DETERMINAREA ORICAT DE EXACTA A RELATIEI DE CALCUL A INTEGRALEI ELIPTICE COMPLETE DE SPETA INTAIA

M i r c e a   S e l a r i u , Universitatea "POLITEHNICA" din Timisoara,
Bd. Mihai Viteazul , 1 C.P. 625, 1900- Timisoara/ Romania

0. Abstract.

THE CALCULUS RELATION DETERMINATION, WITH WHATEVER PRECISION, OF COMPLETE ELLIPTIC INTEGRAL OF THE FIRST KIND.

These papers show a calculus relation (50) of complete elliptic integral K(k) with minimum 9 precise decimals and the possibility to obtain a more precisely relation.. It results by application Landen's method, of geometrical-arithmetical average, not for obtain a numerical value but to obtain a compute algebraically relation after 5 steps of a geometrical transformation, called "CENTERED PROCESS".

0. Rezumat

Frecventa este marimea fizica care ,astazi, se poate masura cu cea mai mare precizie. De aceea , definitia unitatii de lungime (metrul etalon de la Sèvres-Paris) a fost inlocuita, in 1983, cu multiplii lungimii de unda a unei oscilatii (radiatia kriptonului 86), iar unitatea de timp a fost redefinita prin multiplii de perioade ale unei anumite radiatii. Calculul frecventelor diverselor sisteme tehnice , in special neliniare, nu s-a ridicat ,insa, la acelasi nivel dorit de precizie .

Integrala eliptica completa de speta intaia **K(k)** poate oferi solutia determinarii cu precizie a frecventelor unor sisteme neliniare, dar seria de puteri (6), prin care ea se exprima, este slab convergenta. De aceea, au aparut metode numerice, ca metoda Landen sau a mediei aritmetico-geometrice, care ofera cu precizie valoarea (numerica) a lui **K** pentru un modul **k** dat, valori prezentate tabelar, cu diverse zecimale exacte- 9 in Abramovitz [20] s.a.[19].

Ideea autorului a fost de a obtine nu valoarea numerica a lui K(k), ci o expresie algebrica (relatie de calcul) din care sa rezulte cu o precizie impusa (oricat de ridicata se doreste) valoarea integralei pentru oricare valoare k, si nu numai pentru cele existente in tabele, evitandu-se , astfel, interpolarile uneori necesare. Pentru precizii nelimitate, aceasta relatie de calcul este **K(k) =** π **/2R(k)** si, pentru minimum 9 zecimale exacte, s-a constatat ca functia $\mathbf{R_N(k)}$ necesita doar **5** pasi , astfel ca $\mathbf{R_5(\,k\,)}$ este patratul perfect

$$\mathbf{R_5\,(\,k\,)} = \frac{1}{4}\left[\frac{A+G}{2}+\sqrt[4]{\frac{A^2+G^2}{2}AG}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{A_2(R_2,p_2)}+\sqrt{G_2(R_2,p_2)}\right]^2$$

cu notatiile $\mathbf{G} = \sqrt[8]{1-k^2} = \sqrt[4]{k'} = \sqrt[4]{\sqrt{1-k^2}} = \sqrt{p_1}$ si $\mathbf{A} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+G^4}{2}} = \sqrt{R_1}$

Algoritmul de calcul prezentat in lucrare, ce constituie, totodata, si o transformare geometrica noua, denumita "**centrare**" - pentru ca la N$\rightarrow\infty$ cercul trigonometric excentric, cu excentricitatea numerica k $\neq 0$, se transforma in cercul cu excentricitate numerica nula ($k_N = 0$), deci centric- stabileste transformarile din pas in pas , peste doi, trei sau patru pasi si poate stabili,in continuare, si peste mai multi pasi. De exemplu, relatia anterioara $\mathbf{R_5}$ da dependenta dintre marimile din pasul 5 cu cele obtinute dupa pasul intai, adica peste patru pasi. Se poate obtine $\mathbf{R_9}$ cu o relatie asemanatoare in care $\sqrt{R_5} \to A$ si $\sqrt{p_5} \to G$, dar preciziile astfel obtinute ar depasi cu mult cerintele practice.

1. Introducere

Integralele de forma $\int R(z,w)dz,$ in care R este o **functie rationala** de dou**a** argumente **s**i w^2 = P(z) este un polinom de gradul 3 sau 4, sunt denumite **eliptice.** Oricare integral**a** eliptic**a** poate fi adusa **i**n una din cele trei forme denumite de **speta intaia , speta a doua sau de speta a treia.**

Integralele eliptice <u>reale</u> de speta intai, notata cu ***F***(k, φ) si de speta a doua, notata cu ***E*** (k, φ), sunt integralele definite,in forma normala trigonometrica si, respectiv, forma normala (standard) Legendre de expresiile:

(**1**) $\boldsymbol{F}(\varphi, \mathbf{k}) \equiv \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ = u, de speta intaia si

(**2**) $\boldsymbol{E}(\varphi, \mathbf{k}) \equiv \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$, de speta a doua.

Forma trigonometrica rezulta din cea standard prin schimbarea de variabila

(**3**) x = sin ψ

Parametrul **k**, subunitar in valoare absoluta, este denumit **modulu**l acestor integrale, ca , de altfel, si a functiilor eliptice Jacobi in notatia Gudermann

(**4**) sn (u, k) = sinφ, cn (u, k) = cosφ si dn (u, k) = $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ si reprezinta, totodata, excentricitatea numerica (e ≡ k) a functiilor supermatematice circulare excentrice [1 ,... ,14], iar expresia

(**5**) **k**' = $\sqrt{1-k^2}$ = p se numeste ***<u>modulul complementar</u>*** ,notat in aceasta lucrare si cu p

Pentru limitele superioare ale integralelor reale $\varphi = \pi/2$ si, respectiv, sinφ = 1 se obtin integralele eliptice ***complete*** de speta intaia K (k) (1') sau a doua E (k) .

