

**Author name**

Giuliano Bettini

**Title**

Clifford algebra, 3- and 4-dimensional analytic functions with applications. Manuscripts of the last century.

**Abstract**

The greatest revolution in the number from the days of Pythagoras.

The similarity between quantum mechanics and electromagnetism.

Are we a three-dimensional television show?

These and other fascinating topics are addressed by the author in this paper at once popular and mathematical, which leads us to a world still largely unexplored.

Are we facing with what is (up to now) the true language of Physics?

“Clifford's algebra — he called it 'geometric algebra' — is now well recognized as the natural algebra for describing physics in 3-space, but it hasn't yet caught on in engineering, or even in standard treatments of electricity and magnetism or fluid dynamics, where vector analysis with its ugly cross product still holds sway” (Mark Buchanan, *Nature Physics* 7, 442, 2011).

But can physics laws be derived from Clifford algebra and analytic functions? And why?

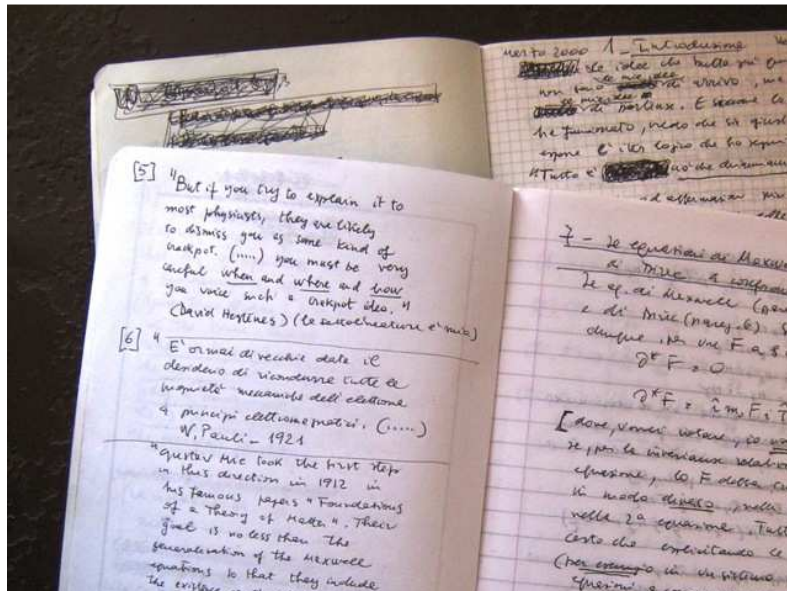
From simple postulates of geometrical nature (or, I mean, which simply precisely define our language) it seems that we arrive at equations of relativistic dynamics, electromagnetism, fluid dynamics and quantum mechanics.

Issues covered more or less in depth in this paper are: numbers and algebra, the analysis and the  $\partial^*$  operator, analytic functions in 3 and 4 dimensions, Maxwell's and Dirac equations, analytic functions in circular waveguides, analytic functions in four dimensions, i.e. spherical cavity, Physical Optics and heuristic derivation of the Hydrogen spectral lines.

Many disciplines are then influenced by this approach in a way that the paper often only suggests, so as it suggests several areas of future development.

I mulled over these topics for more than 40 years, and I then summarized in an unpublished manuscript dated March 2000, which is almost entirely reported here in his complete, also if naïve, form.

# MANOSCRITTI DI FINE SECOLO



*La più grande rivoluzione del numero dai tempi di Pitagora.*

*Le analogie fra la meccanica quantistica e l'elettromagnetismo.*

*Siamo uno spettacolo televisivo tridimensionale?*

*Questi ed altri affascinanti temi sono affrontati dall'Autore in questa opera divulgativa e ad un tempo matematica, che ci conduce in un mondo ancora in parte inesplorato.*

## MANOSCRITTI DI FINE SECOLO

Questa pubblicazione propone alcuni miei lavori, risultato di studi condotti a partire dagli anni '70 – '80, e riassunti a suo tempo in un manoscritto datato Marzo 2000.

Il manoscritto del Marzo 2000 è qui riprodotto integralmente, comprese le sottolineature, le note a fondo pagina eccetera.

Ho preferito questa soluzione, lasciando quindi anche errori, inesattezze e palesi ingenuità contenute nel manoscritto, allo scopo di mantenere la spontaneità dello scritto originale.

Mi sono solo permesso alcuni “minor changes”:

- non ricopiare alcune pesanti parti matematiche, ma confinarle in apposite Appendici, per non appesantire il testo;
- aggiungere qualche nota attuale, riportandola però a fondo pagina con la scritta n.d.r.

Giuliano Bettini

Agosto 2011

## **Prefazione**

La più grande rivoluzione del numero dai tempi di Pitagora.

Le analogie fra la meccanica quantistica e l'elettromagnetismo.

Siamo uno spettacolo televisivo tridimensionale?

Questi ed altri affascinanti temi sono affrontati dall'Autore in questa opera divulgativa e ad un tempo matematica, che ci conduce in un mondo ancora in parte inesplorato [1].

Giuliano Bettini  
Marzo 2000

## 1 – Introduzione

Le idee che butto giù qui spesso non sono le mie idee di arrivo, ma sono state le mie idee di partenza. E siccome la cosa ha funzionato, credo che sia giusto talvolta esporre l'iter logico che ho seguito.

“Tutto è ciò che chiamiamo campo elettromagnetico”.

Passando ad affermazioni più concrete il testo tratta delle cose che nel seguito tento di descrivere. Essenzialmente, partendo dalla fine, io ritengo che molte, o tutte, le equazioni veramente fondamentali della fisica si riducano alla condizione di analiticità: quella che conosciamo, sul piano, estesa a 4 dimensioni. Ma non è tutto. Forse la cosa più vistosa è la successiva: io ritengo che la sopradetta condizione di analiticità abbia una validità assolutamente generale perché non afferma ... niente. O, per meglio dire, afferma una cosa “di per sé vera”, e pertanto è valida sempre. Precisa il nostro linguaggio.

Che cosa è la cosa, “di per sé vera”, che afferma la condizione di analiticità, per cui è sempre vera, e quindi diventa una legge fondamentale?

Il contenuto dal punto di vista epistemologico (\*) della condizione di analiticità, è:

“ora descriverò le cose con una funzione dello spazio e del tempo; e non sto scherzando”.

Ci si accorge che si possono ricavare le equazioni .... dei fluidi, o altre .... di elettricità, con la affermazione di prima; o “leggi” .... varie. Perché?

La frase “e non sto scherzando” è la frase di fondo: se parto da un'unica premessa logica, cioè che le grandezze che userò sono funzioni dello spazio e del tempo, ma sul serio, non per finta ... il risultato sono le equazioni di Maxwell, o anche le equazioni dei fluidi, come dicevo prima, o anche ... eccetera eccetera eccetera.

Per essere più chiari, risulta una unica equazione, generale, che ha via via vari sottocasi, giù giù, fino alle ordinarie equazioni analitiche sul piano.

Questa equazione generale, che è niente altro che la condizione di analiticità che dicevo prima, riguarda funzioni a otto componenti; quando si arriva al caso del piano le componenti si riducono a due, così come due sono le coordinate sul piano. Ma, giusto per fare un esempio, le coordinate possono essere anche una di spazio e una di tempo o due di spazio e una di tempo, eccetera.

Passiamo ad altro.

La gestione matematica (come dice Hestenes “to put ideas in a mathematical form”) di queste cose porta a lavorare dunque con le coordinate di spazio e di tempo.

Siamo oggi abituati a considerare la costanza della velocità della luce come un fatto fisico assodato. Vale a dire: l'accettare oggi una geometria in cui fra l'altro risulti il “modulo al quadrato eguale a zero” del vettore luce non spaventa più. È parte dell'esperienza comune. In questo modulo al quadrato, come si sa, compare il quadrato del tempo con il segno meno.

Questo segno meno è gestito con la introduzione di un immaginario.

Orbene, in parole povere, se si identificano gli assi spaziali e il tempo con dei vettori unitari (versori) il risultato finale è il seguente: nasce una matematica fra numeri “immaginari” a otto componenti, che sono giustappunto quei certi tipi di numeri che risultano del tutto adatti a gestire le otto componenti che dicevo prima. Alcuni, non commutativi.

Ma, anche qui, c'è di più.

Da Hamilton in poi, per passare a Dirac, fino ad arrivare a Cambridge, “queste cose sono state riscoperte più e più volte” per dirla con Hestenes. Io ritengo che ci sia un problema di fondo: in una matematica così complicata, è fondamentale trovare il linguaggio adatto. Intendo che esisteranno varie formulazioni del linguaggio, ma solo quella “giusta” darà le cose semplici.

---

(\*)

In ogni buon scritto di fisica bisogna usare almeno una volta la parola “epistemologico” e dire almeno una volta “dal punto di vista euristico”.

Il problema è ovvio perché siamo noi, uomini, col nostro linguaggio, che descriviamo, che raccontiamo. Se il linguaggio è, oltre che coerente, anche buono, vengono le cose semplici. Io descriverò il linguaggio buono che a me è riuscito di trovare.

Vedo chiaramente che è simile, o forse uguale, ad altre formulazioni che vedo in giro per Internet, ma resto nel mio linguaggio per diverse buone ragioni.

Sono ragioni di tipo diverso, che brevemente ritengo però utile esporre.

Una, è che ci sono abituato.

Un'altra ragione è che .... è una formulazione adatta ai periti. Preferisco rimanere in una formulazione familiare (per quanto possibile) anche per i periti, che non convertire il tutto in spinori, quaternioni, strani spazi, "octonions" eccetera.

Fin qui, ciò che ho detto equivale ad avere descritto la gestione matematica di una cosa, che potremmo chiamare un 'algebra.

Ma, oltre che l'algebra, con questi numeri si gestisce, ancora meglio, la analisi matematica (ovvero .. la condizione di analiticità).

C'è di più.

La visualizzazione geometrica di un "coso" a otto componenti e la sua comprensione intuitiva (che io do per scontato debba esistere, altrimenti il linguaggio non è quello buono) non sono immediate. Io non sapevo, ne so, se questa visualizzazione potesse esistere. Tuttavia tempo fa mi son detto: se esiste un campo applicativo in cui il significato di questi enti può essere capito, dev'essere una situazione in cui già esistono entità geometriche di questo tipo aventi significato fisico.

E questo campo è l'elettromagnetismo.

Vorrei essere chiaro su questo punto. Ripeto. Se vogliamo impadronirci del senso di simboli strani, non usuali, semplici ma che potenzialmente possono diventare complicati; se vogliamo visualizzarli; se vogliamo essere certi di avere trovato la simbologia giusta, se .... eccetera ... , dobbiamo trovare un campo di applicazione noto. Che vediamo. L'unico campo di applicazione che ("stranamente") già c'è è l'elettromagnetismo.

Cosa intendo?

Nell'elettromagnetismo abbiamo già sei componenti, tre elettriche e tre magnetiche. Applicando i numeri a otto componenti alle sei componenti dell'elettromagnetismo il risultato è il seguente: si trovano cose giuste, cose chiare. In più, si trova che le altre due componenti possono giustificare la carica e, dico io, le particelle elementari.

Veniamo quindi, infine, ad un altro argomento che descrivo, che è relativo, fra le altre cose, alle equazioni di Dirac. La affermazione che "tutto è campo elettromagnetico" comporta, fra le altre cose, giustificare e descrivere in termini di campo elettromagnetico la carica, la massa, ..... e non ultimo, l'elettrone.

Dico subito che io non ci sono riuscito (\*). Tuttavia ho delle idee; le quali non possono, fra l'altro, che passare per una reinterpretazione della meccanica quantistica.

Per essere molto breve e sintetico le equazioni di Dirac, dico, dovrebbero in realtà ridursi alle equazioni di Maxwell, e di converso il campo elettromagnetico dovrebbe mostrarsi adatto a descrivere le particelle dotate di carica e di massa; e la meccanica quantistica dovrebbe ridursi a quella cosa che si chiama "teoria dei segnali casuali", ossia dei segnali per i quali non è nota la fase, e se ne studia solo lo spettro  $\Psi\Psi^*$ . Ebbene? Ebbene per tutto ciò nel testo io ho vari risultati che ritengo in questa direzione. E quindi esporrò questi risultati.

Ciò verrà fatto soprattutto negli ultimi capitoli evidenziando via via i punti fermi ai quali sono arrivato. Essi sono i seguenti. La equazione di Dirac può essere fatta coincidere con le equazioni di Maxwell. Le otto componenti (due spinori a quattro componenti) della funzione d'onda di Dirac possono essere fatte coincidere con le componenti del campo di Maxwell, assumendo così un significato. Si può peraltro fare un esercizio duale e chiedersi: che cosa sarebbe successo se invece

---

(\*)

Vecchio sogno di molti fisici, poi escluso.

avessi voluto rappresentare i segnali radar in guida d'onda con una "equazione di Dirac"?

Il risultato è che i pacchetti d'onde radar possono effettivamente essere descritti con una equazione di Dirac, o di Klein Gordon, dotati di massa, ed obbedienti alle equazioni della meccanica. È questo uno dei risultati che ritengo più significativo, anche se peraltro ovvio.

Esistono via via tutta una serie di risultati accessori, che io non ritengo avvengano per caso, ma proprio perché stiamo gestendo e descrivendo la stessa realtà di fondo.

Un critico potrebbe definirle senz'altro delle semplici analogie, non posso resistere dal citare la massima, credo cinese, o indiana. "quando il saggio indica la luna, lo stolto vede il dito".

È certamente importante che il lavoro vada approfondito. Stranamente tutto il mondo elettromagnetico sembra disinteressarsene. Ma è importante, ed è importante per l'elettromagnetismo e forse ancor di più per le particelle elementari. Se le particelle hanno veramente una base elettromagnetica io penso che solo buoni elettromagnetici possano cavarci le gambe. Occorre una buona base di conoscenze sulle guide d'onda, le cavità, i modi in guida, la polarizzazione, i segnali complessi, la teoria dei segnali, e anche, direi, la teoria dei circuiti (perché la equazione di Dirac può essere anche rappresentata con una introduzione, nelle equazioni di Maxwell, di capacità e induttanze locali. Questo è un altro risultato interessante che mi riservo di esporre).

A conclusione vorrei riassumere le idee di fondo, che sono due, anzi tre, di cui una non mi interessa di per sé.

La prima è la riformulazione dell'elettromagnetismo e dello studio dei fluidi etc. etc. con l'algebra di Clifford, che potrebbe anche portare a nuove idee o a nuova comprensione.

Questa non mi interessa di per sé; anche se studi in proposito, in USA, se esistessero e fossero portatori di risultati, ad esempio fasci per impieghi militari, sarebbero segreti.

Le altre due idee invece sono le seguenti.

La prima riguarda la possibilità che effettivamente "le cose stiano così, perché non stiamo affermando niente". Ripeto che un buon linguaggio, veramente universale, e leggi veramente universali, avrebbero buona probabilità di esser tali se fossero "di per sé vere".

Mi sembra che le cose stiano proprio così.

La seconda idea è più filosofica.

Io mi sono fatto la convinzione, dalle Upanisad per arrivare a Schroedinger e, forse, Hestenes, che molti abbiano pensato ad una vibrazione universale [2]. Anche oggi, su Internet, legioni di persone ne parlano, in modo più o meno esplicito. Fra questi, alcuni probabilmente pensano al campo elettromagnetico.

Naturalmente il problema è, ammesso che sia vero, di dimostrarlo. Il problema è trovare formule. E trovare persone che ci lavorano, che siano scienziati e non mistici. Inoltre va considerato attentamente l'impatto conseguente, per il quale credo molte persone serie che anche ne fossero convinte temono di perdere la faccia (\*).

Se si riuscisse per caso a dimostrare le basi elettromagnetiche delle particelle elementari, praticamente l'umanità sarebbe ad una svolta. Tutte le affermazioni, dalle Upanisad in poi, che "tutto è Uno", e cose simili, diventerebbero ... un fatto. Si potrebbe ragionevolmente ipotizzare la modulazione di segnali tale ... da ottenere materia. Tutti noi diventeremmo un gigantesco spettacolo televisivo tridimensionale, con qualcuno che ha in mano il telecomando. Non riesco nemmeno a pensare l'impatto sulle religioni. Tutte le basi filosofiche della cosiddetta "logica quantistica" andrebbero a carte quarantotto. La filosofia ripartirebbe da zero..

Per queste ragioni, io credo, Schroedinger ha fatto delle affermazioni in proposito, ma molto timide, e quelle poche sono bastate perché fosse messo da parte e sbeffeggiato. Tuttavia, sempre come diceva in analogia occasione Schroedinger "bisogna pure che qualcuno abbia il coraggio di lavorarci, a costo di farsi ridere dietro". Io credo che un lavoro in questa direzione, su queste ipotesi

---

(\*)

Anche perché esistono, come è noto, varie "dimostrazioni" e ragioni per cui ciò non è possibile.

di lavoro, vada fatto. In ogni caso, sicuramente, si approfondirebbe l'uso di uno strumento matematico nuovo che si sta dimostrando, in tutto il mondo (\*), estremamente adatto a riformulare la fisica matematica e che, io credo, dovrebbe essere preso in pugno dagli elettromagnetici per poter essere capito a fondo in combutta con i matematici. Altrimenti, questi ultimi vanno per conto loro. (Esistono anche possibili applicazioni, per es. nello studio dei fluidi; che tuttavia non so apprezzare a fondo).

Una delle cose poi che ritengo fondamentale e che ho cercato di evidenziare nel testo, è che non bisogna partire dalle basi dell'algebra di Clifford e delle funzioni analitiche già di per sé complicate in quanto nuove, per andare all'insù (algebra di Lie, simmetria SU(4), "spin groups" etc.) ma venire all'ingiù, cioè capire i significati nei casi semplici.

Quello che so per certo è che, fra non molti anni, tutta la fisica matematica, nonché i campi elettromagnetici, nonché la matematica elementare, si faranno così.

(Non so quale simbologia verrà di moda, come avvenne con Gibbs; si vedrà).

Gli argomenti dei successivi paragrafi o capitoli sono i seguenti:

- 2 – Il numero e l'algebra
- 3 – L'analisi e l'operatore  $\partial^*$
- 4 – Le funzioni analitiche in 3 e 4 dimensioni
- 5 – Le equazioni di Maxwell
- 6 – L'equazione di Dirac
- 7 – Le equazioni di Maxwell e di Dirac a confronto
- 8 – Le guide d'onda
- 9 – Le funzioni analitiche in guida circolare
- 10 – Disegno delle soluzioni "cariche" in guida circolare
- 11 – Soluzioni analitiche in 4D, ovvero cavità sferiche
- 12 – Ottica fisica e derivazione euristica delle righe spettrali dell'atomo
- 13 – Considerazioni sulla costante di struttura fine
- 14 - Conclusione
- 15 – Appendici(\*\*)

---

(\*)

In pochi luoghi in verità. E talvolta ho l'impressione che coloro che lo fanno siano trattati come eretici. In più, non sono esperti di elettromagnetismo.

---

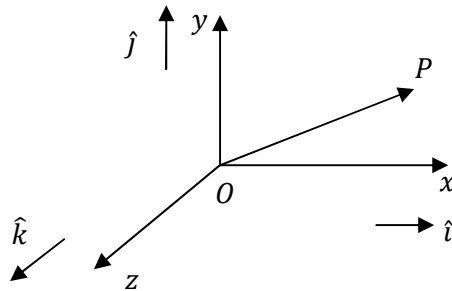
(\*\*)

Ho aggiunto il paragrafo Appendici nella edizione attuale (n.d.r.).



