«Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики» не является даже правдоподобной гипотезой

Дм. Ватолин

§1

«Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики» говорит о том, что в арифметике существует гёделева формула такая, что ни сама формула, ни её отрицание не могут быть доказаны. Из построения формулы делается вывод, что достаточно богатая теория арифметики всегда неполна или противоречива. Выводы Гёделя выданы в качестве «глубинного результата», значимого, как утверждают, и в теории множеств. На самом деле, «результат Гёделя» не влечёт вечной неполноты достаточно богатой арифметики. Такой вывод приписан бездоказательно.

§2

Пусть в теории арифметики используются подстановки формул и функторов в формулы и функторы. Числовые значения функторов и истинностные значения формул, пусть зависят от таких же значений, используемых при подстановках. В частности, значения функторов могут зависеть от истинностных значений формул.

Гёдель [1] даёт способ рекурсивного перечисления через натуральные числа всех формул теории арифметики и всех доказательств арифметики – последних, как некоторых упорядоченных цепочек формул, выстраиваемых по правилам логического вывода. Таким образом, каждая формула и каждая цепочка формул имеет свой натуральный номер, называемый «гёделевым номером», и из цепочек формул выделяемы рекурсивным перечислением те цепочки, которые считаются доказательствами. Гёделевы номера формул и цепочек формул выбираются так, что они не равны нулю.

Следуя изложению [3], определим функторы τ и φ:

τ(**n**) = гёделеву номеру той формулы, доказательство которой имеет гёделев номер **n**.
τ(**n**) = 0, если **n** не является номером какого-либо доказательства.

φ(**m, p**) = гёделеву номеру той формулы, которая получена из формулы Ψ с одной свободной переменной и с гёделевым номером **m**, путём подстановки значения **p** в Ψ вместо свободной переменной.
φ(**m, p**) = 0, в противном случае.

Рассуждение Гёделя сводимо к следующему: Пусть формула: **не** $\exists$**n** **(**φ**(x, x) =** τ**(n))**, обозначенная как Ψ, имеет гёделев номер **M**. Тогда формула Гёделя **Ф**, полученная подстановкой номера **M** в формулу Ψ, такова: **не** $\exists$**n** **(**φ**(M, M) =** τ**(n))**. **Ф** имеет гёделев номер φ**(M, M)** в связи с указанной подстановкой. Предположим, **Ф** доказуема. Тогда, существует номер **n** для доказательства **Ф**. По определению функции τ получаем, что τ**(n) = гёделеву номеру Ф =** φ**(M, M)**. Т.е. истинно φ**(M, M) =** τ**(n)**, т.е. истинно отрицание формулы **Ф**. Т.к. из доказуемости следует истинность **Ф**, то предположение ведёт к противоречию. Предположим, доказуема (следовательно, истинна) формула **не Ф**. Отрицание **Ф** говорит в точности о том, что существует номер **n** такой, что φ**(M, M) =** τ**(n)**. Так как гёделевы номера формул не равны нулю, то **n** не может быть номером, не являющимся номером доказательства. Т.е. **n** – номер доказательства. Тогда, т.к. φ**(M, M) =** τ**(n)**, это доказательство формулы с гёделевым номером φ**(M, M)**. Т.е. **Ф** доказуема. Значит, формула **Ф** истинна одновременно с истинностью **не Ф**. Приводим к противоречию предположение о доказуемости формулы **не Ф**.

§3

В гёделевой арифметике можно говорить о доказательствах как о предметах и о взаимоотношениях между числами и доказательствами. Собственно, формула $\exists$**n (m =** τ**(n))** считается содержательно говорящей о том, что **формула, имеющая гёделев номер m, доказуема**. Следовательно, по поводу этих взаимоотношений можно рассуждать внутри гёделевой арифметики, для чего и создан её язык. В частности поэтому (как можно хотя бы ожидать по логике вещей), изложенное выше рассуждение должно быть рассуждением гёделевой арифметики.

