«Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики» не является даже правдоподобной гипотезой

Дм. Ватолин

«Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики» утверждает, что в арифметике существует недоказуемая гёделева формула такая, что её отрицание так же не может быть доказано. По гёделевым же доводам, любая достаточно богатая математическая теория должна содержать подобную формулу. Гёделевы аргументы бездоказательны и противоречивы.

§1

Пусть в теории арифметики используются подстановки формул и функторов в формулы и функторы. Числовые значения функторов и истинностные значения формул, пусть зависят от таких же значений, используемых при подстановках. В частности, значения функторов могут зависеть от истинностных значений формул.

Гёдель [1] даёт способ рекурсивного перечисления через натуральные числа всех формул теории арифметики и всех доказательств арифметики – последних, как некоторых упорядоченных цепочек формул, выстраиваемых по правилам логического вывода. Таким образом, каждая формула и каждая цепочка формул имеет свой натуральный номер, называемый «гёделевым номером», и из цепочек формул выделяемы рекурсивным перечислением те цепочки, которые считаются доказательствами. Гёделевы номера формул и цепочек формул выбираются так, что они не равны нулю.

Следуя изложению [3], определим функторы $\boldsymbol{\tau}$ и φ:

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) =$ гёделеву номеру той формулы, доказательство которой имеет гёделев номер $\mathbf{p}$.

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) = 0$, если $\mathbf{p}$ не является номером какого-либо доказательства.

$\varphi(\mathbf{m}, \mathbf{n}) =$ гёделеву номеру формулы, полученной подстановкой числа $\mathbf{n}$ в формулу ψ вместо единственной свободной переменной формулы ψ, при том, что ψ имеет гёделев номер $\mathbf{m}$.

$\varphi(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0$, в противном случае.

Доводы Гёделя сводимы к следующим: Пусть формула: $\neg\, \exists \mathbf{p}(\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}))$, обозначенная как $\boldsymbol{\Psi}$, имеет гёделев номер $\mathbf{M}$. Тогда формула Гёделя $\boldsymbol{\Phi}$, полученная подстановкой номера $\mathbf{M}$ в формулу $\boldsymbol{\Psi}$, такова: $\neg\, \exists \mathbf{p}(\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}))$. $\boldsymbol{\Phi}$ имеет гёделев номер $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$, в связи с указанной подстановкой. Предположим, $\boldsymbol{\Phi}$ доказуема. Тогда, существует номер $\mathbf{p}$ для доказательства $\boldsymbol{\Phi}$. По определению функции $\boldsymbol{\tau}$ получаем, что $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{p}) =$ гёделеву номеру $\boldsymbol{\Phi} = \varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M})$. Т.е. истинно $\varphi(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{p})$, т.е. истинно отрицание формулы $\boldsymbol{\Phi}$. Т.к. из доказуемости следует истинность $\boldsymbol{\Phi}$, то предположение ведёт к противоречию. Предположим, доказуема (следовательно, истинна) формула $\neg\mathbf{\Phi}$. Отрицание $\mathbf{\Phi}$ говорит в точности о том, что существует номер $\mathbf{p}$ такой, что $\varphi(\mathbf{M},\mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p})$. Так как гёделевы номера формул не равны нулю, то $\mathbf{p}$ не может быть номером, не являющимся номером доказательства. Т.е. $\mathbf{p}$ – номер доказательства. Тогда, поскольку $\varphi(\mathbf{M},\mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p})$, это доказательство формулы с гёделевым номером $\varphi(\mathbf{M},\mathbf{M})$. Т.е. $\mathbf{\Phi}$ доказуема. Значит, формула $\mathbf{\Phi}$ истинна одновременно с истинностью $\neg\mathbf{\Phi}$. Приводим к противоречию предположение о доказуемости формулы $\neg\mathbf{\Phi}$.

В гёделевой арифметике можно говорить о доказательствах как о предметах и о взаимоотношениях между числами и доказательствами. Собственно, формула $\exists\mathbf{p}\ (\mathbf{f} = \tau(\mathbf{p}))$ считается содержательно говорящей о том, что «$\text{формула, имеющая гёделев номер } \mathbf{f}, \text{доказуема}$». Следовательно, по поводу этих взаимоотношений можно рассуждать внутри гёделевой арифметики, для чего и создан её язык. В частности поэтому (как можно хотя бы ожидать по логике вещей), изложенное выше рассуждение должно быть рассуждением гёделевой арифметики.