## 1 – Il numero e l'algebra

Partiamo dalla usuale simbologia tridimensionale:



dove  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  sono i versori degli assi. Un punto P è rappresentato da un vettore

$$\overline{OP} = \vec{x}$$

con

$$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Il modulo, cioè la misura di OP, è dato da

$$\overline{OP}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = x^2 + y^2 + z^2$$

Semplifichiamo un po' le cose trattando sia  $x$ , eccetera, che  $\hat{i}$ , eccetera, come fossero numeri qualunque, tralasciando quindi il simbolo  $(\cdot)$  di prodotto interno e  $(\times)$  di prodotto esterno e scrivendo come fossero numeri:

$$\vec{x}\vec{x} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = x^2\hat{i}\hat{i} + xy\hat{i}\hat{j} + etc + yx\hat{j}\hat{i} + y^2\hat{j}\hat{j} + etc$$

e con le regole  $\hat{i}^2 + \hat{j}^2 + \hat{k}^2 = 1$  e con l'altra regola  $\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i}$  eccetera otteniamo per l'appunto:

$$\vec{x}\vec{x} = x^2 + y^2 + z^2$$

Si noti bene, in proposito della regola  $\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i}$ , il suo significato ovvio e la sua particolarità. Da un lato siamo condotti intuitivamente a considerare il prodotto fra  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  come .... un prodotto esterno (l'unico possibile fra  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  che sono a  $90^\circ$  fra loro). E quindi, siamo anche condotti a considerare naturale la regola che essendo come abbiamo sempre detto

$$\hat{i}\hat{j} = \hat{k}$$

sia pure

$$\hat{j}\hat{i} = -\hat{k}$$

ossia per l'appunto come ipotizzato il prodotto sia anticommutativo:

$$\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i}$$

D'altro canto, non scriveremo più assolutamente  $\hat{i}\hat{j} = \hat{k}$ , ma scriveremo che  $\hat{i}\hat{j}$  .... è uguale ... a  $\hat{i}\hat{j}$  e lo lasceremo scritto così (\* vedi Nota finale).

Riassumendo assumiamo come giustificate dall'intuizione nonché dotate di un preciso significato geometrico le regole:

$$\hat{i}^2 + \hat{j}^2 + \hat{k}^2 = 1$$

$$\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i}$$

$$\hat{i}\hat{k} = -\hat{k}\hat{i}$$

$$\hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j}$$

che considereremo regole fra numeri.

E' importante notare questa semplificazione, cioè che non abbiamo alcun bisogno di trattare  $\hat{i}$  eccetera come versori o di distinguere il prodotto interno  $(\cdot)$  o il prodotto esterno  $(\times)$ , bensì li trattiamo come fossero numeri qualsiasi. (La regola conseguente che però siano anticommutativi, è giustificata intuitivamente).

Poiché siamo nell'anno 2000 ed è ormai comune sapere che

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

(relatività) possiamo introdurre il tempo nella forma

$$\tau = ct$$

e un 4° asse “tempo” con un suo versore  $\hat{T}$ . Se assumiamo  $\hat{T}^2 = -1$  e continuiamo anche per  $\hat{T}$  a mantenere la anticommutatività con tutti i simboli

$$\hat{i}\hat{T} = -\hat{T}\hat{i}$$

eccetera, otteniamo in 4 dimensioni un  $\vec{x}$  che si generalizza così:  $\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + \tau\hat{T}$  e:

$$\overline{OP^2} = \vec{x}\vec{x} = x^2 + y^2 + z^2 - \tau^2$$

come si voleva.

Trattandosi di numeri, possiamo moltiplicarli in tutti i modi possibili ed abbiamo:

$$1 / \hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T} / \hat{i}\hat{j} \hat{i}\hat{k} \hat{i}\hat{T} \hat{j}\hat{k} \hat{j}\hat{T} \hat{k}\hat{T} / \hat{i}\hat{j}\hat{k} \hat{i}\hat{j}\hat{T} \hat{j}\hat{k}\hat{T} \hat{i}\hat{k}\hat{T} / \hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$$

1+4+6+4+1= 16 diversi numeri che potremmo dire costituiscono un' algebra ( fatta di scalari vettori bivettori trivettori e quadrivettori). L'algebra è chiusa nel senso che per prodotti vari rimane in sé stessa. Tuttavia esiste un' importante particolarità:

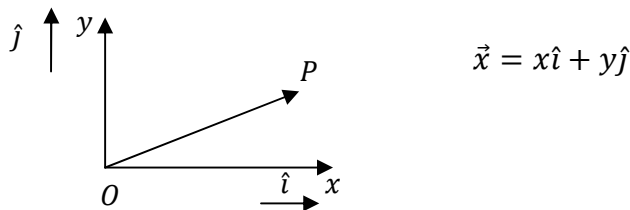
- la sub-algebra pari è chiusa;
- la sub-algebra dispari no.

Ossia se prendiamo solo i numeri della sub-algebra pari (scalare 1, i bivettori e il quadrivettore  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}\hat{T}$ ) otteniamo 8 numeri che costituiscono una sub-algebra che rimane chiusa in sé stessa (pari x pari = pari). Si noti bene che, già da tempo, non stiamo più parlando di regole introdotte ad-hoc, ma solo di conseguenze della ipotesi iniziali intuitive.. Per esempio implicitamente si sanno fare le divisioni, perché una qualunque cosa, esempio  $\hat{i}$ , diviso per qualunque altra, esempio  $\hat{k}$ , (cioè: moltiplicata per l'inverso di  $\hat{k}$ ) è:

$$\hat{i} \frac{1}{\hat{k}} = \hat{i} \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{k}}{\hat{k}} = \hat{i} \frac{\hat{k}}{\hat{k}^2} = \hat{i}\hat{k}$$

In generale, non c'è bisogno di ricordare nessuna particolare metodologia. Basta scrivere. E rispettare la anticommutatività.

Facciamo a questo punto una digressione sul piano prima di introdurre i numeri complessi in 4D. Sul piano definiamo  $z = \hat{i}\vec{x}$ .



$$z = \hat{i}\vec{x} = \hat{i}(x\hat{i} + y\hat{j}) = x + \hat{i}y$$

cioè anche  $\vec{x} = \hat{i}z$

È come se avessimo cercato quel numero  $z$  tale che moltiplicato per  $\hat{i}$  fornisce  $\vec{x}$ . Oppure, se si vuole, è come se avessimo “misurato  $\vec{x}$  rispetto alla grandezza  $\hat{i}$  assunta come unità di misura” (facendo cioè il rapporto fra  $\vec{x}$  e  $\hat{i}$ ).

Non c'è bisogno di nessuna ulteriore regola o simbologia giacché chiamando  $i$  (l'usuale immaginario) il numero o bivettore  $\hat{i}$ , troviamo automaticamente che:

$$z = x + iy \quad i^2 = -1$$

La corrispondenza  $z = \hat{i}\vec{x}$  o  $\vec{x} = \hat{i}z$  è una corrispondenza uno a uno fra i vettori e i “numeri complessi” del piano.

È tuttavia chiarito il significato di  $i = \hat{i}$  che è il “bivettore ortogonale al piano  $xy$ ”. Analogamente per gli altri piani.

Bene. Senza passaggi intermedi possiamo direttamente passare a 4 dimensioni e definire ancora lo stesso tipo di interdipendenza fra

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + \tau\hat{T}$$

e  $\vec{x}$  “riferito all’asse reale 1” cioè:

$$\begin{aligned} z &= \hat{i}\vec{x} \\ z &= 1x + \hat{i}\hat{j}y + \hat{i}\hat{k}z + \hat{i}\hat{T}\tau \\ z &= x + iy + jz + T\tau \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = -1 \\ T^2 &= +1 \\ ij &= -ji \\ iT &= -Ti \end{aligned}$$

eccetera. Come si vede le regole sono: anticommutazione fra tutti gli indici; quadrato -1 fra gli immaginari  $i, j$  etc. e quadrato +1 per l’immaginario  $T$ . Ancora, queste non sono nuove regole, ma puntuale anche se noiosa applicazione delle regole intuitive iniziali.

(Riconosco che a questo punto c’è un po’ di ambiguità nella mia simbologia, causa l’uso di  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  e  $\hat{T}, T$ . Tuttavia, ho preferito fare così per mantenere due usi invalsi:

- uno, l’uso di  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  come versori degli assi  $x y z$ ;
- l’altro, l’uso del simbolo  $i$  come immaginario  $z = x + iy$  che ho dovuto necessariamente estendere agli altri immaginari .... chiamandoli ...  $j$  e  $T$ .

Una ulteriore ambiguità è che talvolta userò  $z$  come “coordinata  $z$ ” e talvolta  $z$  come  $z = x + iy$  o  $z = x + iy + jz$ . Tuttavia tutte queste ambiguità risultano chiarite dal contesto).

Volendo mantenere anche la regola che sul piano  $xy$  dà il modulo  $|a|$  o  $|z|$  e la regola  $|ab| = |a||b|$

$$z^*z = zz^* = x^2 + y^2$$

si constata che il modulo va definito così:

$$(ab)^* = b^*a^* \quad e \quad i^* = -i \quad j^* = -j \quad T^* = -T$$

Questo è tutto.

I simboli  $1 \hat{i}\hat{j} \hat{i}\hat{k} \hat{j}\hat{k}$  (ovvero  $1 i j ji$ ) si osserva che hanno le proprietà corrispondenti ai 4 simboli di Hamilton dei quaternioni. Così pure si possono ritrovare altre corrispondenze che non mi interessano. Ciò che è importante è quanto segue.

Con i simboli reale (1) e immaginari ( $i j T$ ) nasce un ‘algebra a 8 simboli

$$1 i j T \dots ij iT jT ijT$$

che per come è nata constatiamo composta di 1 scalare, 6 bivettori e un quadrivettore; ma anche “numeri”, cioè:

- è un corpo numerico chiuso di numeri (“complessi”)

(complessi, ma estremamente reali, perché il loro significato d’origine è chiarissimo e geometricamente definito: esempio  $i = \hat{i}\hat{j}$  corrisponde al bivettore perpendicolare al piano  $xy$ );

- sono numeri nel senso ordinario del termine ossia “privi di dimensione” ossia “numeri atti a trattare le formule fra grandezze fisiche” in quanto qualunque fosse la eventuale grandezza fisica originaria:

- se già era un numero, tale resta;

- se era un numero con accanto una dimensione fisica esempio  $[lm^{-1}]$  viene rapportata alla unità di misura e diventa un numero;

- se era un vettore, viene rapportata a una unità di misura vettore ( $\hat{i}$  unitario) e diventa .... un numero (complesso);

- se (poco importa se esista no) era un trivettore, rapportata al vettore  $\hat{i}$  unitario ridiventa un numero (complesso).

Insomma le 8 grandezze con indici 1  $i j T..ij iT jT ijT$  sono numeri.

Il numero così definito opera sia sui numeri che sui vettori alterandoli, ruotandoli, girandoli, ... esattamente come fa il numero  $e^{i\varphi}$  sui vettori (o sui numeri ...) del piano.

(Vorrei notare che non sono d'accordo con Hestenes quando interpreta  $\hat{i}$  come un vettore linea,  $\hat{i}\hat{j}$   $\hat{i}\hat{k}$  eccetera come un'area,  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$  eccetera come un volume eccetera. Giusto. Ma meglio lasciare a 1  $\hat{i}\hat{j}$   $\hat{i}\hat{k}$  etc. la peculiarità di numero, che è nato come tale, oppure che tale è diventato per rapporto fra grandezze. Se così non fosse, bisognerebbe, seguendo Hestenes, dire che in:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\varphi + \hat{i}\hat{j}\sin\varphi$$

$\cos\varphi$  è uno scalare e  $i\sin\varphi$  è un'area. Mi sembra corretto rammentare che  $i$  è il "bivettore  $\hat{i}\hat{j}$ , tuttavia in un contesto di fisica matematica, per me non è un'area; è un numero).

Vorrei riassumere. Si può pervenire ad una estensione del numero complesso 2D

$$z = x + iy \quad \text{con} \\ zz^* = x^2 + y^2$$

arrivando a capire che servono "strani" immaginari per avere l'analogo in 4 dimensioni:

$$z = x + iy + jz + T\tau$$

$$z^* = x - iy - jz - T\tau$$

$$zz^* = x^2 + y^2 + z^2 - \tau^2$$

con le regole "strane"  $i^* = -i$  eccetera,  $i^2 = -1$ .....  $T^2 = +1$ ,  $ij = -ji$  eccetera. Comunque le si giri, queste sono le uniche regole atte a fornire questa generalizzazione del numero complesso. Solo dopo una ripartenza dai vettori  $\hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{T}$  si può capire che queste regole ... combaciano, sono congruenti ovvero contemporanee, a quelle intuitive sui vettori  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$  (e  $\hat{T}$ ).

E, come si vedrà fra un po', queste sono le stesse regole che servono per l'operatore di derivata.

(\*)Nota finale

Si dirà: "ma noi sappiamo che  $\hat{i}\hat{j} = \hat{k}$ ". NO! Eravamo astuti ma rozzi.  $\hat{k}$  è  $\hat{k}$ , invece  $\hat{i}\hat{j}$  è  $\hat{i}\hat{j}$ .  $\hat{k}$  è orientato su z come un vettore  $\vec{V}$  (se  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$ , gli assi, cambiano segno, lui cambia),  $\hat{i}\hat{j}$  è orientato su z come un bivettore: una  $\vec{\Omega}$  (se  $\hat{i} \hat{j} \hat{k}$ , gli assi, cambiano segno, lui non cambia).

Esercizi.

Dimostrare che l'indice  $Tji$  commuta con tutti gli altri 7 possibili indici.

1-Verificare che  $(Tji)^* = Tji$ .

2-Dimostrare che  $(ji)^2 = -1$ .

3-Dimostrare che  $(Tji)^2 = -1$ . e  $(Ti)^2 = +1$ .

4-Dimostrare che sono commutativi fra loro 1  $i Tji Tj$ .

5-Dimostrare che sono commutativi fra loro 1  $j Tji Ti$ ; idem 1  $T Tji ij$ .

### 3 – L'analisi e l'operatore $\partial^*$

Potrei partire dalla fine.

L'operatore

$$\partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

gode della proprietà che è:

$$\partial \partial^* = \partial^* \partial = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Questo secondo operatore è l'operatore della "equazione d'onda"  $\partial \partial^* = 0$  (o anche della equazione relativistica di Klein Gordon a cui obbedisce qualunque particella  $\partial \partial^* F = m_0^2 F$ ).

Chi è il primo operatore? Chi è  $\partial^*$ ? Direi che prima di Dirac non lo si conosceva (pur non essendosi accorto Dirac che l'aveva scritto, perché l'aveva scritto con spinori e matrici 4x4). Esso è ad un tempo "la radice quadrata del Laplaciano quadro" per così dire

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

ed è anche nello stesso tempo ... l'operatore di analiticità (o di monogeneità), quello cioè che definisce d'un sol colpo le condizioni di Cauchy Riemann perché si abbia una funzione analitica (\*)

$$\partial^* F = 0$$

Come dico sono partito dalla fine salvo notare ancora che, invece,  $\partial$  è la derivata (o una derivata):

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} - j \frac{\partial}{\partial z} - T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

È opportuno, dopo questa anticipazione sintetica dei risultati finali, ripassare alcuni significati, che ritengo importanti, delle funzioni analitiche sul piano.

Procedo con ordine. Un punto P del piano è caratterizzato (se così si ritiene opportuno) dal numero complesso  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$  che identifica il punto P.

Supponiamo che abbia luogo un fenomeno fisico su un piano, esempio: il flusso di un fluido. (Cose analoghe varrebbero per un campo elettrico piano).

Supponiamo che io dica: bah! tentiamo di vedere se per caso esiste una grandezza (per esempio a due componenti, 1 e  $i$ ) atta a descrivere questo fenomeno fisico sul piano. La descriverò quindi con una  $f$  a due componenti, 1 e  $i$ :

$$f(x, y) = f = u(x, y) + iv(x, y)$$

Posso scrivere:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

oppure con un cambio lineare di variabili da  $x, y$  a  $z, z^*$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial z^*} dz^*$$

(\*)

Cambridge non usa questa simbologia, né Hestenes, ma io preferisco mantenerla per questa semplice ragione, che questa simbologia generalizza in modo ovvio quello che avviene sul piano  $xy$  dove

$$\begin{aligned} \partial^* &= \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \\ \partial &= \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

danno, rispettivamente, le condizioni di Cauchy Riemann e la derivata ( $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \partial$ ) (vedi Nota successiva).

Ora qui sta uno dei passaggi più significativi, io ritengo, di questo discorso. Fare attenzione. Fino ad ora non si sono fatte ipotesi, se non il tentativo di vedere se posso descrivere quel fenomeno, esempio il flusso di un fluido, con una grandezza a due componenti  $u(x, y), v(x, y)$ . Veramente un'ipotesi è stata fatta, cioè che il fenomeno in questione sia descrivibile come funzione del punto P; ma sul serio, aggiungo (come dicevo nella introduzione).

Cioè: “non per scherzo”.

Ossia: il fenomeno in questione, e la relativa funzione  $f$  a due componenti, io, essere umano che mi accingo con un mio “linguaggio matematico” a descrivere il fenomeno, dico che per quanto ne so io la mia descrizione sarà funzione del punto.

Ora: il punto P è univocamente caratterizzato da  $z = x + iy$ . Non ha quindi nessun senso che la funzione  $f$  sia funzione di  $z$  e anche di  $z^*$ . Dunque deve essere  $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$

Dunque, qualunque essa sia quella legge sul piano, deve obbedire a (\*):

$$\partial^* f = 0$$

Queste sono, con questa sola premessa logica :

- le equazioni dei fluidi sul piano [3];
- le equazioni dei campi elettrici sul piano;
- le equazioni dei campi magnetici sul piano

e chi più ne ha più ne metta. Ma sono anche le condizioni di analiticità ... cioè ... d'essere una funzione univoca di punto (devo dire che è impressionante, secondo me, da un punto di vista logico, che imponendo in 4 dimensioni la stessa esigenza ... di usare funzioni univoche di punto ... vengano le equazioni di Maxwell. Vedi dopo. Queste ipotesi minimali sembrano, a me, l'unico contenuto logico che affermiamo scrivendo le equazioni di Maxwell).

Restano soltanto a questo punto da definire alcune regole e un richiamo alle operazioni *grad div rot* (che peraltro risultano a questo punto by-passabili).

La prima è:

la analiticità di  $u + iv$  ha il significato che per il coniugato  $u - iv$  valgono le equazioni  $rot \vec{v} = 0$ ,  $div \vec{v} = 0$  dei fluidi (vedi per esempio Tricomi, “Analisi”) (quindi: trovate le soluzioni di  $\partial^* f = 0$  bisogna passare al coniugato).

La seconda osservazione è:

l'operatore  $\partial^*$  fornisce in un colpo solo tutte le possibili operazioni *grad div rot* e con  $\partial \partial^*$

fornisce il  $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

(\*)Nota

Si possono verificare tutti i passaggi, che già esistono es. in Schaum, anche se con simboli diversi, che danno:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \partial = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \partial^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

#### 4 – Le funzioni analitiche in 3 e 4 dimensioni

Praticamente il sogno di estendere le funzioni analitiche a 3 dimensioni è stato il sogno di tutti, da Maxwell ad Hamilton eccetera.

Solo che Maxwell diceva, vedi [4]: “sono comode, per i problemi elettrostatici in 2D; peccato che in 3D non esistano”, e Hilbert in proposito diceva (Sommerfeld, “in order to characterize the futility of all attempts in this direction”):

“time is one- dimensional, however the number, that is, the perfect complex number, has two dimensions”.

Alcuni conducevano questa ricerca per motive estetici, ma certamente per tutti lo scopo era di estendere le comode proprietà delle funzioni analitiche a più di 2 dimensioni. Certamente ora possiamo dire che queste funzioni esistono, sono gestibili, e ci si possono risolvere i problemi. Di per sé varrebbe la pena di aprire uno studio intitolato “Applicazioni dell’operatore  $\partial^*$  all’ingegneria”.

Darò, per comodità, direttamente la espressione relativa alle funzioni analitiche in 4 dimensioni; da cui poi il caso a 3 è ricavabile come sottocaso.

Dico che una grandezza matematica strutturata (\*) come:

$$F = (U_1 + iU_2 + jU_3) + Tji(U_4 + iU_5 + jU_6)$$

è tale per cui la analiticità per essa comporta per il complesso coniugato

$$(U_1 - iU_2 - jU_3) + Tji(U_4 - iU_5jU_6)$$

la validità delle equazioni di Maxwell.

Infatti introducendo i nomi pertinenti a una grandezza  $F$  campo elettromagnetico:

$$F = (E_x + iE_y + jE_z) + Tji(H_x + iH_y + jH_z)$$

la analiticità di  $F$  significa

$$\partial^* F = 0$$

ossia:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [(E_x + iE_y + jE_z) + Tji(H_x + iH_y + jH_z)] = 0$$

Sviluppando e poi notando che per il soddisfacimento della equazione devono essere contemporaneamente zero le “parti” “1”, “i”, “j”, eccetera, si ha:

$$\begin{array}{l} 1 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ i \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \tau} = 0 \\ j \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial \tau} = 0 \\ T \quad \frac{\partial E_x}{\partial \tau} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \\ ji \quad \frac{\partial H_x}{\partial \tau} + \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \\ Tj \quad - \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \tau} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \\ Ti \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \\ Tji \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \end{array}$$

(\*)

per il momento. Per il momento cioè mi limito a 6 componenti.

