Геометрия жестко вращающегося пылевидного диска в Специальной Теории Относительности

А. Розенкевич[1]

Adam Street, Building 3, Apartment 4, Jerusalem, Israel

Дан математический вывод геометрии жестко вращающегося пылевидного диска с учетом СТО. На основе полученной формулы удалось построить вращающиеся фигуры диска, сферы и тора.

В 1909 году Эренфест предложил мысленный эксперимент, в котором диск вращался с релятивистской скоростью. Он показал, что такой диск не может быть абсолютно жестким по Борну [1]. Несмотря на более чем столетний юбилей поставленной задачи в литературе нет расчетов формы такого диска [1-5].

Рассмотрим пылевидный диск, вращающейся относительно начала координат (**x=0, y=0, z=0**) вокруг оси **z** с угловым ускорением **- w.** Скорость каждого элемента окружности диска направлена по касательной, следовательно, относительно неподвижного наблюдателя, находящегося в начале координат, периметр окружности должен испытывать сокращение, расстояние же от начала координат до элемента окружности останется постоянным. В результате, для неподвижного наблюдателя диск должен изменить форму, деформироваться (рис.1).

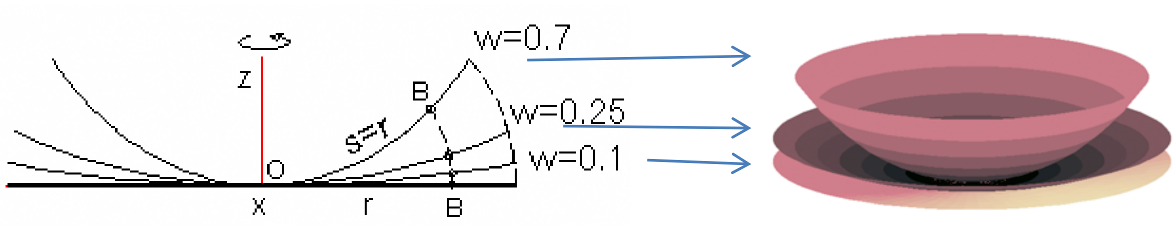

Рис. 1. При вращении диска с любой угловой скоростью W длина кривой OB остается постоянной, OB=s=r.

---

[1] Email: alexroz2008@gmail.com, alexroz2004@hotmail.com

В виду симметрии достаточно рассмотреть изменение формы диска в плоскости **X, Z** (рис.1). Любая точка (B) находящаяся на расстоянии - x_B от центра вращения движется с линейной скоростью - $v = wx_B$, и описывает относительно покоящегося наблюдателя в центре вращения с координатами (**x=0, y=0**) окружность с периметром:

$$P(x) = 2\pi x_B \tag{1}$$

Если расстояние до рассматриваемой точки в состоянии покоя равно x_B, то при вращении диска относительно неподвижного наблюдателя, должно выполняться условие:

$$P(x) = P(x_B)\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Отсюда, учитывая (1) ,следует:

$$x = x_B\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

или (**c=1**):

$$x = x_B\sqrt{1 - w^2x^2}$$

Следовательно, изменения координаты **x** рассматриваемой точки “B” при вращении диска будет равно:

$$x = x_B/\sqrt{1 + w^2{x_B}^2} \tag{2}$$

Здесь:

x_B - расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки на диске в состоянии покоя;

x - расстояние от оси вращения до той же точки на диске при его вращении относительно неподвижного наблюдателя, находящегося в центре диска;

w- угловая скорость вращения диска.

Введем параметр **r** для описания кривой, соединяющей начало координат с любой точкой окружности на диске. Численно **r** равен длине кривой, причем длина кривой не изменяется при вращении диска. Из (2) для точки **B** имеем:

$$x = \frac{r_B}{\sqrt{1+w^2 r_B^2}} \tag{3}$$

Теперь необходимо найти зависимость изменения положения точки на оси **Z** вращающейся окружности в зависимости от **- x(r)** .