Если же вывод о недоказуемости гёделевой формулы можно сделать внутри гёделевой арифметики, то совместное определение такой формулы и функтора, перечисляющего доказательства, оказывается противоречивым. Действительно, пусть предположение о доказуемости $\mathbf{\Phi}$ уже приведено к противоречию безусловно, т.е. из аксиом гёделевой арифметики (например, так, как это сделано выше). Выводим отсюда безусловно, т.е. как формулу гёделевой арифметики, что «$\mathbf{\Phi}\ \text{недоказуема}$». Тогда, каков бы ни был номер $\mathbf{p}$, он не номер доказательства для формулы $\mathbf{\Phi}$. Тогда, по определению τ, для каждого $\mathbf{p}$ верно, что $\varphi(\mathbf{M},\mathbf{M}) \neq \tau(\mathbf{p})$. Т.е. верна формула $\neg\exists\mathbf{p}\ (\varphi(\mathbf{M},\mathbf{M}) = \tau(\mathbf{p}))$, т.е. верна $\mathbf{\Phi}$. Это есть вывод формулы $\mathbf{\Phi}$ из аксиом гёделевой теории арифметики. Вывод имеет конкретный гёделев номер. Выводим отсюда, что «$\mathbf{\Phi}\ \text{доказуема}$».

Чтобы избежать явного противоречия, гёделевы последователи могут утверждать, что вывод о недоказуемости Ф проводим только в метатеории и не может быть проведён в самой теории. В таком виде вывод возможен лишь тогда, когда в теории запрещено полноценно рассуждать о доказательствах как о предметах, описываемых языком теории, для которых он и был создан. Этот запрет в полунеявном виде берётся из ниоткуда, при полном отсутствии обоснования. В частности, **по гёделевой дедукции, в непротиворечивой теории доказуемость формул не влечёт их истинность** (доказуемость формулы означает выводимость из аксиом). Выводя теорему в метатеории, описывающей «все математические теории», необходимо иметь хотя бы какое-нибудь разумное и достаточное основание для столь патологичной дедукции: Ни в одной математической практике нет доказанной ложной формулы. Если бы такая формула была получена, то потерян был бы сам смысл доказательства. Не вытекает ли противоречие с естественной логикой из дефектов гёделевых определений? Свойства гёделевой дедукции зависят от произвола определений в отношении правил сборки формул. Чем задана правильность определений? Доводами могли бы быть метаматематические аксиомы. Но, откуда взяты такие аксиомы? Почему они необходимы для всех теорий? Гёделевы допущения навязаны без малейшего внятного объяснения.

§2

Уточним «исходные данные». T – теория (метатеория), в которой даются все определения для теории S, интерпретируемой средствами теории T. Это означает, что в T: определяются отношения и функторы для теории S; доказываются теоремы, которые суть – аксиомы теории S.

В результате, средствами теории T даётся определение, что значит «$\text{формула} \in S$». Теория здесь отождествляется с множеством формул, функторов и т.п., которые в ней могут быть сформулированы или заданы, и тем самым, содержатся. Если ψ – формула, то $\psi \in S \Rightarrow \psi \in T$, обратная импликация, вообще говоря, неверна. Если M – теория, ψ – формула, то считаем, что «ψ есть M-формула» означает то же, что и «$\psi \in M$».

В качестве теории S формулируем арифметику, называемую здесь GA – «арифметикой Гёделя». В одном из вариантов теории S так или иначе можно говорить: о доказуемости S-формул, о гёделевых номерах S-формул, о гёделевых номерах цепочек S-формул, о гёделевых номерах доказательств. Для этого, средствами T определён оператор Prf так, что если ψ есть S-формула, то $\mathrm{Prf}(\psi)$ – S-формула, означающая «ψ доказуема средствами S». При этом, $\text{гед.ном.}(\psi)$ означает гёделев номер формулы ψ. Если W – цепочка S-формул, то $\text{гёд.ном.}(W)$ означает гёделев номер цепочки W. Функтор, ставящий в соответствие каждой S-формуле её гёделев номер, входит в S. Аналогично, принадлежат S функторы, перечисляющие цепочки формул, выводы и доказательства.