(**1'**) $\mathbf{F}(\pi/2, \mathrm{k}) \equiv \mathrm{K}(\mathrm{k}) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$

Dezvoltarea in serie de puteri a functiei K(k) este

(**6**) $\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1+(\frac{1}{2})^2k^2+(\frac{1.3}{2.4})^2k^4+(\frac{1.3.5.}{2.4.6.})^2k^6+...+[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2k^{2n}+...\right\} = \frac{\pi}{2}\boldsymbol{F}(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2)$

si prezinta o convergenta foarte slaba pentru $|k|$ < 1. $n a doua expresie ***F***($\alpha,\beta;\gamma;z$ **)** este functia sau seria hipergeometrica, cu notatia Gauss, in care ***Re***($\alpha+\beta-\gamma$ **) = 0** seria este convergenta in tot cercul de raza unu (trigonometric- CT), cu exceptia punctului z = k^2 = 1 [21]; punct in care nici relatia de calcul ce va fi dedusa nu este valabila.

In anul 1826 , Adrien Marie Legendre (1752-1833) in "Traite des functions elliptiques et des integrales Euleriennes" care reprezenta sinteza celor 40 de ani de cercetari in teoria integralelor eliptice si euleriene, prezinta tabelele valorilor integralelor F (φ, k) si E (φ, k), date pentru toate valorile unghiului φ din grad in grad si pentru 90 de valori ale lui k , corespunzatoare unghiului

(**7**) β_M = arcsin k , (unghi notat in literatura cu $\alpha \equiv \beta_M$)

tot din grad in grad, deci 16.200 rezultate cu zece zecimale exacte pentru $\varphi \in [0, \pi/4]$ si cu noua zecimale exacte pentru $\varphi \in [\pi/4, \pi/2]$; calculele fiind efectuate de el cu 14 si, respectiv, 12 zecimale exacte [23].

Problemele de calcul numeric privitoare la integralele si functiile eliptice se trateaza mai usor cu functiile **theta-eliptice**[28]. Ele se definesc ca sume de parametrul q al lui Jacobi [20]- pentru $|q| < 1$- De exemplu,

(**8**) $$\vartheta_3 (u) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nu$$ si legatura cu K (k) este

(**9**) $$K (k) = \frac{\pi . \vartheta_3^2}{2} = \frac{\pi / 2}{R_N}$$

La comunicarile lunare ale Academiei din Berlin, in anul 1883, Weierstrass a prezentat posibilitatea sporirii preciziei de calcul a parametrului q prin metoda Landen, oprindu-se la o singura iteratie, dupa care a obtinut , ceea ce, in aceasta lucrare, s-a denumit excentricitatea numerica k_1 dupa primul pas, din transformarea de centrare ce va fi prezentata in continuare. Cu notatiile actuale, din prezenta lucrare, care se refera la raza cercului R_1 si excentricitatea reala e_1, toate dupa un pas al transformarii de centrare, excentricitatea numerica k_1 este

(**10**) $$k_1 = \frac{e_1}{R_1} = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{2q+2q^9+2q^{25}+...}{1+2q^4+2q^{16}+...}$$

si prin inversarea acestei serii (10) s-a obtinut parametrul q, care este seria infinita [22]

(**11**) $$q = \frac{k_1}{2} + 2\left(\frac{k_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{k_1}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{k_1}{2}\right)^{13} + 1701\left(\frac{k_1}{2}\right)^{17} + ...$$

Weierstrass a prevazut posibilitatea sporirii in continuare a preciziei lui q prin continuarea algoritmului de calcul, dar nu a continuat astfel, preferand alte cai.

2. Functia radial excentric rex

Este functia supermatematica (FSM) [v.8 si 9] excentrica definita in lucrare [1] ca functie de variabila la excentru θ si redefinita in lucrarea [2] ca functie adimensionala si multipla cu importante aplicatii [7], [14], precum si in lucrarile [12] si [13] ca functie de variabila la centru α .

Ea este o functie trigonometrica excentrica sau functie circulara excentrica (FCE) elementara ce poate reprezenta ecuatiile tuturor curbelor plane cunoscute si a altora noi, rezultate in urma introducerii in matematica a FSM ; curbe cunoscute sub denumirea de excentrice [3], [4], [5], [6], cu intentia de a le evidentia de cele vechi, denumite, acum, si centrice. In acest mod, fiecarei forme centrice cunoscute ca cerc, elipsa, hiperbola s.a. ii corespund o infinitate de curbe excentrice plane. Situatia este asemanatoare si in spatiile cu mai multe dimensiuni. Posibilitatiile extrem de largi de exprimare ale acestei functii deriva din expresile ei trigonometrice, ce reprezinta , totodata, distanta dintre doua puncte in plan, in coordonate polare: unul situat pe cercul trigonometric (**CT**), de coordonate polare centrice W (α , R=1) sau de cele polare excentrice W(θ, ρ= rex (θ, E))- dupa cum originea O a sistemului de axe de coordonate se alege in centrul cercului CT sau in excentrul E- si, al doilea, denumit excentru, de coordonate polare E (ε , e = k), in planul cercului. Daca FCE sunt definite pe cercuri de raze R $\neq$ 1, punctele se vor nota cu M_i, iar pe CT cu W_i .

Cele doua expresii algebrice (trigonometrice) ale functiei rex , fiecare cu cate doua determinari (1-principala, corespunzatoare semnului + din fata radicalului si a 2-a secundara) sunt

(12) $\mathrm{rex}_{1,2}\,\theta = R\,[-e.\cos(\theta-\varepsilon) \pm \sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,]$,in functie de variabila excentrica θ si

(12') $\mathrm{rex}_{1,2}\,\alpha = R\,[\pm\sqrt{1+e^2-2e\cos(\alpha_{1,2}-\varepsilon)}\,]$, in functie de variabila centrica α .

