T обычно устанавливаются истинность φ , не приходя к видимому противоречию.

Из такого рода «недоказуемости» формул φ и $\neg\varphi$ в S делают вывод (если T непротиворечива), что теория S непротиворечива (иначе все формулы выводимы) и неполна (обе формулы φ и $\neg\varphi$ не выводимы в S). Мало того, делают вывод, что «достаточно богатая непротиворечивая теория» должна содержать S , а потому, такая теория должна быть неполна. Поэтому выводят, что «все достаточно богатые теории или неполны, или непротиворечивы».

§8

Однако, если мы не признаём утверждение $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ в качестве аксиомы (схемы аксиом) теории S , или не допускаем «рассуждения от противного», то не можем говорить о том, что доказали средствами T классическую невыводимость φ . В самом деле, доказана невыводимость формулы φ в теории S , которая почему-то отождествляется с «арифметикой», но в которой, например, запрещено извлекать из доказуемости формул их истинность. Отрицая аксиому $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$, мы рассматриваем усечённую, неклассическую «доказуемость», которая не используется ни в какой из классических теорий арифметики. Относительно такой «доказуемости» и устанавливаем «недоказуемость формулы φ ».

Между тем, формула $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ доказуема в S для каждой доказуемой формулы ψ , поскольку, прежде чем установить формулу $Pf(\psi)$ как теорему S , мы должны выписать цепочку формул, являющуюся доказательством: $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$, в которой последняя формула совпадает с формулой ψ и является истинной. В S возможны ссылки на такие цепочки, хотя бы потому, что по наличию цепочки в S определяется истинность $Pf(\psi)$. Таким способом, извлекая истинность $Pf(\psi)$ в S , мы с неизбежностью извлекаем истинность ψ в S . В итоге, формула «для доказуемых формул $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ » верна в S и является теоремой теории S . Если же ψ не является доказуемой формулой, то формула $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ истинна очевидно. Отсюда, в S выводимо, что «для всех ψ верно $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ ». Таким образом, если и можно придумать причины, по которым формула $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ не выводима в гёделевой арифметике, то они будут весьма нелепыми.

Формула $\varphi \Leftrightarrow \neg Pf(\varphi)$ не может быть недоказуемой в S , так как для её вывода использовались подстановки в тавтологию.

Ответим на возражение, что «не следует понимать гёделевы формулы в их содержательной интерпретации, такая интерпретация всего лишь приём для выводов». Иными словами, рассмотрим ситуацию, когда нас обязывают толковать «гёделевы высказывания» только как высказывания о числах, «технически». Покажем, что в «технической интерпретации» весьма условно понимаются «арифметические доказательные средства», хотя, всего лишь, заведомо исключены некоторые способы рассуждений, которые мы легко и без противоречия применили бы в S как известные арифметические средства, если бы нам не сказали, что речь идёт о «теореме Гёделя». Рассмотрим ситуацию подробнее.

Пусть E – теория арифметики. Мы можем рассмотреть случаи, когда $E \supset S$, и когда $E \subset S$. Первый случай означает, что некоторые формулы или аксиомы теории E не являются формулами или аксиомами теории S . Мы уже имеем $T \supset S$. В T формула φ доказуема тривиально. Поэтому, известно, что в принципе может возникнуть ситуация, когда в теории E , включающей теорию S , во всяком случае, некоторые, формулы теории S легко доказуемы. Нельзя исключать, что в теории E доказуемы все формулы теории S и, в том числе, формула φ . Причём, φ доказуема тривиально в самом прямом содержательном классическом смысле, т.е. получено точное знание, что формула φ истинна средствами E , через приёмы, заведомо использующиеся в обычной логике и арифметике (для доказательства можно даже положить $E = T$). Нельзя ссылаться на «теорему Гёделя» для опровержения такой возможности, так как утверждение Гёделя ещё требуется доказать для E . Тогда, «гёделева доказуемость» означает лишь весьма специфическую доказуемость формул в субтеории S , доказуемость средствами S , а не более полными средствами E . Средства S оказываются заведомо недостаточными по отношению к обычным средствам математики. Поэтому, невозможность доказать в S формулу из S не означает нормальной неполноты арифметики E – неполноты относительно заведомо использующихся в E операций.