В другом варианте, предметы теории S суть «гёделевы номера» только с точки зрения T, названы так в T: одни «номера» – «формулы», другие – «натуральные числа», третьи – «знаки», четвёртые – «доказательства», но функция гёд.ном. не входит в аксиомы S, как отображение на «настоящие натуральные числа из S». Для такого варианта S полагаем в S: $\text{гёд.ном.}(\psi) = \psi$. Тогда, функция гёд.ном. теории S и функция теории T, устанавливающая гёделевы номера, различаются в придании смысла «гёделевым номерам», в качестве которых в T могли бы выступать предметы любой природы.

В качестве T выберем теорию классической арифметики CA. В CA классическим способом определяются формулы и функторы, которые можно подставлять друг в друга. Пусть в CA невозможно говорить о доказуемости CA-формул, хотя такое требование не обязательно, при соответствующих аксиомах. Арифметику Пеано обозначим PA. Эту теорию можно выбрать в качестве T, или можно отождествить с GA. Последнее отождествление не справедливо, так как Пеано рассматривал свою арифметику совершенно в другом контексте. Естественнее считать $PA = CA$.

S-вывод формулы ψ – это цепочка S-формул, являющаяся выводом в теории T формулы ψ из посылок, которые суть S-формулы, проводимый без расшифровки атомарных S-формул. Атомарные формулы теории S, это такие её формулы, которые не могут быть разбиты на подформулы средствами S. S-теорема – это такая формула, которая стоит в конце хотя бы одного S-вывода из аксиом теории S (S-аксиом). S-доказательство, или безусловный S-вывод – это S-вывод, посылки которого суть S-аксиомы. Если S-вывод не является безусловным, то он является условным S-выводом.

Аналогично определяется T-вывод, T-доказательство и т.п. Каждый S-вывод является одновременно T-выводом. Обратное не верно. Каждая S-теорема есть T-теорема, но не обратное.

В теории S вводится **логическое правило**: если вывод формулы ψ есть S-доказательство, то мы можем отсюда заключить, что верна формула $\mathrm{Prf}(\psi)$.

Средствами T в теории S определяется множество формул «верных в S». Каждая числовая формула из T считается либо «верной в T», либо «неверной в T», т.е. попросту верной ли или неверной, вне зависимости от её доказуемости в T. Подразумевается, что возможно верифицировать каждую формулу. Это интуитивное требование (аксиома) классической логики. Формула теории S считается «верной в S», если эта формула верна в T, т.е., если попросту она верна. В частности, каждая S-теорема считается «верной в S». Однако, в смысле данных определений, если формула верна в S, то это не означает, что она S-теорема, что безусловно выводима из аксиом теории S.

Замечание. Если формула ψ получена в результате S-вывода, но хотя бы одна из посылок вывода извлечена не из S-аксиом, то нельзя применить к формуле ψ отмеченное выше правило вывода и заключить средствами теории S, что формула $\mathrm{Prf}(\psi)$ верна.

§3

Для вывода противоречия в S нам потребуются два утверждения:

1. Для любой S-формулы ψ средствами теории S из доказуемости ψ можно извлечь, что ψ верна. Т.е., в S верна аксиома: $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ (схема аксиом). Эту аксиому можно заменить некоторым эквивалентным правилом вывода.

2. Существует формула φ теории S такая, что средствами S доказуемо, что $\varphi \Leftrightarrow \neg\mathrm{Prf}(\varphi)$.

Утверждение 2 доказываем, предполагая, что завершено определение предиката Prf, преодолевшее порочный круг. Пусть в S определён предикат $\mathrm{Pr}(z)$, означающий: «доказуема формула с гёделевым номером z». Если χ – S-формула, то $\mathrm{Prf}(\chi)$ вводится как S-формула $\mathrm{Pr}(\text{гёд. ном.}(\chi))$. Пусть $\mathrm{sb}(n, m)$ – гёделев номер формулы, полученной подстановкой номера m