Functia rex are proprietatea de omogenitate de gradul unu deoarece fiind o functie de raza cercului (R = 1 a CT si R_i a unui cerc oarecare) si excentricitatea lui (e = k pe CT si e.R_i pe alte cercuri, dar de aceeasi excentricitate numerica k) -pentru ε= 0 - f (R = 1, e), prin amplificarea variabilelor cu scalarul $R_i > 0$ se obtine

(13) $f (R_i . R, e . R_i) = R_i\, f (R = 1,e)$ asa cum rezulta si din (12) si (12').

In prezenta lucrare se vor folosi numai determinarile principale, renuntandu-se la acesti indici. Indicii ce vor fi sa apara se refera la numarul pasul (i = 1...N) transformarii geometrice de centrare.

Pentru θ= 0, π/2 , π si e = k se obtin valorile reale minima (m) , ponderata (p) si maxima (M) si cele numerice (raportate la raza) k si k' ale lui rex θ. $n faza initiala, pe CT, deoarece raza R = 1 toate valorile reale sunt egale cu cele numerice

(14) m = 1 - e = 1 - k , p = $\sqrt{1-e^2} = \sqrt{m.M} = \sqrt{1-k^2}$ =k' si, respectiv , M = 1 + e = 1 + k

Pentru un cerc de raza oarecare R_i , excentricitate reala e_i , maximul M_i , ponderea p_i si minimul m_i sunt marimi reale si excentricitate numerica k_i ,

(15) $k_i = \dfrac{e_i}{R_i} = \dfrac{M_i - m_i}{2R_i} = \dfrac{M_i - m_i}{M_i + m_i}$, ca si complementara ei

(15') $k'_i = \dfrac{p_i}{R_i} = \dfrac{\sqrt{M_i.m_i}}{M_i + m_i}$ sunt marimi numerice. Marimile reale sunt

(16) $m_i = R_i - e_i = R_i (1 - k_i)$, $p_i = \sqrt{m_i.M_i} = \sqrt{R_i^2 - e_i^2} = R_i \sqrt{1-k_i^2}$, $M_i = R_i + e_i = R_i (1 + k_i)$

Se observa fara dificultate ca M = $\sup\limits_{\theta\in I}$ rexθ si m = $\inf\limits_{\theta\in I}$ rexθ astfel ca rex θ apartine clasei functiilor cu variatie marginita de un numar fix V_Δ = M - m = 2 e si, in consecinta, o astfel de functie este diferenta a doua functii nedescrescatoare si reciproc [24, pag. 19].

3. Exprimarea unor medii cu functia rex θ

Notand cu A^+ media aritmetica (semisuma) a doua numere pozitive, A^- (semidiferenta) sau media aritmetica in care minimum m schimba de semn (m $\rightarrow$ - m) si cu G media lor geometrica

(17) A^+ (m, M) = R= 1, A^- (-m, M) = e = k si G (m, M) = p = k', in momentul initial, pe cercul trigonometric CT de R = 1 si pentru oricare alt cerc de parametrii R_i , e_i si p_i ele sunt

(18) A_i^+ (m_i , M_i) = R_i, A_i^- ($-m_i$, M_i) = e_i , si G_i (m_i ,M_i) = p_i = $\sqrt{m_i M_i}$

O perpendiculara ridicata in excentrul E (e, ε) $\equiv$ K (k, 0) intersecteaza cercul trigonometric CT in punctul W si

(19) $\|EW\|$ = rex (π/2, e = k) = $\rho(\pi/2, k) = \sqrt{(1-k)(1+k)} = \sqrt{m.M} = \sqrt{1-k^2}$ = k' = p ,

si din punctele K_i intersecteaza CT in punctele W_i pentru care

(19') $\|K_i W_i\|$= rex (π/2, k_i) = $\sqrt{(1-k_i)(1+k_i)} = \sqrt{1-k_i^2}$ = k'_i = p_i / R_i si din excentrele E_i intersecteaza cercurile interioare in punctele M_i pentru care

(20) $\|E_i M_i\|$ = R_i rex (π/2, k_i) = $\sqrt{(R_i - e_i)(R_i + e_i)}$ = $R_i \sqrt{1-k_i^2}$ = $R_i k'_i$ = p_i

p fiind denumita ***pondere*** , sau valoarea medie geometrica ponderata, de pondere 1, a functiei rexθ, deoarece reprezinta media geometrica a valorilor extreme pe care le ia functia radial excentric rexθ.

Marimea obtinuta formand mediile aritmetica si geometrica ale valorilor a doua marimi, apoi formand mediile aritmetica si geometrica ale acestor medii si repetand operatiile pana cand mediile astfel obtinute devin egale, se numeste media aritmetica-geometrica a celor doua valori. In cazul de fata, astfel de medii se pot obtine in doua moduri : alegand drept marimi initiale valorile extreme m si M ale functiei rex θ se pot obtine marimile caracteristice **R** si **e** specifice FSM pe un cerc de raza R=1, sau R_i , pe care le vom denumi medii interne - ca de exemplu (17) si (18)-si mediile de acelasi gen, care permit saltul de pe un cerc pe altul de alta raza, sau de pe o orbita pe alta, facand legatura dintre doua orbite consecutive, denumite medii externe si care sunt (v. Fig.1)

(21) A_1^+(R, p) = (1 + $\sqrt{1-k^2}$)/2 = R_1 si A_1^-(R, -p) = (1- $\sqrt{1-k^2}$)/2 = e_1 , astfel ca