Queste sono le equazioni di Maxwell; come si vede per esempio dalla prima la quale, per il coniugato di componenti  $(E_x - iE_y - jE_z)$ , è la equazione  $div \vec{E} = 0$ . E così via (\*).

Ma c'è di più:

ogni specializzazione di queste condizioni di analicità a un numero inferiore di dimensioni (o di componenti) conduce ad una legge fisica.

Posso fare svariati esempi.

Prendiamo per esempio una grandezza fisica (\*\*):

$$U = (U_1 + iU_2 + jU_3 + TU_4)$$

La condizione di analicità per essa, fatti i dovuti passaggi, conduce a

$$\begin{array}{l} 1 \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial y} - \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{\partial U_4}{\partial \tau} = 0 \\ i \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} = 0 \\ j \quad \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial z} = 0 \\ T \quad \frac{\partial U_4}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 0 \\ ij \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0 \\ iT \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial \tau} = 0 \\ jT \quad \frac{\partial U_4}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial \tau} = 0 \end{array}$$

Possiamo vedere per esempio che se  $U_4 = 0$  queste condizioni impongono che  $(U_1, U_2, U_3)$  siano indipendenti dal tempo. Per le restanti componenti  $(U_1, U_2, U_3)$  si osserva che ..... esse significano l'annullamento del rotore e della divergenza per il coniugato  $(U_1, -U_2, -U_3)$ .

Questo fatto generalizza immediatamente quanto avviene in 2D per le funzioni analitiche.

Nel caso generale, le equazioni significano, per il coniugato  $(U_1, -U_2, -U_3, -U_4)$ , posto  $\vec{v} = (U_1, -U_2, -U_3)$ , le equazioni:

$$\begin{aligned} rot \vec{v} &= 0 \\ div \vec{v} + \frac{\partial v_4}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + grad v_4 &= 0 \end{aligned}$$

equazioni del moto di un fluido irrotazionale, compressibile, in 3 dimensioni (se  $v_4 = 0$ , anche stazionario).

Restando per il momento nel caso 3D  $(x, y, z)$  è facile fabbricare funzioni analitiche con la seguente proprietà peraltro generale.

Se  $A$  è armonica,  $v = \partial A$  è analitica.

(\*)

Il modulo  $FF^*$  risulta uguale a  $EE^* - HH^* + Tji(EH^* + HE^*)$  cioè contiene i due famosi invarianti di campo  $|\vec{E}|^2 - |\vec{H}|^2$  e  $\vec{E} \cdot \vec{H}$ .

(\*\*)

che, in realtà, presenta in più la componente  $U_4$ .



Infatti  $A$  armonica significa:

$$\partial\partial^*A = 0$$

Tuttavia  $\partial\partial^* = \partial^*\partial$ , quindi

$$\partial^*\partial A = 0$$

ossia, posto  $v = \partial A$ , risulta  $\partial^*v = 0$ , quindi  $v$  è analitica CVD.

Questo estende il concetto di “potenziale” di un campo, di cui il campo è la derivata  $\partial$ . Tuttavia possiamo anche, ripeto, vedere tutto questo come un modo empirico per fabbricare funzioni analitiche.

Giusto a titolo di esempio (su cui si può lavorare molto) calcolo la funzione analitica che fornisce il flusso di un fluido intorno ad una sfera di raggio  $a$ .

Salto la maniera di derivarla da un potenziale armonico.

La funzione analitica in questione è:

$$U = 1 + \frac{1}{2}a^3 \frac{1 - \frac{3xz}{r^2}}{r^5}$$

Per questa è verificata la condizione  $\partial^*U = 0$ .

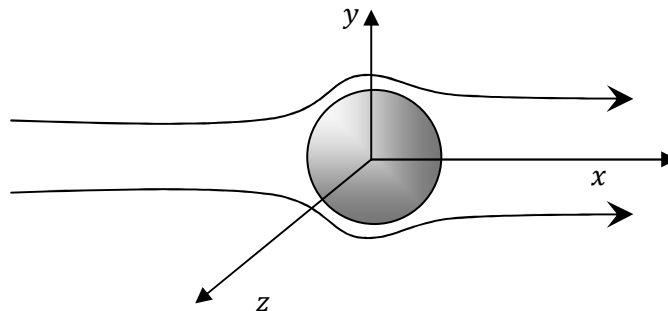
Per il coniugato  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (U_1, -U_2, -U_3)$  valgono le formule.

$$v_x = \frac{3a^3x^2}{2r^5} - \frac{1a^3}{2r^3} + 1$$

$$v_y = -\frac{3a^3xy}{2r^5}$$

$$v_z = -\frac{3a^3xz}{2r^5}$$

Ho esplicitato un termine di velocità  $v_\infty = 1$  parallelo all’asse  $x$ . Il fluido si muove nel verso delle  $x$  positive.



Altre funzioni analitiche interessanti:

$$U = \frac{1 + \frac{z^*}{r}}{x + r} = \frac{1}{r} - i \frac{\frac{y}{r}}{x + r} - j \frac{\frac{z}{r}}{x + r}$$

$$U = \frac{z^*}{r^3}$$

(mi pare il primo intorno a un ellissoide e il secondo dentro un pozzo inghiottitoio; ma non ricordo bene)

Passiamo ad altro.

(Di questa parte finale del paragrafo riporto solo i principali concetti. Questa parte contiene senz’altro una serie di aspetti interessanti e pittoreschi che sarebbero tutti da indagare. Mi sono permesso di non ricopiare troppa matematica, che avrebbe notevolmente appesantito il testo.)

Mostrano particolare interesse quelle che potrei chiamare “potenze (analitiche) del numero”. Chi sono costoro?

Sono l’analogo delle potenze  $z^n$  in 2D.

In 2D, presa  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$  la variabile, o il “punto P”, le sue potenze (analitiche) sono le  $z^2$ ,  $z^3$ , ...,  $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$ . In 2D esistono quindi due modi per generarle:

- o facendo il prodotto di  $z$  per  $z$  per  $z$  ...  $n$  volte;
- oppure definendole come autofunzioni (analitiche) del momento angolare: infatti

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} z^n = n z^n$$

Questo secondo modo pittoresco richiama l'operatore del momento angolare in meccanica quantistica ossia

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ma come vedremo (e ad evitare che si pensi che stiamo facendo della meccanica quantistica) compare separando le variabili nella equazione di analiticità  $\partial^* f = 0$ .

Il 2° modo, e non il primo, si generalizza a 3 dimensioni.

Infatti non esistono in 3D potenze (si intende: analitiche, cioè tali per cui  $\partial^* f = 0$ ) fabbricate per prodotto di vari termini  $z = x + iy + jz$  (\*).

Anzi nemmeno  $z = x + iy + jz$  risulta analitica.

In che modo compare l'operatore del momento angolare nella equazione di analiticità  $\partial^* f = 0$ ?

Il modo si evidenzia nello scrivere  $\partial^*$  (che verrà poi eguagliato a zero) nella forma:

$$\partial^* = \frac{z}{r} \frac{1}{r} (z^* \partial^*)$$

Quindi quando uno scrive  $\partial^* = 0$  tira in ballo  $z^* \partial^* = 0$ . Andiamo in 2D in coordinate polari  $r, \varphi$  e cerchiamo le soluzioni analitiche che siano nella forma  $f = R(r)\Phi(\varphi)$  a variabili separate. Immediatamente interviene l'operatore del momento angolare. Infatti

$$z^* \partial^* = (x - iy) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$-i \frac{\partial}{\partial \varphi}$  è l'operatore del momento angolare.

A questo punto è evidente che invocare “un autovalore per l'operatore  $-i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ” equivale a poter separare le variabili  $r, \varphi$ . Il fatto poi che questo operatore sia intero nasce dalla extra – imposizione che la funzione si ricopra mentre gira. Con l'autovalore  $n$  si misurano i “giri” che fa la funzione (in questo caso, sul piano  $x, y$ ).

In 3 dimensioni è:

$$\begin{aligned} z^* \partial^* &= (x - iy - jz) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + etc. \right) + i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + etc. \right) \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^* \end{aligned}$$

$-\Gamma^*$  è l'operatore del momento angolare. L'espressione esplicita dell'operatore  $-\Gamma^*$  è:

$$-\Gamma^* = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) - j \left( x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) - ji \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Seguendo alla lettera le notazioni di quasi tutti i libri di meccanica quantistica risulta (salvo l'attuale significato fisico di  $i$  etc.):

$$L_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L_x = -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(\*)Nota

Ambiguità di notazioni fra  $z$  e  $z$  risolvibile nel contesto.

Se  $-\Gamma^*$  ha un autovalore  $l$  ciò significa:

$$-\Gamma^*\Psi = l\Psi$$

ovvero:

$$[L_z + j(L_x + iL_y)]\Psi = l\Psi$$

e se, magari contemporaneamente,  $L_z$  ha un autovalore  $m$ , risulta:

$$L_z\Psi = m\Psi$$

Vedremo le eccezioni di quest'ultima.

Vorrei insistere e ripetere ad ogni piè sospinto che tutti questi concetti che sembrano essere di meccanica quantistica sono peculiari semplicemente della matematica delle funzioni analitiche (e delle guide d'onda e delle cavità sferiche; è un caso? Vedremo dopo).

Bene. Dopo questa lunga premessa cerchiamo in 3D le soluzioni analitiche che siano nella forma  $f = R(r)\Phi(\vartheta, \varphi)$  a variabili separate.

Cerchiamole, come in 2D, nella stessa forma delle potenze  $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$

$$\Psi_l = r^l \psi_l(\theta, \varphi)$$

con la condizione, come in 2D, di essere analitiche

$$\partial^*\Psi_l = 0$$

e con la condizione, come in 2D, di essere autofunzioni del momento angolare

$$-\Gamma^*\Psi_l = l\Psi_l$$

Fra parentesi questa ultima cosa, se ci si riflette, è uguale ad averle poste nella forma  $\Psi_l = r^l \psi_l(\theta, \varphi)$ .

Esse ..... dipendono da un altro indice  $m$ .

Questo secondo indice viene scritto in alto nella forma  $\Psi_l^m$  (\*).

Le potenze  $\Psi_l^l$  sono banali. Esse sono:

$$\Psi_l^l = (x + iy)^l$$

Poi, per ogni  $l$ , ci sono le ulteriori potenze abbassate di grado  $m$ :

$$\Psi_l^m \rightarrow \Psi_l^{l-1}, \quad \Psi_l^{l-2}, \dots \text{ fino a } \Psi_l^{-l}$$

Totale :  $(2l + 1)$ .

Ripeto che non posso scrivere troppo perché solo per questo ci vorrebbe un testo ad – hoc. Nessun libro o articolo tenta di indagare i significati fisici, o direi ancora meglio geometrici, o aritmetici elementari. Si scopre per esempio banalmente che .... chi è  $m$ ?

Ogni  $\Psi_l^m$  (ovvero: ogni  $\psi_l^m$ ) gira in tutto  $l$  volte, e di queste fa  $m$  giri sul piano  $x, y$  (o quando  $m$  è negativo fa  $m$  giri in senso contrario sul piano  $x, y$ ).

La dizione non è rigorosa ma interpreta i fatti in modo pittoresco.

A questo punto dobbiamo proseguire con una osservazione che riguarda l'operatore  $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$  che dovrebbe misurare gli  $m$  giri sul piano  $x, y$ . Non sempre  $L_z$  dà un autovalore  $m$ . Anzi talvolta applicato alle  $\Psi_l^m$  non dà un autovalore proprio per niente (il che, formalmente, ci impedirebbe di separare la variabile  $\varphi$  nelle soluzioni dell'equazione di analiticità  $\partial^* = 0$ ).

(\*)

e corrispondentemente la parte angolare, le funzioni angolari  $\psi_l(\theta, \varphi)$ , diventano  $\psi_l^m$ . È senz'altro interessantissimo, stante la forma delle potenze  $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$  e  $\Psi_l^m = r^l \psi_l^m(\theta, \varphi)$ , notare che le funzioni  $\psi_l^m(\theta, \varphi)$  contenenti la dipendenza dagli angoli sono la generalizzazione 3D delle  $e^{in\varphi}$ .

L'unico operatore che dà un autovalore su  $\Psi_l^m$  è un  $L_z$  "modificato" il cui nome in meccanica quantistica è  $J_z$ . Esso dà su  $\Psi_l^m$  l'autovalore ...  $(m + \frac{1}{2})$ :

$$J_z \Psi_l^m = (m + \frac{1}{2}) \Psi_l^m$$

ed è così formato:

$$J_z = L_z + S$$

La sua azione su  $\Psi_l^m$  è la seguente:

$$J_z \Psi_l^m = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi_l^m i - \frac{1}{2} i \Psi_l^m i$$

ed in meccanica quantistica i tre termini forniscono rispettivamente il momento angolare totale, orbitale e di spin.

Come si vede la insorgenza di questi autovalori e operatori (o se si vuole di queste particolarità geometriche) non ha però nulla a che vedere con la meccanica quantistica. Si tratta di peculiarità di questa nuova matematica delle funzioni analitiche, tutta da indagare.

È un caso? Sono coincidenze? Secondo me no, e anzi si apre davanti a noi un campo di studio enorme sia teorico che applicativo. Applicherò queste proprietà "di spin" nei paragrafi 9 e 11.

Manco a dirlo queste  $\Psi_l^m$  sono ortogonali, costituiscono una base, in esse si può sviluppare qualunque funzione analitica (sono ... l'analogo di zeri e poli, ... sono le analoghe delle  $z^n$  sul piano .... e ci sono anche le  $1/z^n$  che sono ... gli stati con  $n$  negativo). Le  $\psi_l^m$  generano d'un colpo solo funzioni speciali della matematica quali i polinomi associati di Legendre  $P_l^m$  e/o le "spherical harmonics"  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ . La espressione esplicita delle  $\psi_l^m$  con i polinomi associati di Legendre  $P_l^m = P_l^m(\cos \vartheta)$  (vedi Gradshteyn & Ryzhik per la definizione dei  $P_l^m$ ) è:

$$\psi_l^m = (l + m + 1) P_l^m e^{im\varphi} + j P_l^{m+1} e^{i(m+1)\varphi}$$

Termino qui, ma voglio anticipare qualche considerazione di tipo pittoresco dai paragrafi 9 e 11.

Risulterà che la enumerazione delle soluzioni analitiche  $\Psi_l^m$  e il loro tipo di distribuzione angolare  $\psi_l^m$  corrispondono agli stati degli elettroni nell'atomo di idrogeno. "Stranamente" se ne ricava anche una informazione sulla distribuzione spaziale delle orbite, che sono descritte ... dalle  $\psi_l^m$  e sono enumerate dalle  $\psi_l^m$ .

Peraltro invece risulterà del tutto chiaro e inambiguo il problema delle cavità sferiche, dove i modi di oscillazione sono anch'essi descritti dalle  $\psi_l^m$ , ed enumerati dalle  $\psi_l^m$ . In questo secondo caso non v'è nessuna ambiguità interpretativa sul fatto che le componenti di campo siano descritte, nella loro distribuzione spaziale, dalle soluzioni dell'equazione di Maxwell  $\partial^* F = 0$ .

Conclusione: esistono forti sospetti di parentela fra i due casi: i possibili modi nelle cavità e le orbite degli elettroni nell'atomo. Esistono enti geometrici elementari che sono le  $\Psi_l^m$  o le  $\psi_l^m$ , che dominano la scena. Le  $\psi_l^m$  sono le analoghe tridimensionali .... delle distribuzioni angolari  $e^{in\varphi}$ .

Le  $\Psi_l^m$  .... sono le analoghe delle entità geometriche (o numeriche) elementari  $z^n$  e  $1/z^n$  del piano.

Perché ciò avviene?

Stiamo scoprendo, come dice il gruppo di Cambridge, le proprietà dello spazio e del tempo?

Niente di tutto questo. La questione, secondo me, è la seguente:

che probabilità ci sono che gli enti elementari del nostro linguaggio differiscano (per così dire) dalle particelle elementari?

La risposta è secondo me (se il linguaggio è "centrato"): nessuna.

E quindi non dovremmo meravigliarci che ciò avvenga. In fondo è un problema nostro. In fisica sfugge troppo spesso una realtà elementare, che è ovvia, ma che poi viene dimenticata con frasi tipo “ho trovato la legge di ...”, “ho scoperto”. In fisica noi non possiamo che raccontare ciò che avviene. O tentare di raccontare.

Ora se ci si pensa (questa è una dizione probabilmente inesatta ma suggestiva) noi diciamo che i corpi sono fatti di atomi, di particelle elementari eccetera, e le funzioni sono fatte di zeri, poli eccetera. Componiamo i corpi con gli atomi e le funzioni le componiamo con funzioni elementari. Sarebbe saggio, anche se non obbligatorio, che le entità elementari del linguaggio matematico coincidessero con le realtà elementari della realtà circostante che intendiamo raccontare. Ecco perché può ragionevolmente accadere questo fatto: entità fisiche elementari sono funzioni elementari. Lo sono, non per una magia dell'estetica, o per una coincidenza, ma perché noi, nel giro e rigiro secolare di pensiero e di matematica e di leggi fisiche, non possiamo che confluire, più o meno inconsciamente, in un linguaggio matematico indovinato, nel quale funzioni elementari, quali le funzioni analitiche  $\Psi_l^m$ , corrispondono per forza in qualche modo a enti fisici elementari.

Si potrà dire: ma non è così. Non è ancora esattamente così. Non tornano esattamente le cose. Bene: direbbe Schroedinger:”ai miei tempi si diceva che la ricerca non è ancora finita”.

Infine ( e insisto che questo secondo me questo è l'aspetto più soddisfacente) avremmo, come posso dire, precisato, finalmente, e dichiarato, la nostra fondamentale “ignoranza”. Avremmo soltanto precisato la classe di funzioni che adopereremo nella descrizione dei fenomeni dello spazio e del tempo. Avremmo, anzi, dapprima precisato lo spazio e il tempo, con i loro versori, e le regole formali obbligate, conseguenti; e poi la classe di funzioni, analitiche, funzione del punto P dello spazio e del tempo. La legge generale valida in tutta la fisica è che noi usiamo quelle funzioni lì. La legge  $\partial^* F = 0$  non aggiunge nulla sulla sostanza di ciò che noi conosciamo del campo elettromagnetico (e così eventualmente sarebbe per le particelle elementari) Fine.

## 5 – Le equazioni di Maxwell

Ho già parlato delle equazioni di Maxwell ma ora le ripropongo in una forma completa 8 componenti.

Introduco una grandezza  $F$  campo elettromagnetico (\*):

$$F = (E_x + iE_y + jE_z - TH_\tau) + Tji(H_x + iH_y + jH_z + TE_\tau)$$

La analiticità di  $F$  significa

$$\partial^* F = 0$$

ossia:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau} \right) [(E_x + iE_y + jE_z - TH_\tau) + Tji(H_x + iH_y + jH_z + TE_\tau)] = 0$$

Sviluppando e poi separando le “parti” “1”, “i”, “j”, eccetera, si hanno le 8 equazioni scalari:

$$\begin{array}{l} 1 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial H_\tau}{\partial \tau} = 0 \\ i \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial \tau} - \frac{\partial E_\tau}{\partial z} = 0 \\ j \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \text{eccetera} \end{array}$$

Con 6 componenti si hanno le equazioni di Maxwell nello spazio vuoto. Con  $H_\tau$  e  $E_\tau$  diversi da zero compaiono termini legati a densità di cariche e correnti elettriche e magnetiche.

Si può vedere che basta anche il solo termine  $H_\tau$  per dare le equazioni di Maxwell con cariche  $\rho$  e correnti  $J$ . Consideriamo per esempio la prima equazione scritta. Passando come al solito al coniugato  $(E_x - iE_y - jE_z + TH_\tau)$  + e poi ponendo  $\rho = -\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau}$  si vede che essa dice:

$$\text{div } \vec{E} = \rho$$

Anche su questo si può scrivere un libro, ma io voglio rapidamente passare ad annotare alcune peculiarità.

In queste condizioni di massima generalità la condizione di analiticità  $\partial^* F = 0$  applicata su  $F$  a 8 componenti dà luogo a termini che sono tutti interpretabili in senso elettromagnetico.

La risoluzione di queste equazioni potrebbe apparire un problema abbastanza complicato, essendo già complicato risolvere le equazioni di Maxwell senza correnti, oppure ricavare i campi a partire dalle cariche e correnti che li generano. In realtà, paradossalmente, vale l'opposto: cioè è facilissimo produrre soluzioni a iosa in modo completamente automatico.