вместо свободной переменной в такую формулу с одной свободной переменной, гёделев номер которой есть n. Функтор sb всегда определим в S, посредством аксиом S. Пусть μ – S-формула, z – единственная свободная переменная этой формулы. Рассмотрим формулу $\mu(\mathrm{sb}(\mathrm{x},\mathrm{x}))$, x – свободная переменная. Пусть, $\text{гёд. ном.}(\mu(\mathrm{sb}(\mathrm{x},\mathrm{x}))) = \mathrm{L}$. Обозначим через ψ формулу $\mu(\mathrm{sb}(\mathrm{L},\mathrm{L}))$. По определению sb: $\text{гёд. ном.}(\psi) = \text{гёд. ном.}(\mu(\mathrm{sb}(\mathrm{L},\mathrm{L}))) = \mathrm{sb}(\mathrm{L},\mathrm{L})$. Значит, $\psi \Leftrightarrow \mu(\mathrm{sb}(\mathrm{L},\mathrm{L})) \Leftrightarrow \mu(\text{гёд. ном.}(\psi))$. В качестве φ возьмём формулу ψ, для которой μ есть $\neg\mathrm{Pr}$. Этот вывод есть S-доказательство.

Выведем противоречие, предполагая, что аксиома из 1, есть S-теорема. Действительно, рассуждая в S, предположим, что φ доказуема средствами S, т.е. в S предположим, что верно $\mathrm{Prf}(\varphi)$. По указанной аксиоме получаем, что в S верна φ. Тогда, из утверждения 2, (средствами S) извлекаем верность $\neg\mathrm{Prf}(\varphi)$. Это противоречие. Следовательно, предположение о доказуемости φ неверно. Следовательно, (это вывод из аксиом S) верно $\neg\mathrm{Prf}(\varphi)$. Но тогда, по утверждению, указанному в 2, верна φ. Это S-доказательство формулы φ. Применяя правило вывода §2, выводим $\mathrm{Prf}(\varphi)$. Снова противоречие.

Если аксиома $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ не является S-теоремой, то она должна быть хотя бы теоремой T (иначе, не возможен вывод в метатеории недоказуемости φ), причём эта теорема одновременно есть S-формула. Тогда, в T можно дать приведённый выше вывод «безусловной недоказуемости φ средствами S» – в качестве T-теоремы и S-формулы, но не S-теоремы. Из недоказуемости φ в S можно извлечь истинность φ (в силу 2), и установить истинность φ S-выводом. В силу замечания §2, тогда нельзя переходить к утверждению о верности $\mathrm{Prf}(\varphi)$. Таким способом в T обычно устанавливают истинность φ, не приходя к видимому противоречию.

Из такого рода «недоказуемости» формул φ и $\neg\varphi$ в S выводим, что «S непротиворечива и неполна» (если непротиворечива T, т.к. для каждой формулы полной теории существует доказательство самой этой формулы, либо её отрицания).

§4

Не признавая утверждение $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ в качестве аксиомы теории S, нельзя говорить о том, что доказана классическая невыводимость φ. В самом деле, доказана невыводимость φ в теории S, почему-то отождествляемой с «арифметикой», но в которой запрещено извлекать из доказуемости формул их истинность. «Недоказуемость» формулы φ устанавливается относительно такой «неполноценной доказуемости». Соответственно, выводы Гёделя, в лучшем случае, имеют силу только для подобных патологичных теорий.

Между тем, формула $\mathrm{Prf}(\psi) \Rightarrow \psi$ доказуема в S для каждой доказуемой в S формулы ψ, поскольку, прежде чем установить $\mathrm{Prf}(\psi)$ как теорему S, мы должны выписать доказательство, цепочку формул: $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n$, в которой последняя формула совпадает с формулой ψ и является истинной. В S возможны ссылки на такие цепочки, хотя бы потому, что по наличии цепочки в S определяется истинность $Prf(\psi)$. Таким способом, извлекая истинность $Prf(\psi)$ в S, с неизбежностью извлекаем истинность ψ в S. В итоге, формула «для доказуемых формул $Prf(\psi) \Rightarrow \psi$» должна быть теоремой S. Если ψ недоказуема, то формула $Prf(\psi) \Rightarrow \psi$ истинна очевидно. Отсюда, в S выводимо «для всех ψ верно $Prf(\psi) \Rightarrow \psi$». Но может быть в S нельзя делать обобщающие заключения, даже если каждый конкретный факт установим? Подобные неявные запреты на формирование обобщающих предложений – в виде умышленного отсутствия каких-то логических правил – не допускаются в обычной математике. Почему тогда эти патологии должны быть допустимы в гёделевой арифметике? Ясно поэтому, что формалистские ограничения вводятся директивно, простым ничем не обоснованным произволом. Таким образом, если и можно придумать причины, по которым формула $Prf(\psi) \Rightarrow \psi$ не выводима в гёделевой арифметике, то они будут весьма нелепыми.