Дифференциал длины дуги кривой **f(x(r))** равен:

$$ds = \sqrt{(dx/dr)^2 + (dz/dr)^2}dr$$

Но **ds = dr** , следовательно,

$$(dx/dr)^2 + (dz/dr)^2 = 1 \tag{4}$$

Имеем,

$$z = \int \sqrt{1-(dx/dr)^2}dr \tag{5}$$

Находим из (3)

$$dx/dr = 1/(1+w^2r^2)^{3/2} \tag{6}$$

Тогда

$$z = \int \sqrt{1-1/(1+w^2r^2)^3}\, dr \tag{7}$$

Из уравнения (3) для любой точки диска имеем:

$$r = x/\sqrt{1 - w^2x^2} \qquad (8)$$

и

$$dr = 1/(1 - w^2x^2)^{3/2}\, dx \qquad (9)$$

После подстановки (8) и (9) в (7), и отбрасывая малые величины выше четвертого порядка, получаем:

$$z = \sqrt{3}\int \frac{wx}{1-w^2x^2}\, dx \qquad (10)$$

Решение интеграла имеет вид:

$$\boldsymbol{z = -\frac{\sqrt{3}}{2w}\ \ln(1 - x^2w^2)} \qquad (11)$$

$$(0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{R}/\sqrt{1 + \mathrm{w}^2\mathrm{R}^2})$$

Уравнение (11) показывает, что вращающийся диск «сворачивается в чашу» (рис.1). Вращение сферы приводит также к изменению ее формы (рис.2), а вращение тора (рис.3) помимо деформации «поднимает» тор над поверхностью.