Come?

Vale la premessa di cui ho già parlato che se un qualunque “coso”  $A$  è armonico,  $\partial A$  è analitico.

Quindi il coso  $A$ , purché armonico, può essere qualunque cosa:

uno scalare  $\varphi(z, t)$ , oppure  $\varphi(x, y, z, t)$ , un coso con indici, esempio  $e^{i(\omega t - kz)}$  che, con  $\omega = k$ , è armonico, eccetera. Possiamo dire che  $A$  gioca il ruolo di potenziale (generalizzato) del campo, ma non obbedendo più alla condizione di Lorenz bensì alla condizione di gauge più “semplice”:

$$\square A = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) A = \partial^* \partial A = 0$$

Derivando, si ottiene un campo  $F = \partial A$  che fornisce una struttura fatta di campi elettrici, magnetici e cariche e correnti, ogni volta interpretabile, e che soddisfa alle equazioni di Maxwell, nel senso che quelle correnti generano quei campi secondo le equazioni di Maxwell.

(Almeno questo formalmente. Occorre naturalmente che siano soddisfatte condizioni fisiche, che

(\*)Nota

La scelta di introdurre le altre due componenti scrivendole nel modo  $-TH_\tau$  e  $TE_\tau$  è fatta allo scopo di poter scrivere  $F$  in una forma che servirà dopo, per un confronto con l'equazione di Dirac (n.d.r.)

rendano appunto fisicamente accettabili quelle correnti e quei campi).

Possiamo dire che quelle correnti generano quei campi secondo le equazioni di Maxwell (\*), ma a questo punto saremmo egualmente autorizzati a dire che quei campi generano quelle correnti ... e allora più in generale saremmo portati a dire che quei campi e quelle correnti si autosostengono.

Non solo. Pervenuti a una soluzione  $F$  con indici (i quali indici non ci piacciono, oppure qualora volessimo pervenire alla interpretazione di una soluzione con diversi indici) vale la osservazione che, se  $F$  è analitica, è ancora analitica  $Fi$ ,  $FT$ ,  $Fji$  o qualunque, moltiplicata per qualunque indice da destra. Ciò scambia e reinterpreta tutti gli indici originari di  $F$ .

Esempio: moltiplicando  $F$  per  $Tji$  si scambiano i campi elettrici con quelli magnetici e si passa da un  $TE$  a un  $TM$  (oppure, se si partiva da un  $TM$ , si arriva a un  $TE$ ).

(\*)

Credo che sia importante notare che queste equazioni “generalizzate” a 8 componenti non sono un'altra cosa rispetto alle usuali equazioni di Maxwell. Sono le usuali equazioni di Maxwell e più precisamente sono le usuali equazioni di Maxwell in presenza di cariche e correnti. L'unica (si fa per dire) differenza è che le cariche e correnti che appaiono nelle equazioni non sono più assegnate dall'esterno (e poi da esse si ricavano i campi), ma compaiono automaticamente come facenti parte della soluzione.

In altre parole i campi elettromagnetici  $\vec{E}, \vec{H}$  che le equazioni forniscono sono i campi che sarebbero (sono) ricavabili dalle usuali equazioni di Maxwell in presenza di cariche e correnti se si fosse capaci di generare quelle distribuzioni di cariche e correnti.

Quindi si tratta di esaminare di volta in volta se cariche e correnti corrispondano a situazioni fisicamente realizzabili (n.d.r.).

### Esercizi.

Esercizio 1 - Il potenziale  $A = T i e^{i(\omega t - kz)}$  con segni vari per  $\omega$  e  $k$  è armonico, purché sia  $\omega^2 = k^2$ . Derivando con l'operatore  $\partial$  si ottengono le quattro soluzioni analitiche

$$F_1 \quad (1 + Tj)e^{i(-kz + \omega t)}$$

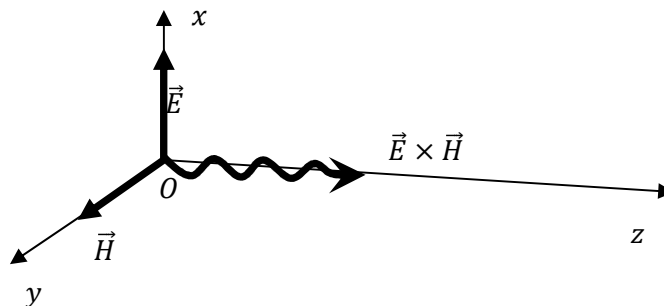
$$F_2 \quad (1 + Tj)e^{i(+kz - \omega t)}$$

$$F_3 \quad (1 - Tj)e^{i(+kz + \omega t)}$$

$$F_4 \quad (1 - Tj)e^{i(-kz - \omega t)}$$

Le prime due si propagano nel verso positivo di  $z$ , con rigiro  $e^{\pm i\omega t}$  opposto. Idem le seconde, verso  $z$  negativo.

Esercizio 2- Interpretare il termini di vettore di Poynting.



Esercizio 3 - Discutere le somme  $\frac{F_1 + F_2}{2}$  e  $\frac{F_1 - F_2}{2}$ .

Soluzione:

$$\frac{F_1 + F_2}{2} = (1 + Tj) \cos(\omega t - kz) \text{ lineare } E_x H_y \text{ ORIZZONTALE};$$

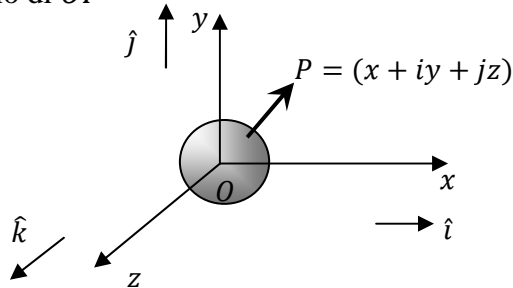
$$\frac{F_1 - F_2}{2} = (1 + Tj)i \sin(\omega t - kz) \text{ lineare } E_y H_x \text{ VERTICALE}.$$

Esercizio 4 - Interpretare la soluzione analitica  $F = \frac{z^*}{r^3}$ .

Soluzione. Passando ai coniugati si ha:

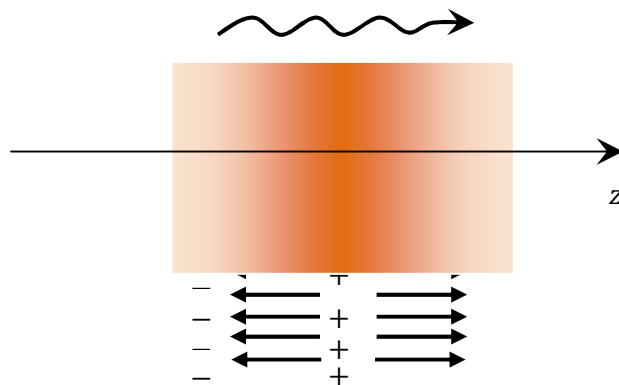
$$\frac{z^*}{r^3} \rightarrow \frac{z}{r^3} = \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}$$

$\frac{z}{r}$  è il versore unitario di  $\overrightarrow{OP}$



Il campo è  $E_r = \frac{1}{r^2}$  radiale, statico.

Esercizio 5 - Il potenziale  $A = \cos(\omega t - kz)$  è armonico per  $\omega = k$ . La funzione  $F = \partial A \propto (j - T)\sin(\omega t - kz)$  è analitica. Interpretare in termini di campo elettromagnetico.  
Soluzione:



Si ha un'onda pulsante  $E_z$ , (quindi non polarizzata sul piano trasverso), che si propaga accompagnata da una carica pulsante  $\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau}$ . Non sono presenti onde elettromagnetiche nel senso ordinario (\*).

(\*)Nota

Questo è un esempio delle “scalar waves” di cui ampiamente si discute in Internet. Esse nascono in modo naturale in queste equazioni per così dire “generalizzate” di campo elettromagnetico, peraltro accompagnate da altre soluzioni “strane”. In realtà, senza fare ipotesi ossia senza porsi il problema di arbitrarie “condizioni di gauge”, le soluzioni più naturali di una equazione di analiticità  $\partial^* F = 0$  sono soluzioni a 8 componenti. Tutto sta a vedere se queste soluzioni possano avere un senso fisico. Queste soluzioni danno automaticamente cariche e campi che si auto sostengono nello spazio vuoto. Cosa c'è di meglio per tentare una interpretazione elettromagnetica delle particelle elementari? (n.d.r.).



## 6 – L'equazione di Dirac

Le equazioni dei fluidi, le funzioni speciali  $P_l^m$ , le potenze del punto in 2D e 3D, le equazioni di Maxwell, le equazioni delle guide d'onda, tutto potrebbe portarci a dire che la concomitanza di tante cose: (1) ha un misterioso significato, oppure (2) è un problema di eleganza, oppure (3) non significa niente ed è solo un 'analogia assolutamente irrilevante, significando solo che in tutti i casi è formalmente presente uno stesso  $\partial^*$  oppure (4) potrebbe far pensare che siamo di fronte a "leggi" fondamentali ancora al di là della nostra intuizione, oppure che (5) dovunque ci sia in ballo *div rot* ci sono delle analogie di cui è inutile chiedersi il significato, osservazione analoga a (3), oppure (6) le analogie discendono dalla matematica, che formalmente pone in gioco le funzioni analitiche (in 2D, 3D, 4D) e per questo nascono proprietà, funzioni etc. comuni, oppure ..... eccetera.

In realtà io credo che siamo di fronte sia ad una definizione appropriata di numero, sia ad una affermazione profonda (\*) e ad una legge fisica generale; che è assolutamente generale in quanto non dice assolutamente .... niente e oltre a non dire niente lo dice per di più sotto forma di tautologia e pertanto si presenta come una cosa di per sé vera; ed è per di più non una legge della fisica ma una legge ... del nostro linguaggio ... ed è pertanto, anche, così foriera di informazioni, ricca di informazioni, perché risponde a quella che io penso sia la domanda fondamentale della fisica, che è: "ma noi, cosa diavolo volevamo dire?" (cioè, un riesame del linguaggio).

Essa legge si può esprimere in vari modi, ma grosso modo è:

"descriverò il fenomeno (che mi accingo a descrivere e che avviene nello spazio e nel tempo) .. con delle funzioni dello spazio e del tempo" seguita (o accompagnata da, o equivalente a) affermazioni altrettanto tautologiche quali: "le funzioni che userò dello spazio e del tempo obbediranno alle leggi generali .... a cui debbono obbedire le funzioni dello spazio e del tempo ( $\partial^*=0$ )".

È chiaro che di fronte ad affermazioni tanto potenti nessuno ci può attaccare. Ed è altrettanto chiaro che questa non è fisica, ma studio di noi stessi.

Potremmo addirittura arrivare ad affermare, pomposamente, ed ambiziosamente, di "avere scoperto una nuova legge della fisica", o di avere scoperto la legge della fisica se completassimo le precedenti affermazioni con quest' altra: "userò la condizione  $\partial^*=0$  in tutti quei casi in cui sia pertinente usarla".

A questo punto siamo (io credo ) inattaccabili.

Dunque?

Dunque quando nel 1928 Dirac inventò l'operatore "radice quadrata di  $E^2 = p^2 + m_0^2$ " si trovò, senza accorgersene, a scoprire(\*\*) l'operatore  $\partial^*$ .

Il problema di Dirac era, in definitiva, di riportare al 1° ordine l'equazione relativistica di Klein Gordon, del 2° ordine. Lo risolse con matrici 4x4, e "spinori". L'equazione di Dirac è pertanto di aspetto abbastanza scostante. Sviluppata per esteso, in una delle sue varie possibili "forme" equivalenti, essa equivale ad un sistema di 4 equazioni fra 4 grandezze complesse  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  con indici cioè 1,  $i$  (e quindi un sistema di 8 equazioni fra 8 grandezze reali).

Se ora prendiamo una grandezza  $F$  (o  $\Psi$ ) a 8 componenti e scriviamo

$$\partial^* \Psi = \hat{m}_0 \Psi i \hat{T}$$

otteniamo, sviluppando, un sistema di equazioni formalmente uguali alle equazioni di Dirac.

(\*)

Il cui negato, come dice Niels Bohr, è ancora una affermazione profonda.

(\*\*)

Essendo  $\partial \partial^* = \partial^* \partial = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$  e  $\partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau}$  ed essendo

$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = m_0^2 \Psi$  l'equazione di Klein Gordon, cioè fra operatori  $-p^2 + E^2 = m_0^2$ .

Oltretutto, prendendo il  $\partial$  di ambo i membri e considerando che (come è facile verificare)

$$\partial \hat{i} = \hat{i} \partial$$
$$\hat{i} \hat{T} \hat{i} \hat{T} = 1$$

otteniamo immediatamente (sia con  $m_0 > 0$  che con  $m_0 < 0$ ):

$$\partial \partial^* \Psi = \partial \hat{i} m_0 \Psi \hat{i} \hat{T} = \hat{i} \partial^* m_0 \Psi \hat{i} \hat{T} = \hat{i} m_0 (\hat{i} m_0 \Psi \hat{i} \hat{T}) \hat{i} \hat{T} = m_0^2 \Psi$$

e quindi la desiderata equazione di Klein Gordon.

Ma cosa c'è sotto?

Perché queste equazioni ricordano tanto le equazioni di Maxwell  $\partial^* F = 0$ ? (Basta porre formalmente  $m_0 = 0$ ).

Si dice in uno scritto del gruppo di Cambridge:

“when in 1928 Dirac “square rooted” the quantum operator  $E^2 = p^2 + m_0^2$  not only ... (etc.) but he also uncovered the geometric rules governing Minkowsky spacetime!”. (Il punto esclamativo è nello scritto di Cambridge).

Ma perché?

E Dirac si imbatté nelle proprietà dello spaziotempo, o nelle proprietà del nostro linguaggio? (nel senso delle proprietà che noi abbiamo assegnato al nostro linguaggio descrittivo, con la introduzione dell'operatore  $\partial^*$ ). E perché le equazioni di Dirac sono così? Non sarebbe più logico se fossero  $\partial^* \Psi = 0$ ?

Proverò nei successivi paragrafi a illustrare il concetto, o se vogliamo chiamarla la ipotesi, che le equazioni di Dirac siano approssimate, nel senso di una “approssimazione a raggi” o di Ottica Fisica, e che le vere equazioni siano in realtà ...  $\partial^* \Psi = 0$ .

Rammento cosa sono (e in che relazione stanno) le equazioni di Schroedinger, di Pauli, di Klein Gordon e di Dirac.

Esse sono le equazioni differenziali che governano la evoluzione spaziotemporale della “funzione d'onda”  $\Psi$ , della quale, peraltro, si considera solo il significato di  $\Psi \Psi^* = |\Psi|^2$  o giù di lì.

L'equazione di Schroedinger è alle derivate seconde e alla derivata prima nel tempo. La equazione di Klein Gordon è la equazione di Schroedinger relativistica (alle derivate seconde) e comprende, come approssimazione non relativistica, quella di Schroedinger. Tutte sono scalari. La equazione di Pauli non è più scalare ma con componenti, cosicché può tenere conto della polarizzazione (diciamo: lo spin). La equazione di Dirac è al 1° ordine, con 4 componenti complesse 1,  $i$ , relativistica, comprende o genera tutte le altre ed è l'analogo delle equazioni di Maxwell rispetto alla equazione d'onda (che qui diventa la equazione di Klein Gordon cioè con massa).

Praticamente la equazione di Klein Gordon è l'equivalente della relazione di meccanica relativistica

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

mentre l'equazione di Schroedinger è equivalente alla relazione meccanica approssimata

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 \cong E_{(cinetica)} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$$

Questa è l'approssimazione non relativistica della  $E^2 = p^2 + m_0^2$ .

Si noti che in questo contesto le equazioni di Maxwell sono l'equivalente della relazione meccanica

$$E = pc$$

valida per la luce.

Ogni componente scalare della equazione di Dirac soddisfa comunque la equazione di Klein Gordon (così come ogni componente scalare delle equazioni di Maxwell soddisfa l'equazione d'onda)

## 7 – Le equazioni di Maxwell e di Dirac a confronto

Le equazioni di Maxwell e di Dirac suonano dunque, per una  $F$  a 8 componenti:

$$\begin{aligned}\partial^* F &= 0 \\ \partial^* F &= \hat{m}_0 F i \hat{T}\end{aligned}$$

Esplicitando le equazioni, per esempio in un sistema di 4 equazioni complesse a componenti 1,  $i$  oppure 8 equazioni fra grandezze scalari, le due equazioni coincidono, l'una essendo una particolareggiata dell'altra per  $m_0 = 0$ . Si ponga nelle equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}F &= (E_t + jE_l) + Tji(H_t + jH_l) \\ E_t &= E_x + iE_y \\ E_l &= E_z + iE_\tau \\ H_t &= H_x + iH_y \\ H_l &= H_z + iH_\tau\end{aligned}$$

Questo non è che un diverso modo per raggruppare le grandezze di campo, essendo  $F$  il solito (e già definito al paragrafo 5):

$$F = (E_x + iE_y + jE_z - TH_\tau) + Tji(H_x + iH_y + jH_z + TE_\tau)$$

Il raggruppamento, come si vede, mette in evidenza le grandezze  $t$  trasversali (sul piano  $x, y$ ) rispetto alle grandezze  $l$  longitudinali (“perpendicolari” al piano  $x, y$ ). Con un po’ di passaggi si perviene, separando gli indici come indicato, a queste:

$$\begin{aligned}j, ij & \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) E_l + \frac{\partial}{\partial z} E_t + \frac{\partial}{\partial \tau} iH_t = 0 \\ 1, i & \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) E_t - \frac{\partial}{\partial z} E_l + \frac{\partial}{\partial \tau} iH_l = 0 \\ Ti, T & \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) iH_l + \frac{\partial}{\partial z} iH_t + \frac{\partial}{\partial \tau} E_t = 0 \\ Tji, Tj & \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) iH_t - \frac{\partial}{\partial z} iH_l + \frac{\partial}{\partial \tau} E_l = 0\end{aligned}$$

Queste sono anche esattamente le equazioni di Dirac con  $m_0 = 0$  per le grandezze complesse (\*):

$$\begin{aligned}\psi_4 &= E_l \\ \psi_3 &= E_t \\ \psi_2 &= iH_l \\ \psi_1 &= iH_t\end{aligned}$$

come scritte sui libri e sviluppando la formula  $\partial^* F = \hat{m}_0 F i \hat{T}$ , cioè:

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_4 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im_0 \right) \psi_1 &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - im_0 \right) \psi_2 &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im_0 \right) \psi_3 &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_1 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + im_0 \right) \psi_4 &= 0\end{aligned}$$

(\*)Nota

In un mio successivo scritto del 2009 “Clifford Algebra and Dirac equation for TE, TM in waveguide”, [viXra:0910.0059](https://vixra.org/0910.0059) e successivi ho usato un segno opposto in  $\partial^* F = \hat{m}_0 F i \hat{T}$ , cioè  $\partial^* F = -\hat{m}_0 F i \hat{T}$ . Questo porta nelle equazioni di Dirac scritte in forma estesa ad un cambio di segno di  $m_0$  che si ripercuote in uno scambio fra la coppia  $\psi_1, \psi_2$  e la coppia  $\psi_3, \psi_4$ , col risultato che  $\psi_1, \psi_2$  sono identificati come campi elettrici e  $\psi_3, \psi_4$  magnetici (n.d.r.).

Perché il confronto? Cosa interessa? Cosa mi dice il confronto? Cos'è? Prima di proseguire, vorrei fare alcune considerazioni di natura discorsiva, per spiegare almeno a parole il senso (uno dei sensi) di queste elucubrazioni. Per lungo tempo il significato recondito delle equazioni di Dirac è rimasto nascosto. Anzi, esso è tuttora nascosto, dato che non c'è certamente in giro nessuna affermazione a mia conoscenza del tipo di quelle che io sto facendo. Per me entrambe le equazioni debbono condurre, necessariamente, ad una formulazione ancor più comune che discuteremo fra un po', e che è, per entrambe, la affermazione di essere campi elettromagnetici (o, se si vuole, in un senso ancor più chiaro ed espresso più modestamente, in termini analitici o geometrici, o di linguaggio convenzionale dei nostri mezzi espressivi, d'essere entrambe la espressione della analiticità).

Veniamo a noi.