Если сознательно не употреблять известное и простое доказательное средство арифметики для разрешения гёделевой формулы в технической интерпретации, то употребляется ли тогда собственно арифметика, да и собственно логика? Ведь в других подобных случаях, мы запросто бы обошли подобную трудность и легко бы доказали подобную формулу, считая применённым арифметическое средство. В частности, при «техническом толковании» S , интерпретируя в E формулы теории S как выражения для чисел, запросто можно разобраться с «гёделевыми формулами» и легко разрешить свойства функторов по существу. В «естественном техническом толковании» формулы тем самым разрешаются внутри арифметики. Можно поддаться давлению формалистов, и номинально приписать гёделевой формуле недоказуемость в арифметике. Однако, как быть с другими формулами? Всякий раз, когда возникает вопрос о том, соотнести ли тот или

иной простой и разрешимый по существу факт вычислений с арифметикой, «смертному», видимо, надо спросить разрешения «как считать» у адептов гёделевой школы, которые не предъявляют внятных аргументов.

Техническую трактовку, которую можно было бы использовать при вычислениях в самой теории S , Гёдель не вводил, к ней могут обращаться лишь современные формалисты, и то, как к гипотезе, поскольку до сих пор трактовка не предъявлена. Содержательную трактовку для $E \subset S$ употребить нельзя: Гёделем не доказано существование неразрешимой классической формулы, уже только потому, что φ не входит в множество «высказываний классической арифметики», поскольку, последние не используют «предикат доказуемости» и не образуют всей S , не говоря уже о других рассмотренных аргументах. Конечно, можно требовать уточнений, что означает выражение «классическая формула». Но предположим, что дана техническая трактовка для $E \subset S$. Тогда, «арифметическая неразрешимость» φ не может быть доказана из-за того, что нельзя безусловно доказать, что E совпадает с арифметикой. Действительно, известна техническая теория T , говорящая в точности о предметах теории E , легко разрешающая формулу.

§10

В итоге, гёделевы определения нелепы. «Доказуемость по Гёделю» – «доказуемость» лишь по названию, не совпадает с настоящей классической доказуемостью. Гёделева формула – «вещь в себе», «не интересующаяся остальным миром», говорящая по сути даже не о предметах арифметики. Доводы Гёделя заведомо игнорируют реальную разрешающую способность аксиом арифметики, без всякого рассмотрения, даже не вникая в возможную сложную взаимосвязь аксиом. Аргументы Гёделя настолько противоречивы, что не могут быть исправлены каким-либо простым приёмом.

Правдоподобнее выглядит предположение обратное к «тезису Гёделя»: **существует достаточно богатая теория, обладающая достаточно богатым – для полноты – набором разрешающих средств.** Отсюда, «теорема Гёделя» не является даже правдоподобной гипотезой, не говоря уже о том, чтобы быть теоремой. Причина, по которой подобные факты обмана выдаются за «математические достижения», находится вне математики.

Собрание мнений формалистов по поводу того, что «должно быть» в отношении неполноты наших математических теорий, в лучшем случае можно назвать «гёделевой идеологией», не обоснованной вне зависимости от того, приведено ли, и может ли быть вообще приведено, доказательство противоположной гипотезы. Пользуясь тем, что не могут быть окончательно точными понятия: «задача», «алгоритм», «доказательное средство» и др., формалисты спекулируют на трудностях познания. Вопрос о полноте нашего математического знания относится к вечным вопросам. И неполнота знания, из-за несовершенства человека, всегда имеет место. Но из незавершённости знания не вытекает неполнота конкретной достаточно развитой теории, если понятия поставить на более чёткую основу. Уточнение понятий всегда может

быть подвергнуто критике, из-за того, что, скорее всего, повлечёт сужение класса задач и алгоритмов по отношению к естественным, интуитивным задачам и алгоритмам арифметики. Трудности не влекут невозможность полной теории, разрешающей настолько важный класс задач, что он вполне удовлетворит нашу потребность знать арифметику. Для примера: в теории окажутся разрешимыми все диофантовы уравнения. Следует потребовать так же, чтобы «эффективными» в теории считались только те вычисления, для которых доказуема их завершаемость.

По итогам разбирательства, можно посоветовать логикам, обратиться к изучению реального человеческого мышления и к реальной арифметике, а не к бесполезным формальным конструкциям.

Литература

1. Godel. K. Uber formal unentscheidbare Satze der Principina Mathematica und verwandter Systeme, Monatsh fur Math. U. Phys., XXXVIII (1931), 173-198.
2. Коэн. Пол.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М. 1969.
3. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М. 1977.