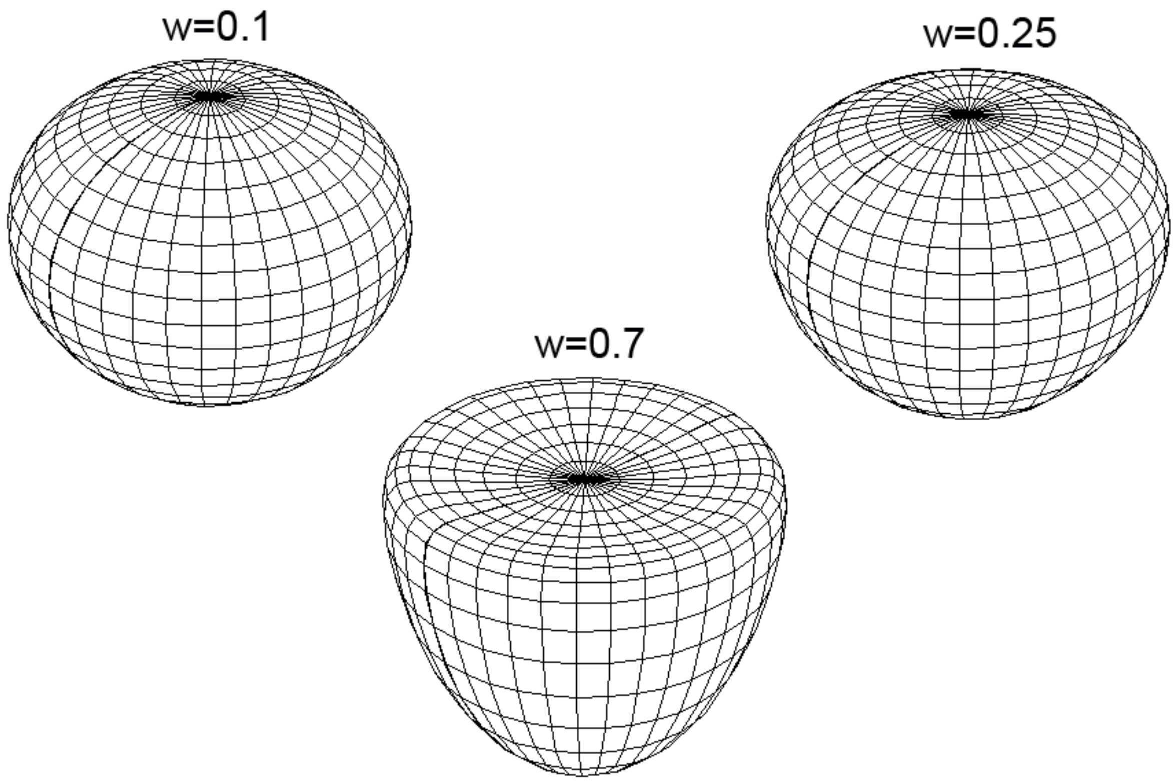

Рис. 2 . Вращение сферы с угловой скоростью w=0.1, w=0.25 и w=0.7 изменяет форму сферы.

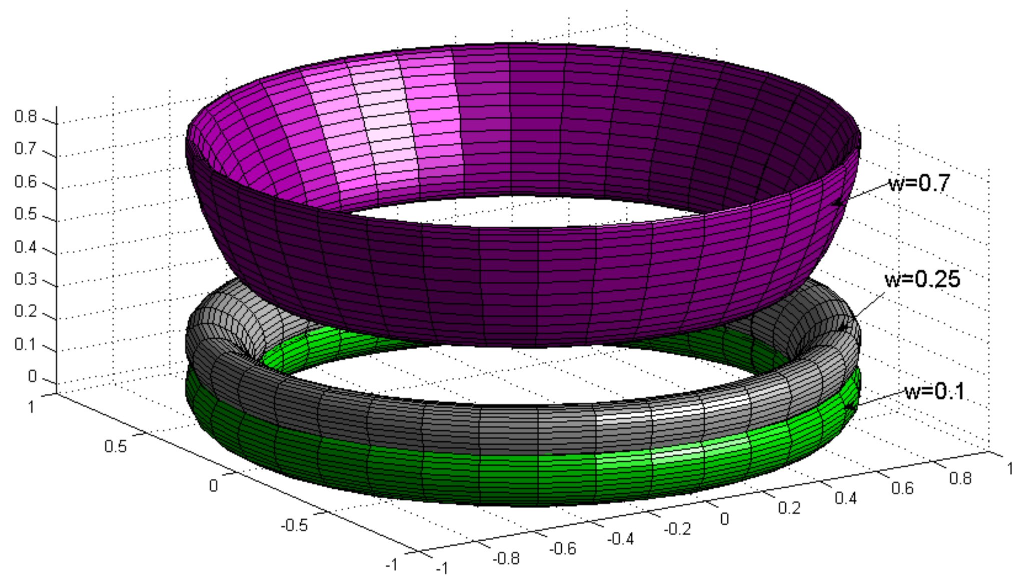

Рис.3. Вращение тора увеличивает его высоту и «приподнимает» над поверхностью.

Список литературы

[1] Ehrenfest, P. (1909). "Uniform Rotation of Rigid Bodies and the Theory of elativity". Phys. Zeitschrift 10: 918.

[2] Einstein, A. (1911). "Zum Ehrenfesten Paradoxon". Phys. Zeitschrift 12: 509

[3] Grøn, Ø. (1975). "Relativistic description of a rotating disk". Amer. J. Phys. 43: 869–876. Bibcode 1975AmJPh..43..869G. doi:10.1119/1.9969.

[4] Nikolic, Hrvoje (2000). "Relativistic contraction and related effects in noninertial frames". Phys. Rev. A 61: 032109. arXiv:gr-qc/9904078. Bibcode 2000PhRvA..61c2109N.\

[5] Rizzi, G. ; & Ruggiero, M. L. (2004). Relativity in Rotating Frames. Dordrecht: Kluwer. ISBN 1-4020-1805-3. This book contains a comprehensive historical survey by Øyvind Grøn, on which the "brief history" in this article is based, and some other papers on the Ehrenfest paradox and related controversies. Hundreds of additional references may be found in this book, particularly the paper by Grøn.