Il senso recondito, il significato delle componenti della  $\Psi$  di Dirac espresso come grandezze di campo, non è stato chiaro per lungo tempo, anzitutto .... perché era vietato chiederselo. Ed è tuttora vietato. L'unico senso lo si dà alla  $\Psi\Psi^*$  (\*). Come ho già detto per me questa è l'espressione del fatto che si rinuncia a priori a conoscere la fase della  $\Psi$  e si descrive il fenomeno senza la fase (cosa peraltro che, in mancanza di "phase detector" a due canali I e Q, saremmo costretti a fare già nell'infrarosso, o già a 300 GHz, o già in banda W, se non avessimo la tecnologia. Quindi: la mancanza della conoscenza e della tecnologia ha portato a un divieto) [5].

Torniamo a noi.

La corrispondenza che ho scritto fra le  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  e le componenti di campo elettromagnetico  $E_t, E_l, H_t, H_l$  non è detto che sia la corrispondenza. È una possibile corrispondenza. Infatti le equazioni di Dirac hanno svariate possibili "forme della equazione di Dirac" (evidentemente attraverso tutti i possibili raggruppamenti diversi che si possono creare fra le componenti, pur di lasciare inalterate certe grandezze che sono le sole a cui diamo significato, tipo la  $\Psi\Psi^*$ ).

Tuttavia la corrispondenza trovata ci crea quanto meno un indizio, o una strada per cercare di assegnare un senso alle componenti di Dirac.

Potrei portare svariati altri esempi ma non mi voglio dilungare troppo: noto solo che le soluzioni per onda piana della equazione di Dirac portano a riposo alle seguenti 4 soluzioni assai semplici:

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (e^{i\omega_0 t}, 0, 0, 0)$$

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (0, e^{i\omega_0 t}, 0, 0)$$

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (0, 0, e^{-i\omega_0 t}, 0)$$

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (0, 0, 0, e^{-i\omega_0 t})$$

in meccanica quantistica interpretate come materia e antimateria, con spin di qua e di là. Codeste, trasportate in termini di  $E_t, E_l, H_t, H_l$  hanno un significato elettrico in parte suggestivo, ma in parte chiaramente ambiguo e incompleto.

D'altra parte, la cosa non deve preoccupare né poco né punto, perché, qualora sia vista in termini elettromagnetici, la soluzione della equazione di Dirac ha chiaramente componenti di campo troppo schematiche. Per esempio  $\psi_3 = e^{-i\omega_0 t}$  significa  $E_x + iE_y = e^{-i\omega_0 t}$ : il campo sarebbe un campo elettrico trasversale che gira da solo in polarizzazione circolare. Suggestivo, ma un po' incompleto. Dunque, riassumendo, abbiamo forse una via per tentare una identificazione. Ne più, ne meno.

Proseguirò nel prossimo paragrafo.

Prima però faccio un altro esempio suggestivo. La possibilità di scrivere le equazioni di Maxwell in termini di  $\partial^*$  invece che di  $div, rot, \dots$  apre ora la possibilità di scrivere le equazioni di Dirac in termini di  $div, rot$  invece che di  $\partial^*$ . Esse per  $\rho = 0$  suonano così:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + im_0 \vec{H}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + im_0 \vec{E}$$

(\*)

e a un po' di altre grandezze "osservabili".

Prendendo  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) + im_0(\vec{\nabla} \times \vec{H})$  e sostituendovi  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$  si ottiene con un po' di passaggi:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = m_0^2 \vec{E}$$

cioè la richiesta equazione di Klein Gordon per le componenti di campo (idem per  $\vec{H}$ ). Quelle scritte sono dunque (giustappunto) “le equazioni alle derivate prime che corrispondono all’equazione di Klein Gordon alle derivate seconde” cioè le equazioni di Dirac.

Ma se le guardiamo, e pensiamo all’immaginario  $i$  che vi compare in termini elettrotecnici, vediamo che la equazione

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + im_0 \vec{E}$$

presenta un termine che contiene una corrente

$$\vec{J} = im_0 \vec{E}$$

in luogo della abituale

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

che siamo abituati a considerare.

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$  significa (per un mezzo con  $\sigma \neq 0$ ) una dissipazione di energia per effetto Joule. Un termine  $\vec{J} = im_0 \vec{E}$  (tipo  $I = i\omega V$ ) significa corrente “in quadratura”, cioè energia reattiva, cioè energia che c’è ma non si dissipa.

Di qui ovvie elucubrazioni (per esempio di “circuiti equivalenti”) che tralascio; di immagazzinamento di energia in induttanze o capacità, spaziali.

## 8 – Le guide d’onda

Le guide d’onda sono il “posto” più adatto dove ci si possa rendere conto di come nascono le equazioni per una particella dotata di massa. Mostrerò ora come nelle guide d’onda valga esattamente l’equazione di Schroedinger (o la corrispettiva “esatta”, relativistica, di Klein Gordon) per una particella di massa  $m_0$  ( $\omega_0$ ).

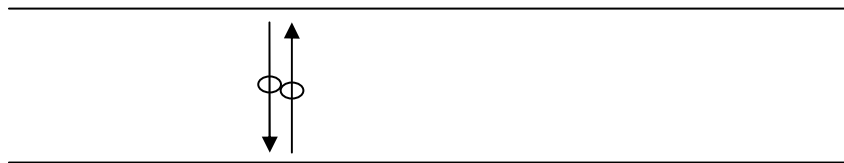
Uso “selvaggiamente” le unità di misura, nel senso che scriverò indifferentemente, considerandoli equivalenti,  $\omega_0$  o  $m_0$  o l’energia  $E_0$  (e così farò per l’impulso  $p$  e il vettore d’onda  $k$ ) tanto, scegliendo acconciamente le unità di misura (il valore per  $c^2$  o per la costante di Plank  $\hbar$ ) la pulsazione  $\omega$  si identifica con l’energia ( $E = \hbar\omega$ ) e a riposo si identifica con la massa ( $E_0 = m_0c^2$ ). La caratteristica fondamentale di una particella dotata di massa è di dare un autovalore per l’operatore dell’energia tale che a riposo si identifichi con  $m_0 = \omega_0$  (in parole povere questo significa che la funzione d’onda o il campo hanno, a riposo, l’aspetto  $e^{\pm i\omega_0 t}$ , come del resto abbiamo visto avviene nella equazione di Dirac).

La struttura del campo in una guida d’onda, in particolare per uno specifico “modo” in guida d’onda, con taglio alla pulsazione  $\omega_0$ , è anzitutto che esso nasce solo se la frequenza in ballo o l’energia raggiungono almeno il valore  $\omega_0$  (altrimenti non nasce un bel nulla). Se la frequenza cioè l’energia a disposizione è almeno  $\omega_0$  nasce e si materializza per la prima volta un campo.

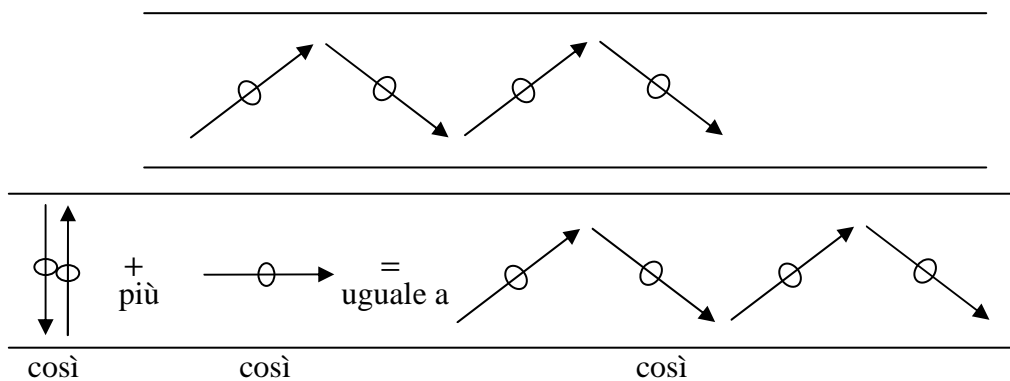
Esso è fermo.

(Infatti la sua energia è appena sufficiente per mantenerlo in vita fermo).

La struttura “descrittiva” del campo in queste condizioni, come è noto (vedi per esempio Ramo Whinnery) è quella di un’onda che si palleggia fra le pareti e resta lì, così:



Quando, se e quando, la frequenza ovvero l’energia cresce, il campo si propaga, così:



Esistono tre grandezze caratteristiche fra loro legate, che descrivono il campo in guida in una di queste situazioni generiche, e sono:

- la frequenza (ovvero la pulsazione  $\omega$ , ovvero l’energia  $E$ );
- il vettore d’onda  $k_z$  (ovvero l’impulso  $p$  lungo l’asse  $z$  di propagazione);
- il  $k_c$  ( $k_{critico}$ , ovvero la pulsazione  $\omega_0$  al taglio, ovvero l’energia a riposo o massa  $m_0$ );

e queste grandezze in gioco sono legate dalla relazione:

$$\omega^2 = k_z^2 + k_c^2$$

ovvero:

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

A riposo  $p = 0, E^2 = m_0^2$ .

In particolare dunque a riposo (alla frequenza di taglio) quando  $k_z = 0$ , risulta  $\omega^2 = \omega_0^2 = k_c^2$ .  
La condizione sul  $k_c$  è imposta dalle condizioni al contorno.

Insomma, conclusione:

il modo in questione si muove obbedendo alle relazioni meccaniche (relativistiche) a cui obbedisce una particella di massa  $m_0$ , impulso  $p$  ed energia  $E$  (energia  $E_0 =$  pulsazione  $\omega_0$ ). A riposo, l'energia si palleggia lì.

Ci si può divertire a scavare in tutte le relazioni e/o analogie che possono venire in mente, ma tutto conduce ad una rigorosa corrispondenza fra il modo di "massa"  $\omega_0 \equiv m_0$  ed una particella di massa  $m_0 \equiv \omega_0$  (esempio: la  $\lambda$  in guida esibita dal modo è esattamente uguale alla  $\lambda$  di una particella di massa  $m_0 \equiv \omega_0$  che si muove con impulso  $p$ , sperimentalmente esibita negli esperimenti di diffrazione con fasci di particelle).

D'altra parte è difficile sostenere che si tratta di una semplice analogia formale ( o per meglio dire: un deficiente potrebbe affermare che si tratta di una analogia formale. In realtà abbiamo .... luce immagazzinata o che viaggia, in entrambi i casi).

È peraltro assai istruttivo fare tutti i possibili confronti e analogie che dicevo (\*).

Ma andiamo oltre, perché le cose interessanti sono quelle che seguono.

Ogni componente di campo soddisfa in guida alla relazione (vedi Ramo Whinnery)

$$(1) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = k_c^2 F$$

che è ..... l'equazione di Klein Gordon per una particella in moto con un impulso  $p = p_z$  in direzione  $z$  e massa  $m_0^2 = k_c^2$

$$(1bis) \quad \begin{aligned} E^2 - p_z^2 &= m_0^2 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} &= m_0^2 F \end{aligned}$$

(quindi, in approssimazione non relativistica, per piccole velocità, ovvero per pulsazioni  $\omega$  che si discostano poco da  $\omega_0$ , alla equazione di Schroedinger).

Ma allora ..... qualcuno sta rubando; dov'è il trucco?

Come è possibile che ogni componente di campo soddisfi alla equazione di Klein Gordon .... dato che quello è un campo elettromagnetico ..... e quindi soddisfa alle equazioni di Maxwell .... e quindi al 2° ordine soddisfa alla equazione d'onda:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = 0$$

e non alla equazione di Klei Gordon:

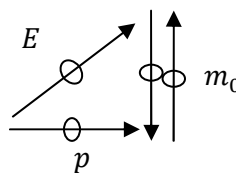
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = m_0^2 F$$

È semplice.

Ogni componente di campo soddisfa (sembra che soddisfi) in guida alla equazione di Klein Gordon perché ogni componente di campo soddisfa in guida anche alla equazione agli autovalori:

(\*)

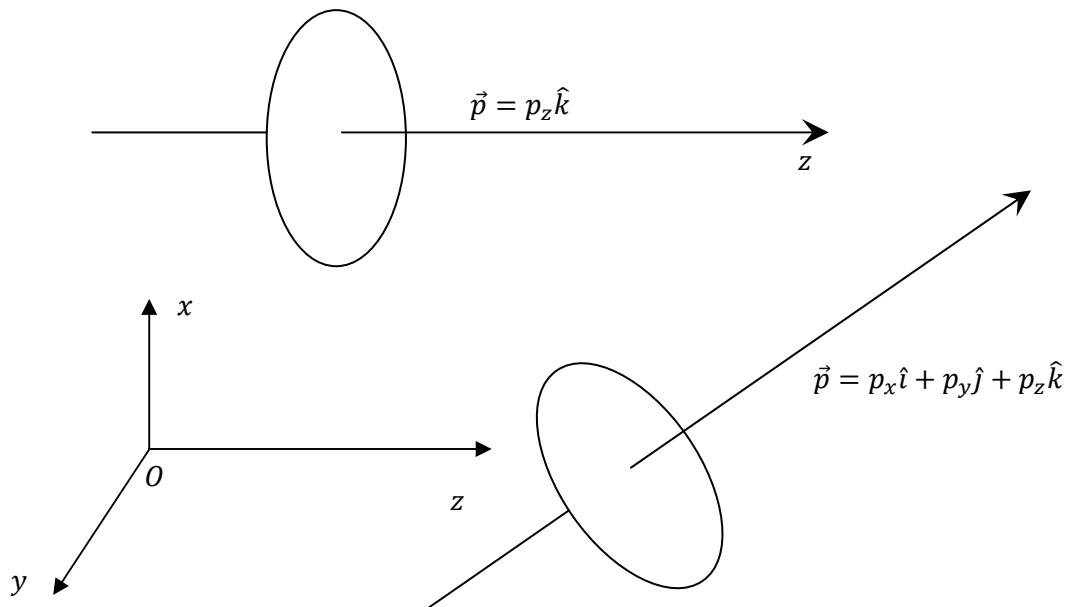
Si può fare una divertente, pittoresca e non casuale osservazione notando che la composizione grafica dei movimenti, con le notazioni



corrisponde secondo il teorema di Pitagora alla formula relativistica  $E^2 = p^2 + m_0^2$ . (n.d.r.)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -k_c^2 F$$

Qualcosa (qui le pareti) determina un autovalore a riposo per il  $k_c^2$ , cioè per la massa. Facciamo ora l'ultimo passo (peraltro ovvio ma lo voglio evidenziare). Se si trascura la variazione di campo sul piano trasverso, ovvero sul piano  $x, y$ , ovvero si assume un'approssimazione per onde piane del campo, la equazione di Klein Gordon (1bis) o (1) con  $z$  diventa rigorosamente vera per una qualunque direzione  $\vec{p} \neq p_z$  di propagazione:



ovvero è vera nella sua forma completa:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = m_0^2 F$$

(Dunque questa è rigorosa non per il campo  $F$ , ma per la approssimazione per onde piane del campo  $F$ . Diciamo: “ottica fisica”).

(Voglio appena osservare che questa sarebbe una trattazione più che sufficiente per un pacchetto d'onde o un fotone nell'infrarosso (per esempio) che si propagasse in guida. Probabilmente, non sapendo misurare niente sul piano trasverso, saremmo più che soddisfatti di descriverlo per onde piane).

Dunque riassumiamo le cose.

Se Schroedinger negli anni '20 avesse avuto più familiarità con i campi in guida d'onda avrebbe probabilmente scritto immediatamente ... “l'equazione ondulatoria per una particella di massa  $m_0$  “ cioè

“una funzione d'onda  $\psi(z, t)$  scalare tale da rappresentare correttamente tutte le caratteristiche meccaniche del moto (relazioni fra massa, impulso, energia) e tale da riprodurre nello stesso tempo correttamente gli esperimenti di diffrazione con fasci di particelle”.

L'avrebbe scritta immediatamente intendo (come peraltro ha fatto) riconoscendo però che gli bastava assumere, per la bisogna, una  $\psi(z, t)$  componente scalare di campo in guida. Con ciò avrebbe peraltro evidenziato anche il significato della massa a riposo: palleggiamento di energia del campo, che non si propaga, ma è lì.

Avrebbe anche intuito chiaramente cosa stava facendo, e cioè che si stava accontentando di una approssimazione per onde piane, per di più scalare (cosa, peraltro, largamente soddisfacente).

Avrebbe riconosciuto che stava facendo un modello a raggi, o come diremmo noi di “physical optics”.



Volendo poi soddisfare alla libidine di far deviare questi raggi nel passaggio entro un campo (elettrico per esempio) gli sarebbe bastato, più o meno (come peraltro ha fatto ..... ) mettere dentro la fase del raggio (cioè aggiungendola alla energia  $\omega$ ) anche l'energia comunicata dal campo (cioè  $eV = \frac{Ze^2}{r}$ ). Avendo messo questo termine dentro la fase (ovvero l'azione) automaticamente l'inseguire il pacchetto là dove la fase (l'azione) è stazionaria gli avrebbe descritto dei "raggi curvi", che si incurvano entro i campi elettrici (o analogamente entro campi magnetici).

Questo è quello che ha fatto, più o meno.

La stessa cosa ha fatto Dirac quando nelle equazioni del 1° ordine aggiunge nella "Hamiltoniana" (energia totale) i campi elettrici e magnetici.

Ma, tornando a Schroedinger, io direi che avrebbe automaticamente fatto assai di più, perché:

- la equazione che avrebbe scritto sarebbe stata in modo naturale ... relativistica (cioè direttamente la equazione di Klein Gordon, la quale si sarebbe mostrata "equazione di Schroedinger" solo per basse velocità ovvero in approssimazione non relativistica);
- sarebbe stato ovvio che una funzione d'onda scalare (cioè il rappresentare l'onda piana con una sola componente scalare) avrebbe potuto rappresentare solo una particella non dotata di spin; e per rappresentare una particella dotata di spin (successiva equazione di Pauli) avrebbe per lo meno dovuto trattenere due componenti di campo.

E chi più ne ha più ne metta. V'è tutta una serie di ulteriori corrispondenze:

- $\Psi\Psi^*$  è l'energia del campo (\*), e normalizzando a 1 si ottiene la "probabilità di dove trovare la particella" (lo credo bene: è la sua distribuzione di energia);
- il pacchetto si disperde:  $\psi(z, t)$  dopo un po' sparisce (traduzione: la guida d'onda è dispersiva, la velocità di gruppo è funzione della frequenza per cui le varie componenti dello spettro di Fourier di un pacchetto d'onde dopo un po' si disfano).

Eccetera eccetera. A causa di questi indizi dobbiamo, io credo, esaminare le possibili relazioni fra le equazioni del 1° ordine, cioè di Maxwell e di Dirac. Fino ad ora abbiamo direi chiaramente compreso significati e relazioni fra le equazioni del 2° ordine. Dall'esame delle equazioni del 1° ordine possiamo aspettarci tutto quell'arricchimento enorme di significati che apportano ... le equazioni di Maxwell ... rispetto alla assai più banale equazione d'onda. Da ciò che abbiamo visto sul ruolo di "trucco" esercitato dal  $k_c^2$ , che viene trasportato dal 1° al 2° membro modificando così apparentemente la equazione dalla equazione d'onda alla equazione di Klein Gordon, possiamo aspettarci un gioco (o un ruolo) analogo sulle equazioni del 1° ordine, cioè sulle equazioni di Maxwell.

In parole povere il sospetto è che la costante di separazione  $k_c$  (o  $\omega_0$ ) nelle equazioni di Maxwell venga trasportata dal 1° al 2° membro ingenerando così una approssimazione per onde piane o di "ottica fisica" per la quale vale l'equazione di Dirac.

Anche qui ci sarebbe da scrivere un libro ma passo oltre (\*\*).

Analizzo ora aspetti di fisica matematica e probabilmente non casuali accostamenti con la meccanica quantistica.

Esiste io penso in matematica (o in fisica matematica) tutto un analogo arricchimento di significati che comporta il passaggio allo studio del  $\partial^*$  rispetto allo studio del  $\partial\partial^*$ .

Il  $\partial^*$  come dice Hestenes non è mai stato trattato in fisica matematica semplicemente perché era ... un operatore sconosciuto in fisica matematica. Intere classi di polinomi e funzioni speciali, che

---

(\*)

Più precisamente  $\Psi\hat{T}\Psi^*$ , o  $F\hat{T}F^*$  per il campo elettromagnetico, dà quadrivettore energia e impulso, vedi miei scritti successivi (n.d.r.)