PE 1 : Raza unei orbite este egala cu semisuma razei si a ponderii orbitei exterioare (mai mari) si

PE 2 : Excentricitatea unei orbite este egala cu semidiferenta razei si a ponderii orbitei exterioare

Cele doua medii aritmetice pot fi scrise concentrat astfel

(22) $R_1, e_1 = A_1^{\pm}(R, \pm\ p) = (1 \pm \sqrt{1-k^2})/2$. si dau cele doua marimi principale ale unei orbite circulare, raza si excentricitatea si care servesc la calcularea extremelor orbitei

(23) $m_1, M_1 = (R_1 \mp e_1)$, $\Rightarrow m_1 = \sqrt{1-k^2} = p$ si $M_1 = R = 1$ si a ponderii

(24) $p_1 = G_1(m_1, M_1) = \sqrt{m_1 . M_1} = \sqrt{1.\sqrt{1-k^2}}$ -ca medie interna-dupa primul salt (pas).

Relatiile (21) si (22) dau dependenta dintre marimile de pe orbita initiala (CT : R = 1, e = k si p = k'$=\sqrt{1-k^2}$) si cele de pe orbita urmatoare, de indice 1. Raza si excentricitatea reale ale noii orbite sunt

(25) $R_1 = A_1^+(R, p)$, $e_1 = A_1^-(R, -p)$, astfel ca o alta proprietate a transformarii este

PE 3: suma excentricitatii reale si a razei de pe o orbita oarecare este este egala cu raza orbitei circulare mai mari . Aceasta raza apartine orbitei anterioare la saltul de pe o orbita mai mare pe una mai mica si orbitei urmatoare, la trecerea inversa de la mic la mare. Acestea sunt cele doua transformari posibile : directa sau de impandare spre centru si, respectiv, inversa sau de expandare.

(26) $M_1 = R_1 + e_1 = R = 1$, deoarece $A^+(A^+_1, A^-_1) = A_1^+ + A_1^- = R = 1$, proprietate de seama a FCE, ce se va folosi in continuare. Dar, suma (26) exprima valoarea lui M_1 astfel ca

PE 4 : la trecerea de pe o orbita pe alta, maximum orbitei de raza mai mica este valoric egal cu raza orbitei de raza mai mare. Aceasta este si proprietatea pe orizontala ,sau pe axa x, a transformatei geometrice a FCE rex, la trecerea de la (pe) o orbita la (pe) alta. Pe de alta parte, deoarece

$A^-(A^+_1, A^-_1) = A^+_1 - A^-_1 = p = k'$ rezulta

(27) $m_1 = R_1 - e_1 = p = k'$ si

PE 5 : minimul orbitei de raza mai mica (m_{i+1}) este egal cu ponderea p_i a orbitei de raza mai mare. Deoarece ponderea este dirijata pe directia verticala y ($\theta = \pi/2$) denumim aceasta proprietate ca fiind “ pe verticala “ a transformarii.

Se observa fara dificultate ca

(28) $M_1 - m_1 = 2e_1 = 1 - p = 1 - k' = 1 - \sqrt{1-k^2} = V_{\Delta 1}$ iar noua pondere va rezulta ca

(29) $p_1 = G_1(m_1, M_1) = G_1(p, R) = \sqrt{1.\sqrt{1-k^2}} = \sqrt[4]{1-k^2} = \sqrt{p} = \sqrt{k'}$, astfel ca

$p_1^2 = p$ sau $(R_1 k'_1)^2 = Rk'$ $\sqrt{R_1} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}}$ si $\sqrt{p_1} = \sqrt[8]{1-k^2}$

Valorile functiei rex_i ($\pi/2$) , sau ponderile succesive, cresc in progresie geometrica cu ratie variabila, proprietate care rezulta si din faptul ca $p^2_1 = R^2_1 - e^2_1 = (R_1 - e_1)(R_1 + e_1) = M_1 . m_1 = R\,p = p$, pentru primul pas, deoarece R = 1. Pentru pasii urmatori , tinand cont de (24)

(30) $p_{i+1} = G_{i+1}(m_{i+1}, M_{i+1}) = \sqrt{p_i . R_i}$ si $(R_{i+1} k'_{i+1})^2 = k'_i R_i . R_i = k'_i R_i^2$ din care

(31) $k'_i = [\dfrac{R_{i+1}}{R_i} k'_{i+1}]^2$ sau $\sqrt{k'_i} = \sqrt{1-k_i^2} = \dfrac{p_{i+1}}{R_i}$ si algoritmul trecerii de pe o orbita pe cea urmatoare devine transparent

4. Transformarea geometrica excentrica si transformarea geometrica de centrare

Salturile punctelor de pe o orbita pe alta pot avea loc in doua sensuri. In transformarea directa, rotatiile punctelor W_i pe CT au loc in sens levogin de la W (k)-punctul initial- spre punctul final W_N ($k_N = 0$) si prin care salturile din W in M_i au loc de pe orbita initiala CT (de start sau de plecare de R = 1) pe cele interioare acesteia (de raze mai mici, $R_i < 1$), din punctul W (k), trecand prin punctele M_i (e_i) si pana in punctul final M_N ($e_N = 0$; R_N), prin care excentricitatiile orbitelor scad, in salturi, pana la valoarea $e_N = k_N = 0$ si pe care o denumim, din aceasta cauza, CENTRARE .