Но не менее важно, что само введение «предиката доказуемости» уже выводит за рамки обычной арифметики. В самом деле, неразрешимость классической формулы арифметики Гёделем не доказана только потому, что формула φ не встречается среди высказываний классической арифметики. Последние не используют «предикат доказуемости» и не образуют всей S. Это положение вещей очень близко к следующему: Некое высказывание X можно ввести в арифметику как символ, никак не связанный аксиомами арифметики. Такая ситуация легко интерпретируется метатеорией. Очевидно, высказывание X недоказуемо в теории, содержащей аксиомы изначальной арифметики и, как элемент синтаксиса, высказывание X (но не как аксиому). Такая «расширенная» теория формально «неполна». Это не означает, что изначальная арифметика неполна или не достаточно богата. Видно, поэтому, что никакого настоящего исследования структуры высказываний арифметики Гёделем не проводилось. Нет никакого объяснения со стороны формалистов, по какой такой причине выводы о неполноте интерпретируемой теории S (гёделевой арифметики) переносятся на интерпретирующую теорию T (на классическую арифметику)? Интерпретируемой теорией, полнота которой исследуется, как раз логично было бы взять классическую арифметику.

§5

Ниоткуда же не следует, что теорию, говорящую о своих формулах и доказательствах, нельзя построить без противоречий и без патологий. Так же и ничто не влечёт, что арифметика должна вообще иметь гёделев тип. Гёдель, произволом на уровне определений, исходя из своих представлений о правилах сборки формул, заложил в теорию неявные метаматематические основания, заранее задумав результат. Эти основания не извлекаются ни из какой безусловной заранее заготовленной метатеории, которой мы обязаны следовать, и являются предметом бескомпромиссной борьбы без правил.

Один из метаматематических вопросов, т.е. вопрос об основаниях, из которых исходят идеи и определения Гёделя, таков: насколько правильно явное или неявное употребление в качестве предикатных переменных самих формул и доказательств? Даже простые правила образования формул с переменными такого рода могут быть противоречивы. Проведём небольшое исследование по этому поводу.

Пусть внутри теории S функция гёд. ном. оказалась не упомянутой в аксиомах S, и определяется так, что $\text{гёд. ном.}(\psi) = \psi$. Выражение $W = sb(U, V)$ в теории S тогда означает: «формула W получена подстановкой значения V в формулу U». На приведённые доводы такое толкование не повлияет. Но больше видно смешение переменных для чисел и формул. Знакосочетание $sb(M, M)$ означает формулу, которая получена подстановкой в формулу M, вместо свободной переменной из M, самой M, как значения переменной. Значения переменных можно подставлять в любую формулу. Подставляя в формулу $\xi^2 + \rho^2 = \zeta^2$ вместо переменных ξ, ρ и ζ в качестве значений три теоремы арифметики A, B, C, высказывание о чём мы получим? Формально, после подстановки, формуле можно приписать какое-нибудь истинностное значение, но оно – за рамками арифметики. В язык арифметики добавлено неарифметическое предложение. Его недоказуемость не влечёт неполноту теории, выстраиваемую по обычным правилам.