---

(\*\*)

Ho affrontato e risolto questo aspetto in miei scritti successivi (n.d.r.)

erano tutti noti da equazioni del 2° ordine, vengono riportati alla soluzione di equazioni del 1° ordine (come vedremo, funzioni di Bessel  $J_n$ , spherical Bessel functions  $j_n$ , Legendre polynomials  $P_l^m$  eccetera) con tipi di legami che io assimilo a quelli fra  $e^{i\varphi}$  e  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  che non conoscevamo fintantoché definivamo le parti  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  tramite equazioni differenziali alle derivate seconde, senza accorgerci che la vera funzione (e la formula di Eulero) sono definiti da un'equazione differenziale alle derivate prime. Eccetera. Questo, almeno, è ciò che sembra a me.

Il “posto” migliore per porci tali tipi di domande è ancora una volta un problema di guide d'onda, in simmetria circolare (non sezione rettangolare) nella quale, presumibilmente, formule di polarizzazione circolare o di “spin” assumono la loro forma più spontanea.

Dobbiamo quindi esaminare in un certo dettaglio le soluzioni in guida circolare, con la separazione delle variabili operata non con il  $k_c^2$  al 2° ordine ma con un (presumibile)  $k_c$  al 1° ordine ... cioè nelle equazioni di Maxwell ... cioè sulla equazione  $\partial^* F = 0$ .

Il problema è che ..... nessuno si è mai posto il problema di separare le variabili nelle equazioni di Maxwell, al 1° ordine, di solito lo si fa nella equazione d'onda; non fosse altro perché nessuno in fisica matematica ha mai usato l'operatore  $\partial^*$  non fosse altro perché ... non c'era (o forse qualcuno negli Stati Uniti l'ha fatto. Se qualcuno l'ha fatto e si è imbattuto in raggi carichi, qualcun altro penso si sia posto la domanda “potrebbero essere utili questi raggi carichi per spararli addosso a qualcuno?”).

Lo farò nel prossimo paragrafo.

## 9 – Le funzioni analitiche in guida circolare

Il problema della separazione delle variabili nella equazione del 1° ordine in guida circolare

$$\partial^* F = 0$$

è di una semplicità ed eleganza notevole (dopo fatto) anche se mi dilungherò a lungo nei passaggi, ed è propedeutico al più generale problema in  $x, y, z, \tau$  che poi sarebbero .... le cavità sferiche.

La equazione sopra, cioè la equazione di Maxwell in guida circolare, si pone, da un punto di vista squisitamente di fisica matematica, come il “ricercare le funzioni analitiche che siano funzione delle coordinate  $x, y, \tau$ ”.

(Risolverò il problema per il campo elettromagnetico “a riposo” per non introdurre noiosamente una ulteriore dipendenza da  $z$ , tanto è ovvia).

I gruppi di ricerca internazionali sull'algebra di Clifford hanno, secondo me, scoperto un “giochino che funziona” in modo eccezionale e dà risultati matematici a iosa, solo che non avendo capito perché funziona (cioè, che funziona perché non vuol dire assolutamente niente, se non il fatto, importantissimo, di precisare il nostro linguaggio, e le funzioni che intendiamo usare nel nostro linguaggio) partono dalle questioni già di per sé complicate, tipo la equazione di Dirac, le “monogenic functions”  $\Psi_l^m$ , per andare all'insù come complicazione (algebra di Lie, spazi a  $n$  dimensioni, simmetrie SU(3) e SU(4), famiglie di particelle) perché ovviamente essendo matematici, generalizzano. Cioè, ciò che è il punto di partenza, già di per sé nuovo, e difficile da apprezzare e da capire, per capirlo lo generalizzano.

Invece secondo me è importante venire all'ingiù, cioè riesaminare tutti i casi più elementari che ci hanno insegnato come strutture di base della fisica matematica o dei campi elettromagnetici, per riuscire a maneggiare e apprezzare questi nuovi strumenti; per rispondere alla famosa domanda fondamentale della fisica: “ma noi, cosa diavolo stavamo dicendo?”.

Dunque, tornando alla separazione delle variabili nella equazione  $\partial^* F = 0$  in guida circolare, noi non abbiamo nemmeno la più pallida idea di come, o cosa voglia dire, separare le variabili. Esiste, per esempio, un problema di anticommutatività fra indici, per cui le usuali scritture nelle quali una soluzione si tenta di scomporla per esempio nella forma

$$F(\rho, \varphi, t) = R(\rho)\Phi(\varphi)T(t)$$

qui come si scrive? (perché non è indifferente l'ordine con cui si scrivono i termini).

Procedo per tentativi e suppongo, per vari motivi, di porre

$$F = F_1(x, y)e^{-i\omega_0\tau}$$

Faccio l'ipotesi che  $F_1(x, y)$  contenga eventuali indici esempio  $1, i, Ti, T$  e suppongo un termine  $e^{-i\omega_0\tau}$  con l'indice  $i$  che (in quanto bivettore  $i = \hat{i}\hat{j}$ ) produce rotazioni sul piano  $x, y$  (\*).

Dire che la soluzione ha quella forma equivale a dire che c'è un  $k_c$ , un autovalore per l'energia a

riposo  $\omega_0$  ovvero per l'operatore  $\frac{\partial}{\partial\tau}(F)i$  che fornisce  $\frac{\partial F}{\partial\tau}i = \omega_0 F$ . Quindi l'operatore corretto che dà un autovalore  $\omega_0$  sulla funzione  $e^{-i\omega_0\tau}$  o meglio sulla funzione  $F = F_1 e^{-i\omega_0\tau}$  (dove  $F_1$  ha indici vari) è più o meno il solito della meccanica quantistica

$$i \frac{\partial F}{\partial\tau} = \omega_0 F$$

ma in realtà è  $\frac{\partial F}{\partial\tau}i = \omega_0$  (è fondamentale la posizione di  $i$  a destra).

(\*)

Non mi ricordo assolutamente perché ho deciso di scegliere arbitrariamente il segno  $e^{-i\omega_0\tau}$  invece di  $e^{+i\omega_0\tau}$ . Probabilmente ho deciso di scegliere il segno  $e^{-i\omega_0\tau}$  invece di  $e^{+i\omega_0\tau}$  solo allo scopo di meglio proporre una analogia con la meccanica quantistica dove l'operatore dell'energia è  $i \frac{\partial F}{\partial\tau}$ , e produce con  $e^{-i\omega_0\tau}$  il risultato  $i \frac{\partial F}{\partial\tau} = \omega_0 F$  ovvero un autovalore  $+\omega_0$  positivo per l'energia (n.d.r.).

Ma per farla breve, riassumendo, a parte “autovalori per l’energia”, ho da risolvere la equazione:

$$\partial^* F = 0$$

$$\partial_{xy}^* F + T \frac{\partial}{\partial \tau} F = 0 \quad \partial^* = \partial_{xy}^* + T \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Pongo, con  $F_1 = F_1(x, y)$  con indici vari:

$$F = F_1(x, y) e^{-i\omega_0 \tau}$$

ed ottengo:

$$\partial_{xy}^* F_1 e^{-i\omega_0 \tau} + T \frac{\partial}{\partial \tau} (F_1 e^{-i\omega_0 \tau}) = \partial_{xy}^* F_1 e^{-i\omega_0 \tau} - T \omega_0 F_1 i e^{-i\omega_0 \tau} = 0$$

Si può dunque (in barba ad indici anticommutativi in  $F_1$ ) semplificare un  $e^{-i\omega_0 \tau}$  da destra e si ottiene la nuova equazione, avendo distinto le variabili  $x, y$  o  $(\rho, \varphi)$  da  $\tau$ :

$$\partial_{xy}^* F_1 - T \omega_0 F_1 i = 0$$

Scrivendo in modo esplicito  $\partial_{xy}^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$  e ammettendo la possibilità di un possibile doppio degno per  $k_c = \omega_0$  si giunge infine all’ equazione (\*):

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = \pm T k_c F i$$

che è l’equivalente al 1° ordine della (2) del precedente paragrafo

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -k_c^2 F$$

Abbiamo quindi trovato l’equivalente al 1° ordine della separazione delle variabili nell’equazione d’onda (la cosa che subito si nota, fra l’altro, è che ci sono due possibili costanti di separazione che corrispondono al  $k_c^2$ , cioè  $+k_c$  e  $-k_c$ ).

Pongo ora, cercando un possibile TE,  $F_1$  in questa forma:

$$F_1 = E + TH$$

dove ipotizzo  $E$  con indici  $1, i$  e  $H$  pure con indici  $1, i$  in quanto mi aspetto componenti per un TE a riposo,  $E_x, E_y, H_z$  o  $E_r, E_\varphi, H_z$  (vedi Ramo Whinnery) e però mi aspetto anche che il termine  $e^{-i\omega_0 \tau}$  generi, per rotazione, gli indici  $1, i$  che in  $E = E_x + iE_y$  restano tali, mentre in  $TH$  gli indici, con la “rotazione” prodotta dall’esponenziale  $e^{-i\omega_0 \tau}$ , passano da  $TH_\tau$  a  $TiH_z$  e da  $TiH_z$  a  $TH_\tau$ .

Brevemente, mi aspetto componenti  $E_x, E_y, H_z, H_\tau$  e indici  $1, i, Ti, T$ .

Sostituendo e separando gli indici si ha:

$$\partial_{xy}^* F_1 - T \omega_0 F_1 i = \partial_{xy}^* (E + TH) - T \omega_0 (E + TH) i = 0$$

$$\partial_{xy}^* E - \omega_0 H i = 0$$

$$\partial_{xy}^* TH - T \omega_0 E i = 0$$

Osservo che  $\partial_{xy}^* T = T \partial_{xy}$  e quindi sostituendo e semplificando  $T$  da sinistra arrivo infine al seguente sistema di due equazioni tra grandezze complesse  $1, i$ :

(\*)

Quindi la chiave di lettura è: se la  $F_1$  è analitica sul piano trasverso,  $\partial_{xy}^* F_1 = 0$ , si ha un campo statico e, in moto, un TEM, la massa è zero. Se cade la analiticità sul piano  $x, y$ , c’è massa. La massa si presenta dunque come l’ autovalore dell’ operatore  $\partial_{xy}^*$  (in spazio sarà  $\partial_{xyz}^*$ ).

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^* E - \omega_0 H i &= 0 \\ \partial_{xy} H - \omega_0 E i &= 0\end{aligned}$$

Passo in coordinate  $r, \varphi$  dove è (come mi sembra di avere già scritto altrove):

$$\partial^* = \frac{r^2}{r^2} \partial^* = \frac{z z^*}{r^2} \partial^* = \frac{z}{r} \frac{1}{r} z^* \partial^* = e^{i\varphi} \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

e quindi  $\partial = e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$  per cui ho il sistema:

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) E - \omega_0 H i &= 0 \\ e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) H - \omega_0 E i &= 0\end{aligned}$$

Tento ora una separazione fra le due restanti variabili  $r$  e  $\varphi$ .

Pongo per questo:

$$\begin{aligned}E &= R_E \Phi_E \\ H &= R_H \Phi_H\end{aligned}$$

e sostituisco

$$e^{i\varphi} \left( \frac{\partial R_E}{\partial r} \Phi_E + \frac{i}{r} \frac{\partial \Phi_E}{\partial \varphi} R_E \right) - \omega_0 R_H \Phi_H i = 0$$

$$e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial R_H}{\partial r} \Phi_H - \frac{i}{r} \frac{\partial \Phi_H}{\partial \varphi} R_H \right) - \omega_0 R_E \Phi_E i = 0$$

Una possibilità (guardando la prima equazione) per poter semplificare le funzioni angolari  $\Phi$ , lasciando così un'equazione per la sola variabile  $r$ , è che sia  $e^{i\varphi} \Phi_E = \Phi_H$ . In questo modo, fra primo e ultimo termine,  $e^{i\varphi} \Phi_E$  se ne va con  $\Phi_H$ .

Se è  $e^{i\varphi} \Phi_E = \Phi_H$  è pure  $\Phi_E = e^{-i\varphi} \Phi_H$  il che giustappunto è quello che serve per semplificare  $\Phi_E$  e  $e^{-i\varphi} \Phi_H$  nella seconda. D'altra parte questa doppia imposizione

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} \Phi_E &= \Phi_H \\ e^{-i\varphi} \Phi_H &= \Phi_E\end{aligned}$$

è semplicemente interpretabile come:

“ $\Phi_E$  gira, e  $\Phi_H$  gira con un giro  $e^{i\varphi}$  in più”. Cioè:

$$\begin{aligned}\Phi_H &= e^{i(n+1)\varphi} \\ \Phi_E &= e^{in\varphi}\end{aligned}$$

con ciò, derivando, si ottiene (\*):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_H}{\partial \varphi} &= i(n+1)\Phi_H \\ \frac{\partial \Phi_E}{\partial \varphi} &= in\Phi_E\end{aligned}$$

per cui, sostituendo il tutto, si ottiene una megasemplificazione e resta:

(\*)

Nota bene: questo equivale agli autovalori  $(n+1)$  e  $n$  per l'operatore del momento angolare orbitale  $L_z$ . Infatti

$$-i \frac{\partial \Phi_H}{\partial \varphi} = (n+1)\Phi_H \quad \text{e} \quad -i \frac{\partial \Phi_E}{\partial \varphi} = n\Phi_E$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_H}{\partial r} + \frac{1}{r}(n+1)R_H - iR_E &= 0 \\ \frac{\partial R_E}{\partial r} - \frac{1}{r}nR_E - iR_H &= 0 \end{aligned}$$

Queste equazioni hanno una struttura che si ripresenta più e più volte in meccanica quantistica (\*) (esempio in Schiff, Bjorken e Drell, Landau. Hanno la struttura delle equazioni per la parte radiale delle 2 componenti spinoriali dell'equazione di Dirac per l'atomo di Idrogeno).

Hanno una struttura ..... che si ripresenta sempre perché è l'equivalente al 1° ordine di "usuali", "abituali" equazioni alle derivate seconde. Qui queste equazioni sono le equazioni al 1° ordine equivalenti alla equazione di Bessel (che si presenta ... come un'equazione del 2° ordine).

Infatti se ricavo  $R_H$  dalla seconda e sostituisco nella prima (e viceversa per  $R_E$ ) ottengo indifferentemente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_E}{\partial r} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) R_E &= 0 \\ \frac{\partial^2 R_H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_H}{\partial r} + \left(1 - \frac{(n+1)^2}{r^2}\right) R_H &= 0 \end{aligned}$$

risolte dalle  $J_n, J_{n+1}$  (o anche  $N_n, N_{n+1}$  o  $H_n^{(1)}, H_{n+1}^{(1)}$  e chi più ne ha più ne metta).

Le equazioni del 1° ordine (che come vedremo fra un po' sono anche una singola equazione complessa alle derivate parziali prime) pongono però in evidenza che esiste "un raggruppamento particolare" delle funzioni di Bessel che ha senso, una "coppia" ben precisa (che è l'equivalente di dover prendere non già le  $\cos n\varphi, \sin n\varphi$  bensì la funzione  $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ ).

Prendiamo per esempio  $R_H = iJ_{n+1}$

$$H = iJ_{n+1}(r)e^{i(n+1)\varphi}$$

Sostituendo nella equazione del 1° ordine che dà  $R_E$  si ha:

$$R_E = \frac{\partial J_{n+1}}{\partial r} + \frac{1}{r}(n+1)J_{n+1} = J_n$$

Valgono infatti per le equazioni di Bessel le seguenti equazioni ricorsive (che altro non sono .... che il sistema di equazioni differenziali del 1° ordine .... valide per le  $J_n, N_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{n-1}}{\partial r} - \frac{n-1}{r}J_{n-1} + J_n &= 0 \\ \frac{\partial J_n}{\partial r} + \frac{n}{r}J_n - J_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Riassumendo e ricombinando il tutto arriviamo al risultato finale: la soluzione  $F$  è del tipo

$$F = (J_n e^{in\varphi} + T i J_{n+1} e^{i(n+1)\varphi}) e^{-i\omega_0 \tau}$$

Dico "del tipo" perché:  $n$  può essere qualunque e in particolare abbiamo stati a  $n > 0$  e stati a  $n < 0$ ; poi abbiamo le corrispondenti soluzioni con  $e^{+i\omega_0 \tau}$ ; e le funzioni di Bessel potrebbero essere le funzioni di Hankel o che so io, e comunque si presenterebbero in coppia; eccetera.

Sommando soluzioni  $e^{-i\omega_0 \tau}$  a  $n$  positivo e  $n$  negativo e poi combinandole con la corrispondente coppia ma con  $e^{+i\omega_0 \tau}$  vengono fuori i campi TE in guida circolare. Le singole soluzioni invece hanno carica ( $\frac{\partial H_r}{\partial \tau}$ , positiva o negativa) e massa  $m_0$  (positiva o negativa).

(\*)

In realtà probabilmente sarebbe stato meglio porre  $H$  nella forma  $H = R_H \Phi_H i$  ma non ho voglia di rifare i conti. Se avessi posto  $H = R_H \Phi_H i$ , nelle equazioni non sarebbe comparso l'antiestetico  $i$  in  $iR_E$  e  $iR_H$ . Inoltre ho posto  $\omega_0 = 1$  per comodità.

Misurando lo spin della soluzione  $F$  o meglio misurando il momento angolare orbitale  $L_z$  (insomma, facendo  $-i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ) si osserva che il 1° termine di campo elettrico dà un autovalore  $n$ . Il 2° dà un autovalore  $n + 1$ .

$F$  nel suo complesso non dà un autovalore per l'operatore  $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

Tuttavia si può vedere che l'altro operatore che già ho scritto,  $J_z$ , quello del momento angolare totale (orbitale + spin)

$$J_z = L_z + S$$

dà un autovalore ..... che è intermedio fra  $n$  e  $n + 1$  ed è  $n + \frac{1}{2}$ .

“Il momento angolare delle soluzioni analitiche  $F$  ha un valore semintero composto da un momento angolare orbitale  $n$  e uno spin  $1/2$ ”. (Altre soluzioni hanno invece spin  $-1/2$ ).

È un modo di dire? Io non lo so, quello che so è che le soluzioni esatte dei campi elettromagnetici in guida circolare si ottengono mediante combinazioni (\*) di soluzioni, dotate di carica e corrente, e di massa a riposo  $\omega_0$ , che si muovono con massa, energia e impulso obbedienti alle relazioni meccaniche previste dalla relatività per le particelle di massa  $m_0 = \omega_0$ , e che mostrano valori seminteri come autovalori dell'operatore  $J_z$  del momento angolare totale. Fittizie? Boh!

Riesaminando la soluzione finale si nota una curiosa particolarità cioè che nella espressione

$$F = (J_n e^{in\varphi} + T i J_{n+1} e^{i(n+1)\varphi}) e^{-i\omega_0 \tau}$$

le variabili  $r, \varphi$  non appaiono separate (come sono, invece, nelle singole parti  $E$  ed  $H$ ). Infatti la parentesi non appare come il prodotto fra una funzione di  $\varphi$  e una funzione di  $r$ .

Tuttavia (sfruttando  $e^{-i\varphi/2} T = T e^{+i\varphi/2}$ ) si ha la nuova espressione

$$F = e^{-i\varphi/2} (J_n + T i J_{n+1}) e^{i(n+1/2)\varphi} e^{-i\omega_0 \tau}$$

dove  $r, \varphi$  e  $\tau$  sono separate. È comparsa la particolare “Bessel function ipercomplessa” costituita dall'insieme  $(J_n + T i J_{n+1})$ , con indici  $1, i, T i, T$  e nello stesso tempo è comparso l'esponenziale  $e^{i(n+1/2)\varphi}$  con l'esponente  $(n + \frac{1}{2})$ . Ci viene dunque il sospetto che tutto ciò sia legato al particolare operatore che ha autovalori su  $F$

$$J_z F = (n + \frac{1}{2}) F$$

Ripartiamo dall'inizio cercando  $F$  come autofunzione dell'operatore  $J_z$  con autovalore  $(n + \frac{1}{2})$ .

Si arriva così con un po' di passaggi alla equazione per la parte radiale (\*)

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r} i - \frac{i}{r} \left( n + \frac{1}{2} \right) \mathfrak{F} + \frac{1}{2r} \mathfrak{F} i - T \omega_0 \mathfrak{F} = 0$$

Questa equazione differenziale del 1° ordine fornisce in un sol colpo le funzioni di Bessel  $J_n$  nella forma “ipercomplessa”  $\mathfrak{F}(r) = J_n + T i J_{n+1}$  e le equazioni ricorsive fra esse.