Centrarea este o transformare conforma circulara, compusa dintr-o homotetie de ratie

h = R_{i+1}/ R_i combinata cu o rotatie de unghi $\Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ = arcsin(p $_{i+1}$ / R $_{i=1}$) - arcsin (p $_i$ / R $_i$) = arcsin k' $_{i+1}$ - arcsin k' $_i$. = arcsin (k' $_{i=1}$ $\sqrt{1-k'^2_i}$ - k'$_i$ $\sqrt{1-k'^2_{i=1}}$) Multimea centrarilor transfera punctul initial W de pe CT in M $_N$ de pe cercul de raza R $_N$ situat pe axa y pentru $N \to \infty$. Se va nota raza orbitei circulare finale a centrarii cu R_N , care este, evident, o constanta, pe de o parte- fiind raza unui cerc- si variabila, pe de alta parte R (k) , deoarece depinde de excentricitatea e = k (aleasa egala cu modulul integralelor eliptice) si de la care va pleaca transformarea. De aceea,
(32) R_N = R (k) , pentru $N \to \infty$.

Independent de pozitia initiala a lui W pe CT transformatul acestuia dupa primul salt, punctul M $_1$, va fi situat pe o parabola cu focarul in originea O, varful pe axa x in punctul V (½, 0) si trecand prin punctul B (0, 1) $\equiv$ W $_N \big|_{N\to\infty} \subset$ CT. Rezulta ca transformarea de centrare nu modifica pozitia punctului W(k = 0)- care ramane el insusi -si ca urmare R (k = 0) = 1 si K (0) = π/2. Punctul initial A (1, 0) $\equiv$W (k = 1) dupa prima transformare ajunge in V (0,5 ; 0) si prin transformarile urmatoare nu paraseste axa x astfel ca in final ajunge in O (0, 0) ceea ce inseamna ca raza R(k =1) a ultimului cerc al transformarii de centrare va fi nula (R(1) = 0) si K (1) = ∞.

Transformarea in sens invers , de pe CT pe orbite circulare de raze din ce in ce mai mari (R_i > 1), cand si excentricitatea orbitelor va creste de la k la k_N = 1, pentru $N \to \infty$, o denumim, din aceste considerente, transformare geometrica EXCENTRICA.

In ambele transformari, se porneste de pe CT cu e = k, cu valoare diferita de valorile 0 sau 1, discutate anterior, se trece prin excentricitatile reale e_i, valoric diferite de cele numerice k_i , pentru ca, in finalul fiecarei transformari, sa se ajunga din nou la egalizarea acestora la valoarea 0 in cazul transformarii de centrare si la valoarea 1 in cazul transformarii excentrice. In cazul centrarii, cele doua puncte finale W_N si M_N se vor situa pe aceeasi verticala (α_N = π / 2) ; punctul initial W, corespunzator unghiului la centru α = arccos k , suferind exclusiv transformari de rotatie, in salturi, in sens sinistrorum pe CT , prin punctele intermediare W_i (α_i = arccos k $_i$ = arcsin k'$_i$) , pina in cel final W_N(de α_N = π/2). Multimea tuturor rotatiilor fiind de unghi β_M = arcsin k = arccos k'..

Punctele W_N si M_N au acelasi argument α_N = π / 2 dar modulele (razele orbitelor) sunt R = 1 si, respectiv, R $_N$ = R(k).

FCE exprimate pe cercuri de raze $R_i \neq$ 1, i = 1 ... N, au punctele definitorii care au fost note cu M_i si ele sunt transformatele prin homotetie H_i (O, h_i) -de centru de homotetie in originea O si raport de homotetie h_i - ale punctelor W $_i$ de pe CT
(26) h_i = R $_i$ / R = e_i / e , pentru o transformarea de centrare, pe orbita i de raza R_i a punctului M_i , caruia ii corespunde punctul W $_i$ de pe CT cu R = 1. In transformarea de centrare, punctele W_i se rotesc exclusiv, ramin pe CT, in timp ce punctele M $_i$ se rotesc si sunt acelea care sar de pe o orbita pe alta, de raze diferite. Astfel, transformarea din W in M_1 are loc printr-o rotatie $\Re_1(O,\Delta\alpha_1)$ (pe CT din W in W $_1$) urmata de o translatie sau homotetie H_1 (O, h $_1$) din W_1 in M_1 . Toate rotatiile fiind de acelasi centru O, produsul a doua rotatii va fi tot o rotatie, iar multimea rotatiilor formeaza un grup comutativ in raport cu operatia de compunere. Produsul rotatiilor prin care W se transfera in W_N este
(33) $\Re_1 \circ \Re_2 \circ \Re_3 \circ\circ\circ \Re_N$ = $\Re(O,\Delta\alpha_N = \pi/2-\alpha)$ = $\Re$ (O, β_M), pentru $N \to \infty$

Homotetiile fiind de acelasi centru O, multimea lor formeaza un grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Produsul a doua sau mai multe homotetii va fi tot o homotetie
(34) $H_1 \circ H_2 \circ H_3 \circ \circ\circ H_N$ = H (O, h = $\prod h_i$) = H [O, h = R (k)]

Scriind proprietatea (26) a FCE, incepind cu prima orbita si terminand cu ultima, in prima coloana, iar in a doua coloana aceleasi relatii normate sau adimensionale, prin impartirea cu razele R_i

rezulta $e_1 + R_1 = R = 1$, $1 + k_1 = R / R_1 = 1 / R_1$
$e_2 + R_2 = R_1$, $1 + k_2 = R_1 / R_2$
$e_3 + R_3 = R_2$, $1 + k_3 = R_2 / R_3$
(35) $e_4 + R_4 = R_3$, $1 + k_4 = R_3 / R_4$
....
$e_i + R_i = R_{i-1}$, $1 + k_i = R_{i-1} / R_i$
....
$e_N + R_N = R_{N-1}$, $1 + k_N = R_{N-1} / R_N$