Если же вывод о недоказуемости гёделевой формулы можно сделать внутри гёделевой арифметики, то совместное определение такой формулы и функтора, перечисляющего доказательства, оказывается противоречивым. Действительно, пусть предположение о доказуемости формулы **Ф** уже приведено к противоречию безусловно, т.е. из аксиом гёделевой арифметики (например, так, как это сделано выше). Выводим отсюда безусловно, т.е. как формулу гёделевой арифметики, что **Ф недоказуема**. Тогда, каков бы ни был натуральный номер **n**, он не номер доказательства для формулы **Ф**. Тогда, по определению τ, для каждого **n** верно, что φ**(M, M)** $\neq$ τ**(n)**. Т.е. верна формула **не** $\exists$**n (**φ**(M, M) =** τ**(n))**, т.е. верна **Ф**. Это есть вывод формулы **Ф** из аксиом гёделевой теории арифметики. Вывод имеет конкретный гёделев номер. Выводим отсюда, что **Ф доказуема**.

Последователи Гёделя, пытаясь избежать явного противоречия, иногда утверждают, что вывод о недоказуемости **Ф** проводим только в метатеории и не может быть проведён в самой теории. В таком же виде, вывод возможен лишь в условиях, когда в теории запрещено в полной мере рассуждать о доказательствах как о предметах, которые описывает язык теории, и для которых он и был создан. Запрет берётся из ниоткуда, при полном отсутствии обоснования. Кроме того, «гёделев результат» достигается лишь в связи с тем, что **по правилам гёделевой дедукции, в непротиворечивой теории, из доказуемости формул нельзя извлечь их истинность** (доказуемость формулы означает её выводимость из аксиом). Выводя «метаматематическую теорему Гёделя» в метатеории, описывающей «все математические теории» (ведь формалисты хотят говорить о «всех теориях»), необходимо иметь хотя бы какое-нибудь разумное и достаточное основание для столь патологичной дедукции. Но такое основание отсутствует: Во всех до сих пор известных доказательствах, во всех разделах математики, в любой математической практике, если формула доказана, то она истинна. Нельзя привести ни одной доказанной ложной формулы. Не возникает ли противоречие с аксиомой «доказуемость влечёт истинность» из дефектов гёделевых определений, когда выводам лишь приписана математическая необходимость? Причём, ни Гёделем, ни его последователями не доказано, что дедукция не может быть разумной. Свойства «гёделевой дедукции» зависят от произвола гёделевых определений. Чем задана «правильность» определений? В качестве доводов могли бы выступать метаматематические аксиомы. Но, откуда тогда взяты такие аксиомы? Всё обстоит ещё хуже: Для формулы гёделевой арифметики предположение «формула доказуема и ложна» приводимо к противоречию средствами гёделевой арифметики. Следовательно, аксиома «доказуемо значит истинно» выводима в гёделевой арифметике (см. §§5-8)…

Можно встретить ещё одно формалистское возражение, что существует «техническая трактовка» гёделевой арифметики, в которой только и следует понимать все её построения, а содержательная интерпретация гёделевой арифметики – лишь вспомогательный ход, помогающий «жёстко» установить недоказуемость формулы Гёделя. Отвечая на эту уловку, можно утверждать, что никем не установлено, что в возможной технической трактовке гёделева теория совпадает с тем, что интуитивно имеется ввиду под «арифметикой». Иными словами, никем не доказано, что в предполагаемом толковании употреблены все до сих пор известные логические и математические ходы, которые как минимум требуются для построения естественной арифметики. В §§4-10 ситуация рассмотрена в подробностях.

§4

Сначала, применим гёделевы определения к «настоящей доказуемости» – к способу фактического узнавания положения вещей. Посмотрим, к чему приведёт наша прямая позиция.

Формула и функтор Гёделя задаются непредикативным определением, соотношением, которое после того, как оно определено, ещё необходимо доказать. Непредикативное определение подобно уравнению, в котором неизвестное стоит в обеих частях равенства. Уравнение может считаться определением неизвестной, но необходимо ещё доказать, что уравнение имеет решение. В «логических уравнениях» место «равенства» занимает «равносильность». «Неизвестным» гёделевых определений выступает пара из функтора и формулы. По-видимому, иногда непредикативные определения могут быть полезны и непротиворечивы.