(Non solo le  $J_n$ , ma anche  $N_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$ )

Se pongo  $\mathfrak{F} = R_E + T R_H$  ottengo

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_E}{\partial r} - \frac{n}{r} R_E + i \omega_0 R_H &= 0 \\ \frac{\partial R_H}{\partial r} + \frac{n+1}{r} R_H + i \omega_0 R_E &= 0 \end{aligned}$$

cioè il solito sistema di equazioni con le solite soluzioni (è scritto diverso dal precedente perché questa volta (\*) ho cercato soluzioni con  $e^{+i\omega_0 \tau}$ ).

(\*)

Per i passaggi dettagliati vedi Appendici

Questo esercizio serve se non altro a far capire questo: la insorgenza di concetti quali “autovalori del momento angolare totale” o “momento angolare orbitale” o “spin  $\frac{1}{2}$ ” non appare necessariamente in connessione con la meccanica quantistica. L’esercizio testé svolto, di risolvere la  $\partial^* F = 0$ , può, infatti, essere pensato non come un esercizio di meccanica quantistica bensì:  
un esercizio sulle guide d’onda circolari;  
ma anche  
un esercizio di fisica sulle membrane circolari;  
ma anche  
un esercizio di matematica sulle funzioni analitiche. Questi sono i fatti.



## 10 – Disegno delle soluzioni “cariche” in guida circolare

Fornisco solo alcune indicazioni sul “plotting” dei campi perché è troppo noioso esaminare le varie soluzioni.

Prendiamo alcuni stati a  $n$  più basso possibile:

$$F = (J_0 + T i J_1 e^{i\varphi}) e^{-i\omega_0 \tau}$$

$$F = (J_0 - T i J_1 e^{i\varphi}) e^{+i\omega_0 \tau}$$

oppure anche ( $J_{-1} = -J_1$ )

$$F = (J_{-1} e^{-i\varphi} + T i J_0) e^{-i\omega_0 \tau}$$

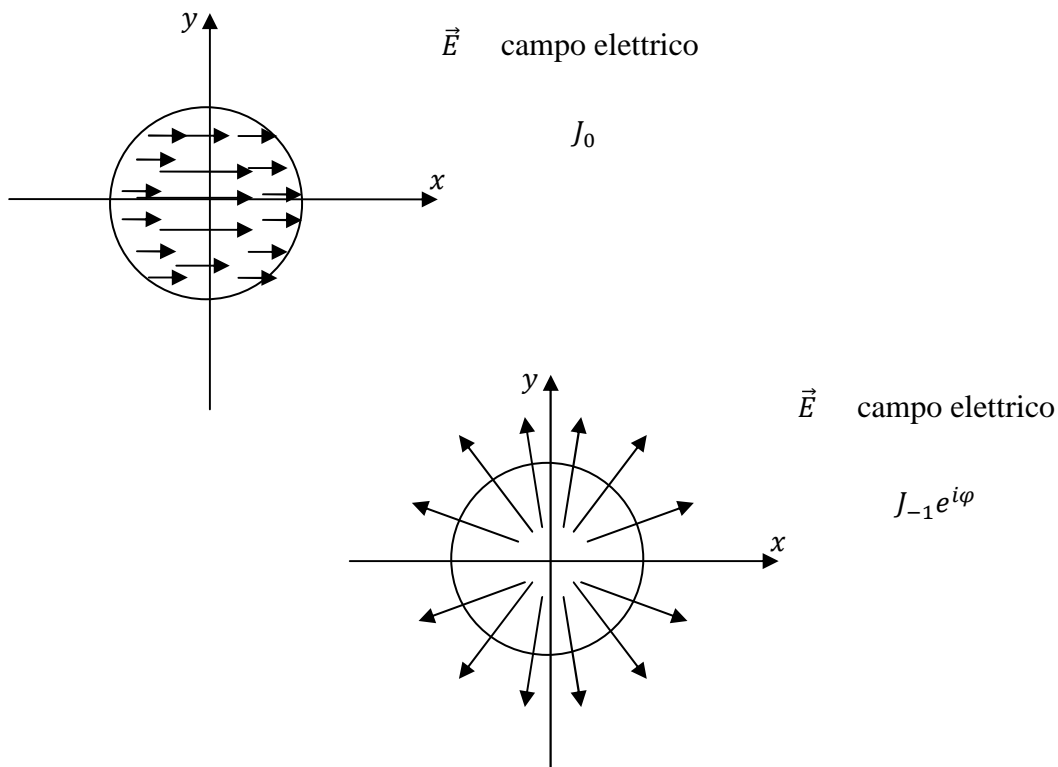
$$F = (J_{-1} e^{-i\varphi} - T i J_0) e^{+i\omega_0 \tau}$$

o combinazioni. Per il plotting dei campi conviene procedere così.

1) dappprincipio si fissa il tempo  $t$ . Si disegna così una situazione di campo elettrico  $E$  congelata sul piano  $x, y$  che successivamente ruota in modo rigido tramite l'operatore  $e^{\pm i\omega_0 \tau}$  che induce rotazioni sul piano  $x, y$ .

2) si passa ai coniugati.

3) si considera separatamente il campo elettrico, che ha componenti  $E_x, E_y$  ovvero  $E_r, E_\varphi$  sul piano  $x, y$ . Ad esempio:

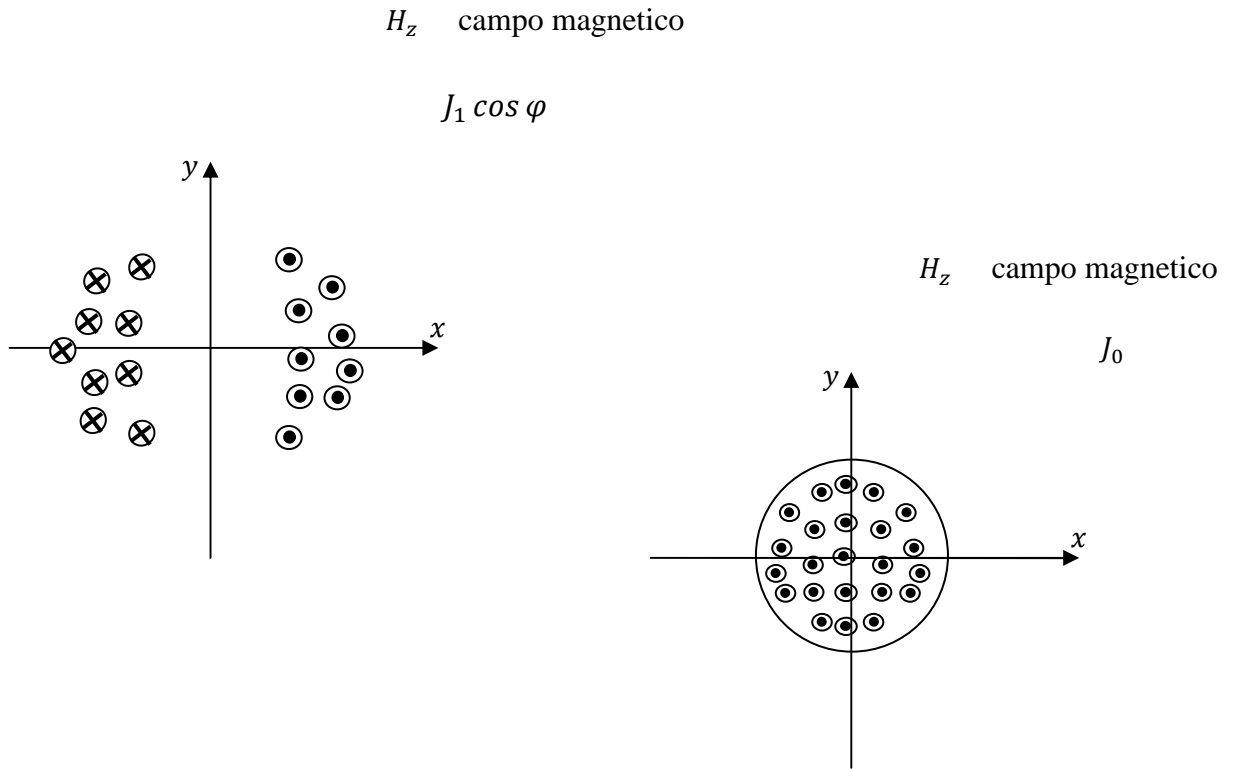


4) il campo magnetico (\*) ha componenti  $T, Ti$  quindi  $H_\tau, H_z$  (conviene per questo separare  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  e quindi separare  $H_z$  da  $H_\tau$ ).

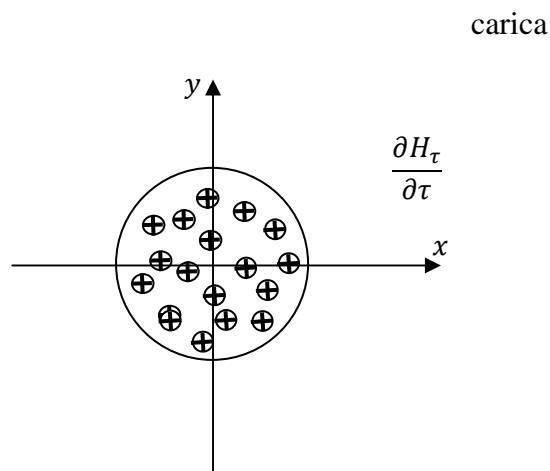
(\*)

Nota bene: l'operatore  $e^{\pm i\omega_0 \tau}$  non induce rotazioni sul piano  $x, y$  sulle componenti  $H_z$  e  $H_\tau$ . Esse pulsano con legge  $\cos \omega_0 t$  e  $\sin \omega_0 t$ . Possono essere disegnate a un  $t$  prefissato, poi pulsano.

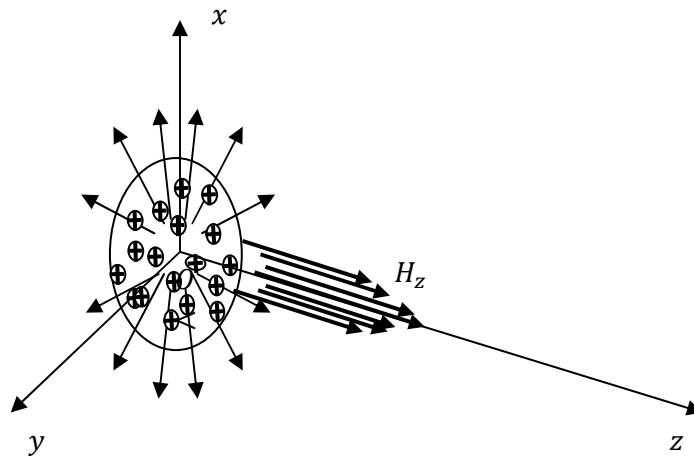
5) si disegna  $H_z$  (esempio  $TiJ_1 \cos \varphi$  oppure  $J_0$ )



6) si disegna la carica elettrica  $\frac{\partial H_\tau}{\partial \tau}$  (ad esempio con  $H_\tau = J_0 \sin \omega_0 t$  si fa la derivata e poi si disegna)



Complessivamente per esempio si hanno soluzioni in cui una carica pulsa scambiandosi con una componente  $H_z$ .



7) volendo si possono disegnare le correnti.

8) ci si può cimentare nell'interpretare i vari campi elettrici e magnetici che insorgono, mettendoli in relazione alle cariche e correnti che li generano.

I significati sono oscuri.

Nota bene: dal punto di vista fisico il campo elettromagnetico si autosostiene, con termini di vettore di Poynting (energia e impulso del campo) che sono in relazione con la forza di Lorentz in ciascun punto.

In ogni punto la forza di Lorentz induce su ogni elemento di carica in quel punto una variazione di energia e impulso del campo che, tra loro, si autosostengono.

## 11 – Soluzioni analitiche in 4D, ovvero cavità sferiche

Da semplici “elettricisti”, avendo interpretato le equazioni di Dirac come una approssimazione di ottica fisica di “raggi pesanti e dotati di carica elettrica”, possiamo permetterci di trovare le configurazioni orbitali dell’elettrone nell’atomo di idrogeno (\*).

Possiamo trattare questo problema senza nessun riferimento alla meccanica quantistica.

In realtà, avendo noi chiaro il tipo di approssimazione, siamo portati (almeno io sono portato) a guardare con molta cautela il tipo di configurazione spaziale delle componenti di campo che ne risulta (\*\*).

Ciò di cui possiamo maggiormente fidarci sono ..... i valori propri o autovalori dell’energia (potremmo chiamarli: le frequenze proprie di oscillazione) che risultano dalla soluzione.

Tuttavia stranamente (e questo va detto in omaggio alla formidabile capacità delle approssimazioni di ottica fisica) se ne ricava anche una informazione sulla distribuzione spaziale delle “orbite”, che sono descritte .... dalle  $\psi_l^m$ , e sono enumerate dalle  $\psi_l^m$ .

Peraltro invece risulta del tutto chiaro e inambiguo il problema delle cavità sferiche, dove i modi di oscillazione sono anch’essi descritti dalle  $\psi_l^m$ , ed enumerati dalle  $\psi_l^m$ . In questo secondo caso (delle cavità) non v’è nessuna ambiguità interpretativa sul fatto che le componenti di campo siano descritte, nella loro distribuzione spaziale, dalle soluzioni dell’equazione di Maxwell  $\partial^* F = 0$ .

Naturalmente, almeno presumo perché per pigrizia non l’ho fatto, anche qui, come nel caso delle guide d’onda, acconce somme e differenze delle soluzioni forniscono il campo elettromagnetico.

Conclusione: esistono forti sospetti di parentela fra i due casi: i possibili modi nelle cavità e le orbite degli elettroni negli atomi. La corrispondenza fra i due casi è uno a uno. Gli stati sono gli stessi. Le configurazioni (angolari) descritte dalle  $\psi_l^m$  sono le stesse.

Gli uni si presentano come configurazioni di campo; gli altri (le orbite) come configurazioni cariche; però (nelle cavità) combinazioni di configurazioni cariche di carica opposta (\*\*\*) danno i campi. Ognuno può fantasticare su ciò che ne segue, secondo la propria personale fantasia (ad esempio, anche se le cose non stanno in questi termini semplici, si potrebbe ricorrere a questa immagine pittoresca: i campi sono fatti di  $e^+$  ed  $e^-$ . Se qualcuno rimuove un  $e^+$  da un campo elettromagnetico, resta la configurazione spaziale di un’orbita elettronica (di un  $e^-$ ).

Se invece ad un campo  $e^-$  si aggiunge un campo  $e^+$ , si ottiene un campo elettromagnetico “neutro”, cioè la oscillazione in una cavità.

Peraltro la aggiunta di un modo di oscillazione “neutro” ad un’orbita “carica”, fa passare ad un’altra orbita carica, “più eccitata” della precedente. E viceversa. Si passa da un’orbita carica ad una seconda, di livello energetico inferiore, mediante la emissione di un campo elettromagnetico “neutro”).

Faccio ora una lunga digressione.

---

(\*)

O anche atomo generici, di carica nucleare  $+Ze$  ( $Z = 1,2,3,\dots$ ). Vedi paragrafo 12.

---

(\*\*)

Distinguo qui fra un descrizione di dettaglio (di più o meno ipotetiche “componenti di campo”) e una descrizione di tipo più integrale riguardante la distribuzione spaziale delle orbite (n.d.r.).

---

(\*\*\*)

Da notare che (vedi Bjorken Drell) l’equazione di Dirac per l’atomo fornisce entrambe le soluzioni. Le soluzioni con  $e^+$  vengono scartate ovvero interpretate come positroni o antimateria.

In tutto questo discorso esistono enti geometrici elementari che sono le  $\Psi_l^m$  o le  $\psi_l^m$ , che dominano la scena. Le  $\psi_l^m$  sono le analoghe tridimensionali .... delle distribuzioni angolari  $e^{in\varphi}$ .

Le  $\Psi_l^m$  .... sono le analoghe delle entità geometriche (o numeriche) elementari  $z^n$  e  $1/z^n$  del piano.

Perché ciò avviene?

Stiamo scoprendo, come dice il gruppo di Cambridge, le proprietà dello spazio e del tempo?

Niente di tutto questo. La questione, secondo me, è la seguente:

che probabilità ci sono che gli enti elementari del nostro linguaggio differiscano (per così dire) dalle particelle elementari?

La risposta è secondo me (se il linguaggio è “centrato”): nessuna.

E quindi non dovremmo meravigliarci che ciò avvenga. In fondo è un problema nostro. In fisica sfugge troppo spesso una realtà elementare, che è ovvia, ma che poi viene dimenticata con frasi tipo “ho trovato la legge di ...”, “ho scoperto”. In fisica noi non possiamo che raccontare ciò che avviene. O tentare di raccontare. Hestenes mi scrisse (in risposta a mie strane elucubrazioni) “nessuno ti darà credito, se non spiegando le interazioni dell’elettrone”. Giusto, Tuttavia, se vogliamo sottilizzare, noi non possiamo spiegare le interazioni dell’elettrone.

Noi non possiamo spiegare l’elettrone: possiamo raccontare l’elettrone (che è lì).

Ora se ci si pensa (questa è una dizione probabilmente inesatta ma suggestiva) noi diciamo che i corpi sono fatti di atomi, di particelle elementari eccetera, e le funzioni sono fatte di zeri, poli eccetera. Componiamo i corpi con gli atomi e le funzioni le componiamo con funzioni elementari. Sarebbe saggio, anche se non obbligatorio, che le entità elementari del linguaggio matematico coincidessero con le realtà elementari della realtà circostante che intendiamo raccontare. Ecco perché può ragionevolmente accadere questo fatto: le particelle elementari sono i numeri di base. Lo sono, non per una magia dell’estetica, o per una coincidenza, ma perché noi, nel giro e rigiro secolare di pensiero e di matematica e di leggi fisiche, non possiamo che confluire, più o meno inconsciamente, nell’identificare le entità elementari che per somma danno i corpi con le entità elementari con cui per somma formiamo le funzioni. In parole povere le  $z^n$ ,  $z^{-n}$  o le analoghe 3D  $\Psi_l^m$  ..... sono .....(ripeto, questa appare come una possibilità, ma è una ragionevole possibilità) .... sono per forza gli enti fisici elementari.

Ecco perché le  $z^n$ ,  $z^{-n}$  o le analoghe 3D  $\Psi_l^m$  compaiono nella entità elementare “idrogeno”  $H_1^1$ .

Si potrà dire: ma non è così. Non è ancora esattamente così. Non tornano esattamente le cose. Bene: direbbe Schroedinger:”ai miei tempi si diceva che la ricerca non è ancora finita”.

Io penso che è certo (\*) che la cosa possa avere una soluzione.

Bene (e questo è l’ultimo punto con cui termino questa lunga digressione) qui c’è di più.

C’è molto di più. Anzi ci sono due cose in più.

Primo: qui ci sono un sacco di cose che tornano; sembra che ci siano un sacco di cose che tornano. Si potrebbe pensare che abbiamo scoperto l’elettrone. Noi avremmo semmai (se funziona) scoperto il linguaggio adatto. Ecco, allora, cosa c’è di magico, o che può sembrare a volte misterioso, a volte mistico, a volte difficile da capire nei suoi perché, oppure .... “interessante”, o altrimenti estetico, oppure incomprensibile, o magari irrelevante. Questo in funzione della fantasia di chi guarda.

---

(\*)

Far coincidere le entità elementari del nostro linguaggio con le particelle elementari, esempio l’elettrone non è un problema dell’elettrone, ma è un problema nostro. Di più, è chiaro che ciò è possibile; basta cambiare il linguaggio (finché la cosa non riesce, finché non s’è trovato il linguaggio adatto).

Ecco perché le “potenze del numero” sono .... le orbite degli elettroni nell’atomo di idrogeno; e gli stati s, p, d ... (vedi dopo) coincidono con la enumerazione delle  $\psi_l^m$  (vedi dopo).

Secondo (e insisto che questo secondo me questo è l’aspetto più soddisfacente) avremmo, come posso dire, precisato, finalmente, e dichiarato, la nostra fondamentale “ignoranza”. Avremmo soltanto precisato la classe di funzioni che adopereremo nella descrizione dei fenomeni dello spazio e del tempo. Avremmo, anzi, dapprima precisato lo spazio e il tempo, con i loro versori, e le regole formali obbligate, conseguenti; e poi la classe di funzioni, analitiche, funzione del punto P dello spazio e del tempo. La legge generale valida in tutta la fisica è che noi usiamo quelle funzioni lì. La legge  $\partial^*F = 0$  non aggiunge nulla sulla sostanza di ciò che noi conosciamo del campo elettromagnetico (e così eventualmente sarebbe per le particelle elementari) .