Efectuand produsul relatiilor normate ,de pe coloana a doua, se obtine

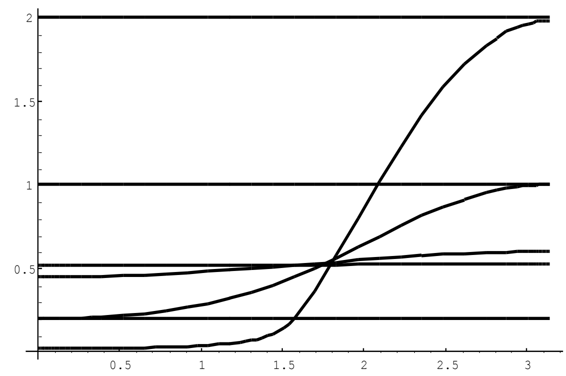

Fig. 1. *Functia REX pe 4 orbite.*

(26) $\prod_{i=1}^{N}(1+k_i) = 1 / R_N$ sau $R_N = 1 / \prod_{i=1}^{N}(1+k_i)$ si pentru $i \to \infty$ rezulta R(k)

(27) $R(k) = 1 / \prod_{i=1}^{\infty}(1+k_i)$ din care ,pe baza relatiei (9) , se obtine una din formele cunoscute [19], [20], [21] ale integralei eliptice complete de speta intaia

(38) $K (k) = \frac{\pi}{2}\prod_{i=1}^{\infty}(1+k_i)$

In aceste relatii pentru i = 1 rezulta $k_0 = k$ si k_i are expresia

(39) $k_i = e_i / R_i = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}}$, asa cum se poate deduce si din relatia (22) .

Din aceasta relatie, pentru un numar mare de pasi, se obtine o expresie algebrica mult prea voluminoasa, ea fiind potrivita in cazul in care se realizeaza un program de calcul pentru calculatoare electronice numerice, deoarece are un algoritm foarte simplu.

$n baza proprietatiilor PE 1 ... PE 4 si tinand cont de (30)

(40) $M_{i+1} = R_i$, $m_{i+1} = p_i$, astfel ca din suma si diferenta acestor relatii se obtine

(41) $2 R_{i+1} = R_i + p_i$, $2 e_{i+1} = R_i - p_i$ si $R_{i+1} = A^+_i = A^+ (R_i , p_i)$

$p_{i+1} = \sqrt{R_i p_i} = G_i = G (R_i , p_i)$, iar pentru un salt dublu, ca de exemplu de pe CT pe a doua orbita (pentru i = 0) sau de pe a doua orbita pe a patra, pentru i = 2 s.a.m.d.

(42) $2 R_{i+2} = R_{i+1} + p_{i+1} = (R_i + p_i) / 2 + \sqrt{p_i R_i}$ sau $4 R_{i+2} = R_i + p_i + 2 \sqrt{R_i p_i}$

$2 e_{i+2} = R_{i+1} - p_{i+1} = (R_i + p_i) / 2 - \sqrt{R_i p_i}$ sau $4 e_{i+2} = R_i + p_i - 2 \sqrt{R_i p_i}$

Din (42) se obtine

(43) $R_{i+2} = \left(\frac{\sqrt{R_i}+\sqrt{p_i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_i^+}+\sqrt{G_i}}{2}\right)^2$ si $e_{i+2} = \left(\frac{\sqrt{R_i}-\sqrt{p_i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_i^+}-\sqrt{G_i}}{2}\right)^2$

(44) $(e, R)_{i+2} = \left(\frac{\sqrt{R_i}\mp\sqrt{p_i}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_i^+}\mp\sqrt{G_i}}{2}\right)^2$ scris concentrat si

(45) $p_{i+2} = \sqrt{R_{i+1}.p_{i+1}} = \sqrt[4]{R_i p_i}\sqrt{\frac{R_i+p_i}{2}} = \sqrt{\frac{R_i+p_i}{2}\sqrt{R_i p_i}} = \sqrt{G_i}\sqrt{A_i^+} = \sqrt{A_i^+.G_i}$

Daca in (44) se face $i \to i + 2 \Rightarrow i + 4$ se obtine

(46) $(e, R)_{i+4} = \left(\frac{\sqrt{R_{i+2}}\mp\sqrt{p_{i+2}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A_{i+2}^+}\mp\sqrt{G_{i+2}}}{2}\right)^2$ iar $p_{i+4} = \sqrt{A_{i+2}^+.G_{i+2}}$

Pentru i = 1 in (44) si respectiv in (45) se obtin radicalii marimilor de pe orbita a 3-a

(47) $\sqrt{R_3} = (\sqrt{A_1^+} + \sqrt{G_1}) / 2 = (\sqrt{R_1} + \sqrt{p_1}) / 2 = (\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} + \sqrt{\sqrt{1-k^2}}) / 2 =$

(48) $\sqrt{p_3} = \sqrt{\frac{R_1+p_1}{2}\sqrt{R_1}\sqrt{p_1}} =$

si pentru i = 1 in (46) rezulta raza celei de a 5-a orbite

(49) $R_5 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{R_3}+\sqrt{p_3}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{A+G}{2}+\sqrt[4]{\frac{A^2+G^2}{2}AG}\right)^2$ astfel ca

(50) $K(k) \cong \frac{\pi}{2R_5}$ in care s-a notat

(49') $G = \sqrt{p_1} = \sqrt[8]{1-k^2}$ si $A = \sqrt{R_1} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+G^4}{2}}$

5. Concluzii

Relatiile (49 si 50) obtinute, a caror grafice sunt prezentate in figura 2 si, respectiv, 3, sunt cu mult mai simple decat alte relatii similare, care nu asigura precizia de minimum 9 zecimale exacte, precizie consta-tata practic prin compararea rezultatelor cu cele din tabele. Din punct de vedere practic, in domeniul ingineriei mecanice, ea poate fi asimilata cu o relatie exacta pentru determinarea frecventei proprii a unor sisteme dinamice neliniare. Ea poate fi memorata, in memoria calculatoarelor, in locul tabelelor de valori ale lui K (k) , avand marele avantaj ca spatiul alocat memorarii este cu mult mai redus.