Значение τ зависит не только от натурального аргумента, но и от того, доказуема или недоказуема **Ф**. Т.е. τ зависит от **Ф**. Чтобы определить **Ф** необходимо полностью определить τ, но, чтобы определить τ необходимо определить **Ф**. Если мы хотим определить формулу Гёделя так, чтобы она была недоказуема, то мы должны для всех значений **N** определить $\tau(\mathbf{N}) \neq \varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$. Тем самым, мы тривиально устанавливаем, доказываем саму **Ф**. Если мы хотим доказуемости **Ф**, то для конкретных **N** должны приписать $\tau(\mathbf{N}) = \varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$, и снова приходим к противоречию. Но нам необходимо приписать или $\tau(\mathbf{N}) \neq \varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$ или $\tau(\mathbf{N}) = \varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$, что-то конкретное, иначе определение не будет определением. Отсюда находим только то, что данное определение невыполнимо (не имеет решения).

Можно интерпретировать «парадокс лжеца», на содержании которого основана идея Гёделя, как непредикативное определение «утверждаемого лжецом». Утверждение «я лгу» интерпретируем фразой: «утверждаемое мною равносильно отрицаемому мною». Причём, не известно, что же в конце концов утверждает говорящий. Это утверждаемое есть **X**, определяемое непредикативно в форме: **X** ⇔ **не X**. Если эквивалентность **X** ⇔ **не X** принять истинной лишь на том основании, что даётся определение **X**, то можно вывести, что истинной является как **X**, так и **не X**. По существу же, лжец лжёт.

Иногда гёделеву формулу определяют непредикативно, как формулу эквивалентную утверждению о собственной недоказуемости: **Ф** участвует в соотношении **Ф ⇔ не доказуема Ф**. В итоге, если гёделева формула только неконструктивно определена через такое соотношение, то просто выводим (§§5-10), что такой формулы в арифметике не существует. Если пытаться конструктивно определить **Ф** средствами арифметики, надеясь выполнить соотношение, то придём к противоречию в процессе определения. Иными словами, гёделевым способом невозможно непротиворечиво определить для теории функцию τ, или иную, так или иначе перечисляющую доказательства, и, следовательно, все эффективные вычисления. В принципе не существует алгоритма теории, задающего подобную функцию – противоречиво уже предположение о таком алгоритме, даже в виде аксиомы. В частности, противоречива попытка Гёделя ввести отмеченную функцию в арифметику, пусть даже и средствами метатеории.

§5

Уточним «исходные данные». T – теория, в которой даются все нижеследующие определения (метатеория). S – теория, интерпретируемая средствами теории T. Это означает, что в T: определяются отношения и функторы для теории S; доказываются теоремы, которые суть – аксиомы теории S.

В результате, средствами T даётся определение, что означает «формула $\in$ S». Теория здесь отождествляется с множеством формул, функторов и т.п., которые в ней могут быть сформулированы или заданы, и тем самым, содержатся. Если ψ – формула, то $\psi \in S \Rightarrow \psi \in T$, обратная импликация, вообще говоря, неверна. Если M – теория, ψ – формула, то считаем, что выражение «ψ есть M-формула» означает то же, что и «$\psi \in M$».

В качестве S формулируем арифметику, называемую здесь GA – «арифметикой Гёделя». В теории S так или иначе можно говорить: о доказуемости S-формул, о гёделевых номерах S-формул, о гёделевых номерах цепочек S-формул, о гёделевых номерах доказательств. Для этого, средствами T определён оператор Pf так, что если ψ есть S-формула, то Pf(ψ) – так же S-формула, означающая, что «ψ доказуема средствами S». При этом, «гед.ном.(ψ)» означает гёделев номер формулы ψ. Если W – цепочка S-формул, то «гёд.ном.(W)» означает гёделев номер цепочки W. Функтор, ставящий в соответствие каждой S-формуле её гёделев номер, принадлежит S. Аналогично, принадлежат S функторы, перечисляющие цепочки формул, выводы и доказательства.