Поэтому стоит рассмотреть вариант S, содержащий функцию гёд. ном. как отображение формул и доказательств на натуральные числа теории S. Но если внутри теории S есть соответствие между доказательствами и числами, то нарушается одна из основных теорем теории алгоритмов. Поскольку, каждое «эффективное вычисление» сводимо к некоторому доказательству. Действительно. Назовём «эффективной всюду вычислимой» рекурсивную функцию F, область определения которой весь натуральный ряд, и для которой доказуемо, что «для каждого числа n значение $F(n)$ вычислимо за конечное число шагов» (каждый шаг – операция, разрешённая в теории). Пусть $\tau(p) = f$ означает, что цепочка формул p доказывает формулу под номером f. Формула с номером f имеет вид «$\text{для каждого натурального } n \text{ вычислимо } F(n)$» для некоторой функции F, определённой только на натуральных числах, либо имеет другой вид. Если второе, то, пользуясь нумерацией доказательств, перебираем доказательства и соответствующие им числа формул f до тех пор, пока не встретим формулу первого вида. Когда встретится подходящая формула, присвоим функции F первый номер, обозначив её F_1. «Эффективная всюду вычислимость» F_1 (с точностью до утверждения о доказуемости) утверждается найденной формулой, гёделев номер которой пусть будет f_1, а номер p_1 её доказательства пусть окажется минимальным из всех возможных. Затем, найдём доказательство с номером $p_2 > p_1$ для функции F_2, подытоженное формулой с номером f_2, и т.д. В итоге, составим последовательность номеров такую, что формула под номером f_n, с номером её доказательства p_n наименьшим из тех, что $> p_{n-1}$, доказуема, и утверждает «эффективную всюду вычислимость» функции F_n.

Таким способом перечислим все эффективно всюду вычислимые функции, не пропустив ни одной. Функция H такая, что $\mathrm{H}(\mathrm{n}) = \mathrm{F_n}(\mathrm{n}) + 1$, эффективно всюду вычислима, т.к. доказуемо, что для каждого n функция $\mathrm{F_n}$ находится за конечное число шагов, и значение $\mathrm{F_n}(\mathrm{n})$ вычислимо на конечном шаге. Поскольку H отличается от перечисленных функций, то получаем ещё одно противоречие.

§6

В итоге, гёделев вывод в отношении формальной арифметики нелеп. Доводы Гёделя игнорируют действительную разрешающую способность аксиом арифметики, без всякого рассмотрения, даже не вникая в возможную сложную взаимосвязь аксиом, не могут быть исправлены простым приёмом. Из тех соображений, что в достаточно богатой теории достаточно средств для выстраивания формулы гёделева типа, Гёдель извлёк ещё и «неполноту любой теории, содержащей арифметику». Так как это заключение исходит из тех же зыбких оснований, то оно, по меньшей мере, так же не доказано.

Правдоподобнее выглядит предположение обратное к «тезису Гёделя»: **достаточно богатая теория обладает достаточно богатым – для полноты теории – набором разрешающих средств**. Отсюда, «теорема Гёделя» не является даже правдоподобной гипотезой, не говоря уже о том, чтобы быть «теоремой». Причина, по которой «гёделева теорема» до сих пор выдаётся за «математическое достижение», находится вне математики.

Собрание мнений формалистов по поводу того, что «должно быть» в отношении неполноты наших математических теорий, в лучшем случае можно назвать «гёделевой идеологемой», не обоснованной вне зависимости от того, приведено ли, и может ли быть вообще приведено, доказательство противоположной гипотезы. Пользуясь тем, что не могут быть окончательно точными понятия: «задача», «алгоритм», «доказательное средство» и др., формалисты спекулируют на трудностях познания. Вопрос о полноте нашего математического знания относится к вечным вопросам. И неполнота знания, из-за несовершенства человека, всегда имеет место. Но из незавершённости знания не вытекает неполнота конкретной достаточно развитой теории, если понятия поставить на более чёткую основу. Уточнение понятий всегда может быть подвергнуто критике, из-за того, что, скорее всего, повлечёт сужение класса задач и алгоритмов по отношению к естественным, интуитивным задачам и алгоритмам арифметики. Трудности не влекут невозможность полной теории, разрешающей настолько важный класс задач, что он вполне удовлетворит нашу потребность знать арифметику. Для примера: в теории окажутся разрешимыми все диофантовы уравнения полиномного вида (и «эффективными вычислениями» будут названы только те, завершаемость которых доказуема).

По итогам разбирательства, можно посоветовать логикам, обратиться к изучению реального человеческого мышления и к реальной арифметике, а не к модным и бесполезным формальным конструкциям.

Литература

1. Gödel. K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principina Mathematica und verwandter Systeme, Monatsh für Math. U. Phys., XXXVIII (1931), 173-198.

2. Коэн. Пол.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М. 1969.

3. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М. 1977.