Transformarea prezentata poate fi considerata si ca o transformare liniara (fuchsiene), dupa H. Poincare, cu punct fix dublu, care este punctul C (-1, 0) de pe CT, denumita transformare parabolica. Privita in acest mod, transformarea se realizeaza prin schimbarea succesiva a centrului ca excentru pentru orbita urmatoare: $O \to E_1$, $O_1 \to E_2$, s.a.m.d. pana cand $O_N \equiv E_N$, pentru $e_N \to 0$. In acest caz, apare o noua proprietate a transformarii

(51) $R_j + \sum_1^j e_j = 1$ din care rezulta la limita $R_N = 1 - \sum_{i=1}^{N} e_i$

De asemenea, este valabila transformarea lui Landen

(52) $(1 + k'_i)(1 + k_{i+1}) = 2$ sau $(1 + \cos\beta_{Mi})(1 + \sin\beta_{Mi+1}) = 2$

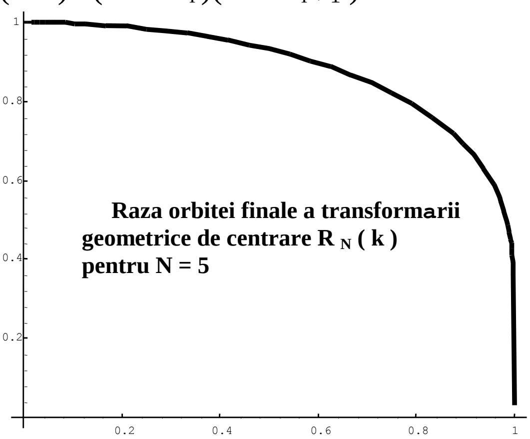

Fig. 2

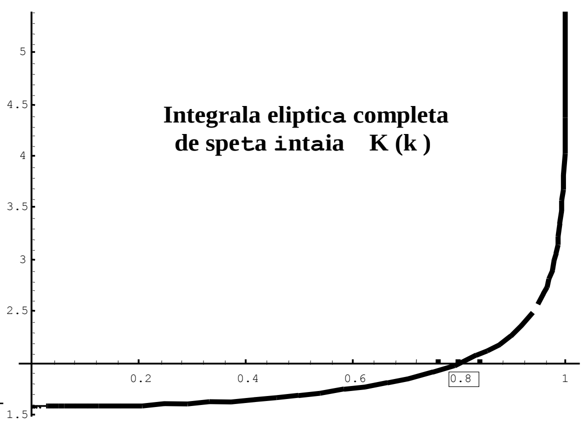

Fig. 3

Se vede din figura 1 ca R_N este valoarea pe care functia rex o ia in punctul ξ. De existenta unui subinterval, denumit interval de contractie, de existenta a acestui punct, din teorema de medie a lui Lagrange, sau din teorema cresterilor finite, s-a ocupat D. Pompeiu, iar exemple importante de functii si intervalele lor de contractie au fost prezentate de Miron Nicolescu. In acest domeniu, studii cu privire la generalizarea notiunii de diferenta divizata a unei functii si proprietatiile de medie ale acestora au fost studiate de Tiberiu Popoviciu.

Un exemplu numeric, pentru un modul foarte mare (k = 0, 98), intentionat ales ca un numar cat mai mare de transformari sa fie distincte, este prezentat in continuare. El corespunde curbelor din figura 1.

ORBITA i	RAZA ORBITEI $R_{1+1} = (R_I + p_i) / 2$	P O N D E R E A		E X C E N T R I C I T A T E A	
		R E A L A .... $p_i = R_i . k'_i$	..........N U M E R I C A	R E A L A .... $e_{i+1} = (R_i - p_i) / 2$...	N U M E R I C A $k_i = e_i / R_i$
0	1	0, 1989974	0, 1989974	0, 98	0, 98
1	0, 59949870	0, 4460898	0, 7441047	0, 4005013	0, 66806030
2	0, 52279420	0, 5171365	0, 9891780	0, 0767044	0, 14672000
3	0, 51996530	0, 5199576	0, 9999852	0, 0028288	0, 00544403
4	0, 51996114	0, 5199614	1	0, 0000038	0, 00000730
N=5	0, 51996140	0, 5199614	1	0	0

6. Bibliografie

[1] Selariu, M. E., FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE, Com.Conf. Vibr.in Constr. de Mas., Timisoara,1978, pag. 101...108.

[2] Selariu, M. E., FUNCTII CIRCULARE EXCENTRICE si EXTENSIA LOR , Bul.[t. si Tehn. al IPTVT, Seria Mecanica, Tom.25 (39), Fasc. 1 - 1980, pag. 189 ...196.

[3] Selariu, M. E., THE DEFINITION OF THE ELLIPTIC ECCENTER WITH FIXED ECCENTER, Com. V-a Conf. Nat. Vibr.in Constr. de Mas.,Timisoara,1985,pag.175...182

[4] Selariu,M. E., ELLIPTIC ECCENTRICS WITH MOBILE ECCENTER, Com. V-a Conf. Nat. Vibr. in Constr. de Mas. ,Timisoara,1985, pag. 183 ... 188 .

[5] Selariu, M. E., CIRCULAR ECCENTRICS and HYPERBOLIC ECCENTRICS , Com. V-a Conf. Vibr. in Constr. de Mas.,Timisoara,1985,pag. 189 ...194.

[6] Selariu, M. E., ECCENTRICS LISSAJOUS FIGURES, Com. V-a Conf. Vibr. in Constr. de Mas., . Timisoara,1985, pag. 195 ... 202.