В качестве T выберем теорию классической арифметики CA. В CA классическим способом определяются формулы и функторы, которые можно подставлять друг в друга. Считаем, что в CA невозможно говорить о доказуемости CA-формул, хотя это требование не обязательно выполнять, при соответствующих аксиомах. Арифметику Пеано обозначим PA. Эту теорию можно выбрать в качестве теории T, или можно отождествить с GA. Последнее отождествление не справедливо, так как Пеано рассматривал свою арифметику совершенно в другом контексте. Естественнее считать PA = CA.

В любом из указанных случаев, теорию S формулируем как теорию, в которой по неким «техническим интерпретациям» речь идёт только о числах. Т.е. с формальных точек зрения: «с точки зрения теории T» и «с точки зрения формального понимания теории S ею же самой» разговор идёт только о числах. Но «с точки зрения содержательного понимания теории S», мы можем рассматривать функторы не только от чисел, но и от формул.

S-вывод формулы ψ – это цепочка S-формул, являющаяся выводом в теории T формулы ψ из посылок, которые суть S-формулы, проводимый без расшифровки атомарных S-формул. Атомарные формулы теории S, это такие её формулы, которые не могут быть разбиты на подформулы средствами теории S. S-теорема – это такая формула, которая стоит в конце хотя бы одного S-вывода из аксиом теории S (S-аксиом). S-доказательство, или безусловный S-вывод – это такой S-вывод, посылки которого суть S-аксиомы. Если S-вывод не является безусловным, то он является условным S-выводом.

Аналогично определяется T-вывод, T-доказательство и т.п. Каждый S-вывод является одновременно T-выводом. Обратное не верно. Каждая S-теорема есть T-теорема, но не обратное.

В теории S вводится **логическое правило**: если вывод формулы ψ есть S-доказательство, то мы можем отсюда заключить, что верна формула $Pf(\psi)$.

Средствами T в теории S определяется множество формул «верных в S». Каждая числовая формула из T считается либо «верной в T», либо «неверной в T», т.е. попросту верной ли или неверной, вне зависимости от её доказуемости в T. Подразумевается, что возможно верифицировать каждую формулу. Это интуитивное требование (аксиома) классической логики. Формула теории S считается «верной в S», если эта формула верна в T, т.е., если попросту она верна. В частности, каждая S-теорема считается «верной в S». Однако, в смысле данных определений, если формула верна в S, то это не означает, что она S-теорема, что безусловно выводима из аксиом теории S.

Замечание. Если ψ есть S-формула, полученная в результате вывода, среди посылок которого содержится формула $\notin$ S, то мы не можем отсюда заключить средствами теории S, что $Pf(\psi)$ верна, даже если в T формула ψ доказуема. Таким образом, мы не сможем средствами S установить $Pf(\psi)$ как теорему теории S. Мало того, если ψ получена в результате S-вывода, но хотя бы одна из посылок не является теоремой теории S (такая посылка может быть недоказуемой, но верной в S формулой), то мы не можем применить к формуле ψ отмеченное выше правило вывода и заключить средствами теории S, что $Pf(\psi)$ верна, т.е. не можем установить $Pf(\psi)$ как теорему из S.

§7

Для вывода противоречия в S нам потребуются два утверждения:

1. Какова бы ни была S-формула ψ, средствами теории S из доказуемости ψ можно извлечь, что ψ верна. Т.е., в S верна аксиома: $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ (схема аксиом). Эту аксиому можно заменить некоторым эквивалентным правилом вывода.

2. Существует формула φ теории S такая, что средствами S доказуемо, что $\varphi \Leftrightarrow \neg Pf(\varphi)$.

Утверждение 2 доказываем, предполагая, что завершено определение предиката Pf, преодолевшее порочный круг. Пусть в S определён предикат Pr(z), означающий: «доказуема формула с гёделевым номером z». Если χ – S-формула, то $Pf(\chi)$ вводится как S-формула Pr(гёд.ном.(χ)). Пусть sb(n, m) – гёделев номер формулы, полученной подстановкой номера m вместо свободной переменной в такую формулу с одной свободной переменной, гёделев номер которой есть n. Функтор sb всегда определим в S, посредством аксиом S. Пусть μ – S-формула, z – единственная свободная переменная этой формулы. Рассмотрим формулу μ(sb(x, x)), x – свободная переменная. Пусть, гёд.ном.(μ(sb(x, x))) = L. Обозначим через ψ формулу μ(sb(L, L)). По определению sb: гёд.ном.(ψ) = гёд.ном.(μ(sb(L, L))) = sb(L, L). Значит, $\psi \Leftrightarrow$ μ(sb(L, L)) $\Leftrightarrow$ μ(гёд.ном.(ψ)). В качестве φ возьмём формулу ψ, для которой μ есть $\neg$Pr, ч.т.д. Проведённый вывод есть S-доказательство.

Выведем противоречие, предполагая, что аксиома из 1, есть S-теорема. Действительно, рассуждая в S, предположим, что φ доказуема средствами S, т.е. в S предположим, что верно $Pf(\varphi)$. По указанной аксиоме получаем, что в S верна φ. Тогда, из утверждения 2, (средствами S) извлекаем верность $\neg Pf(\varphi)$. Это противоречие. Следовательно, предположение о доказуемости φ неверно. Следовательно, (это вывод из аксиом S) верно $\neg Pf(\varphi)$. Но тогда, по утверждению, указанному в 2, верна φ. Это S-доказательство формулы φ. Применяя правило вывода §6, получаем верность $Pf(\varphi)$. Снова противоречие.

Если аксиома $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ не является теоремой теории S, то она должна быть хотя бы теоремой теории T (иначе, не возможен вывод в метатеории недоказуемости φ), причём эта теорема одновременно есть S-формула. Тогда, в теории T можно дать приведённый выше вывод и придти к утверждению «о безусловной недоказуемости формулы φ средствами S» – в качестве теоремы теории T и S-формулы, но не как S-теоремы. Из недоказуемости φ в S можно извлечь истинность φ (в силу 2), и установить истинность φ S-выводом. В силу замечания §6, тогда нельзя переходить к утверждению о верности $Pf(\varphi)$. Таким способом в T обычно устанавливают истинность φ, не приходя к видимому противоречию.

Из такого рода «недоказуемости» формул φ и $\neg\varphi$ в S обычно выводят, что «S непротиворечива и неполна» (если непротиворечива T, т.к. для каждой формулы полной теории существует доказательство самой этой формулы, либо её отрицания). Поскольку же, «достаточно богатая непротиворечивая теория» должна содержать S, то такая теория должна быть неполна так же. Тем самым обосновывается тезис о том, что «все достаточно богатые теории или неполны, или противоречивы».

§8

Не признавая утверждение $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ в качестве аксиомы теории S, нельзя говорить о том, что доказана классическая невыводимость φ. В самом деле, доказана невыводимость φ в теории S, почему-то отождествляемой с «арифметикой», но в которой запрещено извлекать из доказуемости формул их истинность. «Доказуемость», не влекущая истинности, не используется в математике. Но именно относительно такой «неполноценной доказуемости» и устанавливается «недоказуемость φ».

Между тем, формула $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ доказуема в S для каждой доказуемой в S формулы ψ, поскольку, прежде чем установить формулу $Pf(\psi)$ как теорему S, мы должны выписать цепочку формул, являющуюся доказательством: ψ_1, ψ_2, …, ψ_{n-1}, ψ_n, в которой последняя формула совпадает с формулой ψ и является истинной. В S возможны ссылки на такие цепочки, хотя бы потому, что по наличии цепочки в S определяется истинность $Pf(\psi)$. Таким способом, извлекая истинность $Pf(\psi)$ в S, с неизбежностью извлекаем истинность ψ в S. В итоге, формула «для доказуемых формул $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$» – теорема теории S. Если ψ не является доказуемой формулой, то формула $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ истинна очевидно. Отсюда, в S выводимо «для всех ψ верно $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$». Таким образом, если и можно придумать причины, по которым формула $Pf(\psi) \Rightarrow \psi$ не выводима в гёделевой арифметике, то они будут весьма нелепыми.