[7] Selariu, M. E., APLICATII TEHNICE ale FUNCTIILOR CIRCULARE EXCENTRICE,. ' Com. Conf PUPR, Timisoara, 1981, pag. 142 ... 150.

[8] Selariu, M. E., FUNCTIILE SUPERMATEMATICE CEX si SEX SOLUTIILE UNOR SISTEME OSCILANTE NELINIARE, Com. VI-a Conf. Nat. Vibr. in Constr. de Mas.,Timisoara,1993,

[9] Selariu, M. E. SUPERMATEMATICA,. Com.celei de a VII-A Conf. Internat. de Inginerie Manageriala si Tehnologica,Timisoara iunie 1995, Vol.9 MATEMATICA APLICATA,pag.41...64

[10] Selariu M. E. FORMA TRIGONOMETRICA A SUMEI [I A DIFEREN]EI NUMERELOR COMPLEXE, Com.celei de a VII-A Conf. Internat. de Inginerie Manegariala si Tehnologica,Timisoara iunie 1995, Vol.9 MATEMATICA APLICATA,pag.65...72

[11] Selariu M.E. INTEGRALELE UNOR FUNCTII SUPERMATEMATICE,
Ajiduah Cristopher (SUA) Com. Celei de a VII-a Conf.Intern. de Inginerie
Bozantan Emil (SUA) Manageriala si Tehnologica, Timisoara,iunie,1995,
Filipescu Avram Vol 9 :Matematica Aplicata pag. 73...82.

[12] Selariu M. E. MISCAREA CIRCULARA EXCENTRICA, Com.celei de a VII-A Conf. Internat. de Inginerie Manageriala si Tehnologica,Timisoara iunie 1995, Vol.7 :MECATRONICA, DISPOZITIVE si ROBOTI INDUSTRIALI, pag. 85...102.

[13] Selariu M.,E., ANALIZA CALITATII MISCARILOR PROGRAMATE
Fritz Georg (GERM) CU FUNCTII SUPERMATEMATICE, Com.celei de a VII-A
Meszaros A.(GERM) Conf. Internat. de Inginerie Manageriala si Tehnologica, Timisoara, iunie 1995, Vol.7 :MECATRONICA, DISPOZITIVE si ROBOTI INDUSTRIALI, pag. 163...184.

[14] Selariu, M.,E., RIGIDITATEA DINAMICA EXPRIMATA CU FUNCTII SUPERMATEMATICE, Com.celei de a VII-A Conf. Internat. de Inginerie Manageriala si Tehnologica,Timisoara iunie 1995, Vol.7 :MECATRONICA, DISPOZITIVE si ROBOTI INDUSTRIALI, pag.185...194.

[15] Staicu, Fl.,[elariu,M., EXPRIMAREA CICLOIDELOR CU FUNCTIA REX, idem , pag. 195 .... 204.

[16] Dragomir, L. , (Hamilton,Canada) UTILIZAREA FUNCTIILOR SUPER MATEMATICE IN CAD/CAM:SM-CAD/CAM Nota I : SM - CAD / CAM in 2D. Com.celei de a VII-A Conf. Internat. de Inginerie Manageriala si Tehnologica,Timisoara iunie 1995, Vol.9:MATEMATICA APLICATA, pag. 83 ... 90

[17] Selariu, Serban UTILIZAREA FUNCTIILOR SUPERMATEMATICE IN CAD/CAM. SM-CAD/CAM Nota II : SM - CAD / CAM in 3D., Com.celei de a VII-A Conf. Internat. de Inginerie Manageriala si Tehnologica,Timisoara iunie 1995 Vol.9:MATEMATICA APLICATA, pag. 91...96.

[18] Petrisor, Emilia. , ON THE DYNAMICS OF THE DEFORMED STANDARD MAP, WORKSHOP DYNAMICS DAYS'94, Budapest,June,15-18,

[19] Janke-Emde-Losch, TAFELN HOHERER FUNCTIONEN, Sechste Auflage, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.

[20] Abramowitz Milton Stegun A. Irene HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS. WITH FORMULAS, GRAPHS AND MATHEMATICAL TABLES, National Bureau of Standards Applied M Series 55, Issued June 1964

[21] Rijic.I.M., Gradstein I. M. TABELE de INTEGRALE, SUME, SERII si PRODUSE, Ed.Tehnica, Buc., 1955.

[22] Weber H., ELLIPTISCHE FUNCTIONEN und ALGEBRISCHE ZAHLEN. ACADEMISCHE VORLESUNGEN, Ed. Fridrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1891

[23] Krilov A. N LECTII de CALCULE prin APROXIMATII, Ed. Tehnica, Buc., 1957

[24] Badescu R., Maican C-tin. INTEGRALE UTILIZATE in MECANICA, FIZICA, TEHNICA si CALCULUL LOR, Ed. Tehnica, buc., 1968

[25] Schoenberg J. Isaac. PRIVELI[TI MATEMATICE. Centrul de Cercetari Matematice Universitatea din Wisconsins-Madison, Trad. In l. romana de A. Haimovici, Ed. Tehnica, Buc., 1989

[26] Hort W., DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DES INGENIEURS, Ed. Springer, Berlin,1914.

[27] Stoilow S. TEORIA FUNCTIILOR de o VARIABILA COMPLEXA.,Ed. De Stat Did. Si Ped.,Buc.1962

[28] Mumford David TATA LECTURES ON THETA I, II. PROGRESS IN MATHEMATICS , Vol. 28, 43, With the colaboration of C.Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura, Ed. Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart 1983, 1984, (Trad. In l. Rusa.)

[29] Popoviciu Elena TEOREME DE MEDIE DIN ANALIZA MATEMATICA si LEGATURA LOR CU TEORIA INTERPOLARII. Ed. Dacia, Cluj, 1972