§9

Ответим на возражение, что «не следует понимать гёделевы формулы в их содержательной интерпретации, такая интерпретация всего лишь приём для выводов». Иными словами, рассмотрим ситуацию, когда нас обязывают толковать «гёделевы высказывания» только как высказывания о числах, «технически». Покажем, что в «технической интерпретации» весьма условно понимаются «арифметические доказательные средства», хотя, всего лишь, заведомо исключены некоторые способы рассуждений, которые мы легко и без противоречия применили бы в S как известные арифметические средства, если бы нам не сказали, что речь идёт о «теореме Гёделя». Рассмотрим ситуацию подробнее.

Пусть E – теория арифметики. Мы можем рассмотреть случаи, когда E $\supset$ S, и когда E $\subset$ S. Первый случай означает, что некоторые формулы или аксиомы теории E не являются формулами или аксиомами теории S. Мы уже имеем T $\supset$ S. В T формула φ доказуема тривиально. Поэтому, известно, что в принципе может возникнуть ситуация, когда в теории E, включающей теорию S, во всяком случае, некоторые, формулы теории S легко доказуемы. Нельзя исключать, что в теории E доказуемы все формулы теории S, и, в том числе, φ. Причём, φ доказуема тривиально в самом прямом классическом смысле, т.е. средствами E получено точное знание, что формула φ истинна, через приёмы, заведомо использующиеся в обычной логике и арифметике (для доказательства можно даже положить E = T). Нельзя ссылаться на «теорему Гёделя» для опровержения этой возможности, так как утверждение Гёделя ещё требуется доказать для E. Тогда, «гёделева доказуемость» означает лишь весьма специфическую доказуемость формул в субтеории S, доказуемость средствами S, а не более полными средствами E. Средства S оказываются заведомо недостаточными по отношению к обычным средствам арифметики. Поэтому, невозможность доказать в S формулу из S не означает нормальной неполноты арифметики E – неполноты относительно заведомо использующихся в E операций.

Если сознательно не употреблять известное и простое доказательное средство арифметики для разрешения гёделевой формулы в технической интерпретации, то употребляется ли тогда собственно арифметика, да и собственно логика? Ведь в других подобных случаях, мы запросто бы обошли подобную трудность и легко бы доказали подобную формулу, считая применённым арифметическое средство. В частности, при «техническом толковании» S, интерпретируя в E формулы теории S как выражения для чисел, запросто можно разобраться с «гёделевыми формулами» и легко разрешить свойства функторов по существу. В «естественном техническом толковании» формулы тем самым разрешаются внутри арифметики. Либо, всякий раз, когда возникает вопрос о том, соотнести ли тот или иной простой и разрешимый по существу факт вычислений с арифметикой, «смертному», видимо, следует спросить разрешения «как считать» у адептов гёделевой школы, которые не предъявляют внятных аргументов.

Техническую трактовку, которую можно было бы использовать при вычислениях в самой теории S, Гёдель не вводил, к ней могут обращаться лишь современные формалисты, и то, как к гипотезе, поскольку до сих пор трактовка не предъявлена. В теории S, говорящей только о числах, «аксиомы гёделевой арифметики» резко меняют свой смысл. И уже не факт, что список «аксиом» теории S восполнит список естественных аксиом арифметики. В частности, в S могут оказаться «недоказуемыми» тривиально доказуемые утверждения. В этих условиях, «арифметическая неразрешимость» φ не может быть доказана из-за того, что нельзя безусловно доказать, что S совпадает с классической арифметикой, так как, известна техническая теория T, говорящая в точности о предметах теории S, легко разрешающая формулу.

Т.е. S должна быть частью реальной арифметики. Пусть E – некоторая теория, претендующая быть арифметикой, и E $\subseteq$ S. Тогда тем более, не доказано, что E совпадает с классической арифметикой.

§10

Вне зависимости от приведённых выше доводов, Гёделем не доказано существование неразрешимой классической формулы, уже только потому, что φ не входит в множество «высказываний классической арифметики», так как, последние не используют «предикат доказуемости» и не образуют всей S. Это положение вещей очень близко к следующему: некое высказывание X можно ввести в арифметику как символ, никак не связанный аксиомами арифметики. Такая ситуация легко интерпретируется метатеорией. Очевидно, что высказывание X недоказуемо в теории, содержащей в точности старые аксиомы арифметики и, чисто как элемент синтаксиса, высказывание X (но не в качестве аксиомы). Такая «расширенная» теория формально «неполна». Но это не означает, что «старая арифметика» неполна или «не достаточно богата». Для содержательной трактовки снова можно утверждать, что если E $\supset$ S, то не доказано, что неполнота S влечёт неполноту E. Если же E $\subset$ S, то не доказано, что формула φ окажется среди формул теории E. Этот аргумент можно использовать, когда формалисты настаивают на своих запретах в логике или синтаксисе. Т.е. когда утверждают, что «относительно предиката доказуемости ничего нельзя сказать в теории».

§11

В итоге, гёделевы определения нелепы. «Гёделева доказуемость» не совпадает с реальной доказуемостью. Гёделева формула – «вещь в себе», говорящая не о предметах арифметики. Доводы Гёделя заведомо игнорируют действительную разрешающую способность аксиом арифметики, без всякого рассмотрения, даже не вникая в возможную сложную взаимосвязь аксиом, и не могут быть исправлены каким-либо простым приёмом.

Правдоподобнее выглядит предположение обратное к «тезису Гёделя»: **достаточно богатая теория обладает достаточно богатым – для полноты теории – набором разрешающих средств**. Отсюда, «теорема Гёделя» не является даже правдоподобной гипотезой, не говоря уже о том, чтобы быть теоремой. Причина, по которой «теорема Гёделя» выдана за «математическое достижение», находится вне математики.

Собрание мнений формалистов по поводу того, что «должно быть» в отношении неполноты наших математических теорий, в лучшем случае можно назвать «гёделевой идеологемой», не обоснованной вне зависимости от того, приведено ли, и может ли быть вообще приведено, доказательство противоположной гипотезы. Пользуясь тем, что не могут быть окончательно точными понятия: «задача», «алгоритм», «доказательное средство» и др., формалисты спекулируют на трудностях познания. Вопрос о полноте нашего математического знания относится к вечным вопросам. И неполнота знания, из-за несовершенства человека, всегда имеет место. Но из незавершённости знания не вытекает неполнота конкретной достаточно развитой теории, если понятия поставить на более чёткую основу. Уточнение понятий всегда может быть подвергнуто критике, из-за того, что, скорее всего, повлечёт сужение класса задач и алгоритмов по отношению к естественным, интуитивным задачам и алгоритмам арифметики. Трудности не влекут невозможность полной теории, разрешающей настолько важный класс задач, что он вполне удовлетворит нашу потребность знать арифметику. Для примера: в теории окажутся разрешимыми все диофантовы уравнения. Следует потребовать, по-видимому, и того, чтобы «эффективными» в теории считались всё же только те вычисления, для которых доказуема их завершаемость.

По итогам разбирательства, можно посоветовать логикам, обратиться к изучению реального человеческого мышления и к реальной арифметике, а не к бесполезным формальным конструкциям.

Литература

1. Godel. K. Uber formal unentscheidbare Satze der Principina Mathematica und verwandter Systeme, Monatsh fur Math. U. Phys., XXXVIII (1931), 173-198.

2. Коэн. Пол.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М. 1969.

3. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М. 1977.