Fine della digressione.

Tornando al tema, prima di risolvere l’equazione  $\partial^*F = 0$  stabiliamo una relazione preliminare che serve nei calcoli e che riguarda  $\frac{z^*}{r}$ . Esso in 3 dimensioni è l’analogo esatto ..... di  $\frac{z^*}{r}$  in due dimensioni ..... e cioè  $\frac{z^*}{r} = \frac{re^{-i\varphi}}{r} = e^{-i\varphi}$ . Questo analogo di  $e^{-i\varphi}$  stabilisce una relazione analoga alla relazione  $e^{i(l-1)\varphi} = e^{-i\varphi} e^{il\varphi}$  che connette gli stati  $l$  e  $(l - 1)$ . Qui vale una relazione analoga, ma un po’ diversa, che connette gli stati  $l$  (a  $l$  positivo o zero,  $l \geq 0$ ) con gli stati  $-(l + 2)$  (perché? Boh!).

La relazione in questione è (\*):

$$-\Gamma^* T \frac{z}{r} \psi_l^m = -(l + 2) T \frac{z}{r} \psi_l^m$$

Essa dice che se partiamo da uno stato  $\psi_l^m$  a  $l \geq 0$  le funzioni  $T \frac{z}{r} \psi_l^m$  hanno autovalore negativo del momento angolare e precisamente  $-(l + 2)$ .

(un buon esempio di ciò è la funzione analitica .....  $\Psi_0 = 1$  (ossia  $l = 0, \psi_l = 1$ ) a cui corrisponde la funzione  $\psi_{-2} = T \frac{z}{r} = \frac{z^*}{r} T$  che fa parte della funzione analitica  $\Psi_{-2} = r^{-2} \frac{z^*}{r} = \frac{z^*}{r^3}$  già incontrata).

La soluzione di  $\partial^*F = 0$  procede ora in stretta analogia (“mutatis mutandis”) con quanto avviene per le guide d’onda. È:

$$(1) \quad \partial^*F = 0$$

o anche

$$(2) \quad \partial_{xyz}^* F + T \frac{\partial}{\partial \tau} F = 0$$

Pongo

$$(3) \quad F = F_1(r, \vartheta, \varphi) e^{i\omega_0 t}$$

dove  $F_1(r, \vartheta, \varphi)$  ha indici vari. Scrivo (vedi paragrafo 4):

$$(4) \quad z^* \partial^* = r \frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^* \\ \partial_{xyz}^* = \frac{z}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \Gamma^* \right)$$

e sostituendo

$$(5) \quad \frac{z}{r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Gamma^* F_1 \right) + T F_1 \omega_0 i = 0$$

dove l’esponenziale è stato semplificato da destra. Pongo

$$(6) \quad F_1 = E_1 + T H_1$$

(\*)

Per i passaggi dettagliati vedi Appendici

da cui sostituendo nella (5) e separando le parti con e senza l'indice  $T$  si ottiene

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{z}{r} \frac{\partial E_1}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* E_1 + H_1 \omega_0 i = 0 \\ \frac{z}{r} \frac{\partial T H_1}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* T H_1 + T E_1 \omega_0 i = 0 \end{cases}$$

Per provare a separare  $r$  da  $\vartheta, \varphi$  “provo a porre

$$(8) \quad \begin{cases} E_1 = R_E \psi_l^m \\ H_1 = \frac{z}{r} \psi_l^m R_H i \end{cases}$$

la qual cosa mi serve per poter scrivere:

$$(9) \quad \begin{cases} -\Gamma^* E_1 = -\Gamma^* R_E \psi_l^m = R_E l \psi_l^m \\ -\Gamma^* T H_1 = -\Gamma^* T \frac{z}{r} \psi_l^m R_H i = -(l+2) T \frac{z}{r} \psi_l^m R_H i \end{cases}$$

Sostituendo nelle (7), si semplificano da sinistra tutti i termini quali  $\frac{z}{r} \psi_l^m$  o  $T \frac{z}{r} \psi_l^m$  e si ottiene, sempre ponendo per comodità  $\omega_0 = 1$ :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial R_E}{\partial r} - \frac{1}{r} l R_E - R_H = 0 \\ \frac{\partial R_H}{\partial r} + \frac{1}{r} (l+2) R_H + R_E = 0 \end{cases}$$

Ricavando  $R_H$  dalla prima e sostituendo nella seconda (e idem per  $R_E$ ) si ottiene

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 R_H}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_H}{\partial r} + \left(1 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}\right) R_H = 0 \\ \frac{\partial^2 R_E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_E}{\partial r} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R_E = 0 \end{cases}$$

Queste sono le note equazioni del 2° ordine per le “spherical Bessel functions”  $j_l$ , già risolte (Schiff, Stratton). Se si prende  $R_E = j_l$  le (10), a causa delle formule ricorsive (\*) fra le  $j_l$ , siamo obbligati a prendere  $R_H = -j_{l+1}$  per cui

$$(12) \quad F = (j_l \psi_l^m - T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i) e^{i\omega_0 t}$$

Questa è la soluzione per le cavità sferiche, del tutto analoga a quella per le guide cilindriche (\*\*). La enumerazione degli stati consegue alla enumerazione delle  $\psi_l^m$  (per ogni  $l$ ,  $(2l+1)$  valori per  $m$ , da  $m = l, l-1, l-2, \dots$  fino a  $m = -l$ ).

(\*)

Valgono infatti per le “spherical Bessel functions” le seguenti equazioni ricorsive (che altro non sono .... che il sistema (10) di equazioni differenziali del 1° ordine)

$$\begin{cases} \frac{\partial j_l}{\partial r} - \frac{l}{r} j_l + j_{l+1} = 0 \\ \frac{\partial j_{l+1}}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} j_{l+1} - j_l = 0 \end{cases}$$

(\*\*)

Solo successivamente sono riuscito qui a separare le variabili ( $\vartheta, \varphi$ ) e  $r$ , vedi Appendici (n.d.r.)

Esistono “stati a  $l$  negativo” per calcolare i quali riparto dalla (7).

Questa volta per separare  $r$  da  $\vartheta, \varphi$  “provo a porre”

$$(13) \quad \begin{cases} E_1 = T \frac{Z}{r} \psi_l^m R_E T \\ H_1 = T \psi_l^m T R_H i \end{cases}$$

la qual cosa mi serve per poter scrivere:

$$(14) \quad \begin{cases} -\Gamma^* E_1 = -\Gamma^* \left( T \frac{Z}{r} \psi_l^m R_E T \right) = -(l+2) \left( T \frac{Z}{r} \psi_l^m R_E T \right) \\ -\Gamma^* T H_1 = -\Gamma^* \psi_l^m T R_H i = l \psi_l^m T R_H i \end{cases}$$

Sostituendo nelle (7) si semplificano da sinistra tutti i termini quali  $\frac{Z}{r} \psi_l^m$  o  $\frac{Z}{r} T \frac{Z}{r} \psi_l^m$  e si ottiene, sempre ponendo per comodità  $\omega_0 = 1$ :

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial R_E}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} R_E - R_H = 0 \\ \frac{\partial R_H}{\partial r} - \frac{l}{r} R_H + R_E = 0 \end{cases}$$

Queste, considerate le equazioni ricorsive per le “spherical Bessel functions”

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_l}{\partial r} - \frac{l}{r} j_l + j_{l+1} &= 0 \\ \frac{\partial j_{l+1}}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} j_{l+1} - j_l &= 0 \end{aligned}$$

sono soddisfatte da  $R_H = j_l$  e  $R_E = j_{l+1}$ .

Il risultato finale è

$$F_1 = E_1 + T H_1 = T \frac{Z}{r} \psi_l^m j_{l+1} T + \psi_l^m T j_l$$

$$(16) \quad F = \left( T \frac{Z}{r} \psi_l^m j_{l+1} T + \psi_l^m T j_l \right) e^{i\omega_0 t}$$

(quindi qui  $-\Gamma^* E = -(l+2)E$  mentre nella (12)  $-\Gamma^* E = lE$ ).

Combinando “stati a  $l$  positivo e  $l$  negativo” e stati con  $+\omega_0$  e  $-\omega_0$  si ottengono i campi elettromagnetici nella cavità (immagino: non l’ho fatto ma deve funzionare per forza, perché  $\partial^* F = 0$  sono .... le equazioni di Maxwell).

La enumerazione degli stati, anche qui, presenta, per ogni  $l$ ,  $(2l+1)$  valori per  $m$  (da  $m = l, l-1, l-2, \dots$  fino a  $m = -l$ ).

Gli stati totali, fra positivi e negativi (sempre per  $\omega_0$  positivo) sono (coincidono con le  $\psi_l^m$  disponibili):

per $l = 1$	$2l + 1 = \mathbf{3}$ stati (+3 negativi)	<b>6</b> stati
per $l = 2$	$2l + 1 = \mathbf{5}$ stati (+5 negativi)	<b>10</b> stati
per $l = 3$	$2l + 1 = \mathbf{7}$ stati (+7 negativi)	<b>14</b> stati
per $l = 0$	$2l + 1 = \mathbf{1}$ stato (+1)	<b>2</b> stati



Ciò corrisponde alla enumerazione **s, p, d, f,...** degli elettroni (**2** elettroni nello stato **s**, **6** nello stato **p**, **10** nello stato **d**, **14** nello stato **f**).

Il fatto che io abbia, probabilmente, sbagliato qualche calcolo qua e là, non muta la sostanza della questione; tutta questa non è meccanica quantistica: è matematica, e proviene dalla tecnica di separazione delle variabili nella equazione  $\partial^*F = 0$ .

Oppure volendo, è elettromagnetismo; dove opportune combinazioni di soluzioni “fittizie”, con stati positivi e negativi e con soluzioni a  $+\omega_0$  e  $-\omega_0$  (\*), danno i modi possibili in cavità sferica. La enumerazione delle soluzioni e il loro tipo di distribuzione angolare  $\psi_l^m$ , corrisponde alle orbite degli elettroni nell’atomo. Possibile che sia solo una coincidenza?

Bene, la risposta potrebbe essere: sì.

Può benissimo essere una coincidenza: però una coincidenza costituita dal fatto che ci siamo sempre di mezzo noi. Una coincidenza costituita dal fatto che stiamo descrivendo analoghi fenomeni di base. Dei quali peraltro non sapremmo dire cosa siano, così come il campo elettromagnetico non sappiamo cosa è. Creiamo, in fondo, dei “modelli” rappresentativi della realtà. Ma (questo è il punto) mi pare che ciò che chiamiamo campo elettromagnetico inteso come  $\partial^*F = 0$  “generalizzato”, abbia già in sé tutte le complicazioni necessarie perché si possa “tentare” di descrivere, con esso, anche l’elettrone [6], [7], [8], [9]. Vanno, evidentemente, risolti ancora svariati problemi non chiari.

---

(\*)

Sempre se non ho sbagliato i conti, le soluzioni con  $-\omega_0$  si ottengono semplicemente moltiplicando per  $Ti$  da destra. Questa operazione lascia analitiche le soluzioni analitiche e si ha

$$(17) \quad F = (Tj_{l+1} \frac{Z}{r} \psi_l^m T - Ti j_l \psi_l^m) e^{-i\omega_0 t}$$

$$(18) \quad F = (+j_l \psi_l^m + T \frac{Z}{r} \psi_l^m j_{l+1} i) e^{-i\omega_0 t}$$

In tutte le (12), (16), (17), (18) va poi inserito  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

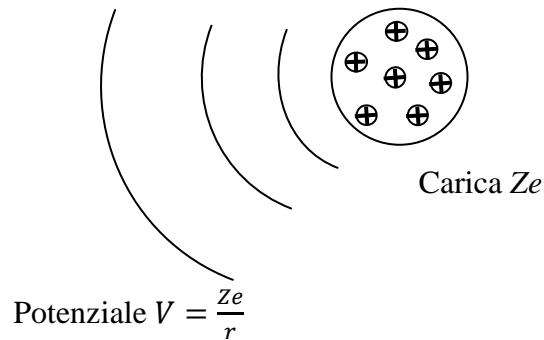
## 12 – Ottica fisica e derivazione euristica delle righe spettrali dell'atomo

Ho accennato a un tentativo di interpretazione della equazione di Dirac in qualche paragrafo precedente.

Ora però, per maggiore pulizia mentale, vorrei lasciare da parte l'equazione di Dirac e dimenticarla, ragionando in termini di ottica fisica [10], "euristicamente". Intendo qui per ottica fisica una approssimazione a raggi o per onde piane delle equazioni di Maxwell, quella cioè che abbiamo discusso parlando di guide d'onda. Supponiamo che qualche soluzione della  $\partial^*F = 0$ , approssimata per onde piane, rappresenti un pacchetto d'onde dotato di massa  $m_0$  (per massa intendo energia "a riposo"  $E_0 = \omega_0 = m_0$ ), e supporrò anche che esso sia carico, esempio con una carica negativa  $-e$ , ovvero risenta della presenza di campi elettrici esterni.

Ho già detto che il movimento di questo "raggio pesante e carico" possiamo descriverlo

introducendo acconciamente, oltre al valore di energia libera  $\omega$ , il valore di energia, esempio  $-\frac{Ze^2}{r}$ , allorquando esso transita nei pressi di una carica  $Ze$



introducendo, dicevo, questo valore di energia nella fase dell'onda, in modo che la traiettoria del pacchetto si incurvi seguendo le varie posizioni imposte dalla stazionarietà della fase (vedi anche per esempio Landau, "Th. du champ").

Chiamo "euristica" tutta questa procedura

Suppongo quindi che il campo sia del tipo:

$$(17) \quad F = F_1 e^{-i\omega t} = F_1 e^{-i\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)t}$$

dove, come al solito,  $F_1$  contiene eventuali vari indici non commutativi.

Come già visto nel paragrafo sulle guide d'onda questo campo, in una approssimazione per onde piane, soddisfa l'equazione, del 2° ordine, di Klein Gordon (intendo: per particella libera):

$$(18) \quad \partial \partial^* F = \omega_0^2 F$$

Tuttavia la equazione del 2° ordine sta dimenticando completamente la struttura "per componenti" dell'onda piana, in particolare non tiene conto della polarizzazione. Una maniera sempre "euristica" per tenere conto delle componenti di campo senza buttarle via è di considerare le equazioni del 1° ordine corrispondenti alla (18), nella forma per esempio

$$(19) \quad \partial^* F = -\hat{i}\omega_0 F i \hat{T}$$

dalle quali senz'altro si ottiene immediatamente la (18)

$$\partial^* F = -\hat{i}\omega_0 F i \hat{T} \implies \partial(\partial^* F) = \partial(-\hat{i}\omega_0 F i \hat{T}) = \omega_0^2 F$$

Dico che è una maniera “euristica” (\*), un po’ perché non so fare di meglio, e un po’ perché non ho nessuna idea di come diavolo verranno memorizzate le componenti di onda piana nella (19) e cosa significhino esse. Una cosa è certa: la (19), invece della (18), mantiene la informazione delle componenti di campo. Come tale essa è una migliore approssimazione di ottica fisica del campo elettromagnetico. O almeno si spera.

Pur se le ipotesi che abbiamo fatto sono estremamente rozze, corrispondendo esse ad un approccio di primitiva approssimazione, vediamo se ci sono soluzioni della (17) in (19).

Riscrivo la (19) nella forma

$$(20) \quad \partial_{xyz}^* F + T \frac{\partial F}{\partial t} = -i\omega_0 F i \hat{T}$$

Risulta, usando l’espressione (17):

$$T \frac{\partial F}{\partial t} = T \frac{\partial}{\partial t} F_1 e^{-i\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)t} = -TF_1 i \left(E + \frac{Ze^2}{r}\right) e^{-i\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)t}$$

e poi ancora:

$$\begin{aligned} -i\omega_0 F i \hat{T} &= -i\omega_0 F_1 i \hat{T} e^{-i\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)t} \\ \partial_{xyz}^* F &= (\partial_{xyz}^* F_1) e^{-i\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)t} \end{aligned}$$

per cui sostituendo in (20) si semplifica da destra l’esponenziale (\*\*\*) e rimane un’equazione nella sola  $F_1(x, y, z)$  o  $F_1(r, \vartheta, \varphi)$  se si preferisce:

$$(21) \quad \partial_{xyz}^* F_1 - T \left(E + \frac{Ze^2}{r}\right) F_1 i = -i\omega_0 F_1 i \hat{T}$$

Poniamo a questo punto  $F_1$  nella forma:

$$(22) \quad F_1 = E_1 + TH_1$$

e con la solita espressione di  $\partial_{xyz}^*$  in coordinate sferiche si ha:

$$\frac{z}{r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Gamma^* F_1 \right) - T \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) F_1 i = -T\omega_0 (E_1 - TH_1) i$$

(Ho trasformato il 2° membro usando  $(E_1 + TH_1)\hat{T} = \hat{T}(E_1 - TH_1)$  e poi  $i\hat{T} = i$ ).

Separando le parti con e senza l’indice  $T$  si arriva a:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{z}{r} \frac{\partial E_1}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* E_1 - \left( E + \frac{Ze^2}{r} + \omega_0 \right) H_1 i = 0 \\ \frac{z}{r} \frac{\partial TH_1}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* TH_1 - T \left( E + \frac{Ze^2}{r} - \omega_0 \right) E_1 i = 0 \end{cases}$$

A questo punto le equazioni sono perfettamente identiche alle (7), è solo diverso il coefficiente dell’ultimo termine, per cui senza bisogno di rifare i passaggi si separano le variabili angolari come già fatto, e si perviene alle equazioni nella sola  $r$ :

(\*)

Il dizionario, al termine “euristico”, dice:

“euristico (matematica): procedimento per analogia, o intuitivo, o approssimato, che permette di dedurre leggi empiriche, prima che sia possibile esprimerle con rigore matematico”.

(\*\*\*)

Nel fare  $\partial_{xyz}^* F$  tratto  $\frac{Ze^2}{r}$  come un termine fisso imposto dall’esterno al campo  $F$ , come fosse costante e non soggetto alle operazioni di derivazione.

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial R_E}{\partial r} - \frac{l}{r} R_E + (E + \frac{Ze^2}{r} + \omega_0) R_H = 0 \\ \frac{\partial R_H}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} R_H + (E + \frac{Ze^2}{r} - \omega_0) R_E = 0 \end{cases}$$

Queste sono equazioni note e già trattate, vedi per es. Doran et. al. "Spacetime Algebra and Electron Physics":

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k-1}{r} & -(E + \frac{Z\alpha}{r} + \omega_0) \\ (E + \frac{Z\alpha}{r} - \omega_0) & \frac{-K-1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dice Doran, "K is "a non-zero positive or negative integer  $K = (l+1)$  o  $K = -(l+1)$ ". Quindi con  $K = (l+1)$ , e con  $e^2 \equiv \alpha$  (\*) si ottengono esattamente le (23)

$$\begin{cases} u' - \frac{l}{r} u + (E + \frac{Ze^2}{r} + \omega_0) v = 0 \\ v' + \frac{(l+2)}{r} v - (E + \frac{Ze^2}{r} - \omega_0) u = 0 \end{cases}$$

Dice sempre Doran, "The solution of these radial equations can be found in many textbooks (see, for example, J.D. Bjorken and S.D. Drell. Relativistic Quantum Mechanics, vol 1. McGraw-Hill, 1964), and the energy spectrum is obtained from the equation

$$(25) \quad E^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{n^2 + 2nv + (l+1)^2} \right)$$

where  $n$  is a positive integer and  $v = \sqrt{(l+1)^2 + (Z\alpha)^2}$ .

Ciò che ci interessa è che il sistema ammette soluzioni solo per certi autovalori di  $E$  che coincidono con tutte le informazioni date dalla teoria di Dirac dell'atomo

(righe spettrali). Nel contempo la soluzione completa che è  $F = (R_E \psi_l^m + T \frac{Z}{r} \psi_l^m R_H i) e^{-i(E + \frac{Ze^2}{r})t}$ , con  $R_E(r), R_H(r)$  funzioni note, contiene tutte le informazioni sulla distribuzione radiale e angolare degli elettroni negli atomi. Gli stati orbitali sono ancora una volta enumerati dalle  $\psi_l^m$  e descritti dalle  $\psi_l^m$ .

La soluzione (25) sui livelli energetici delle righe spettrali contiene poi in sé (ovviamente) tutte le soluzioni meno approssimate di Bohr e Schroedinger (ma per queste discussioni si può vedere qualunque buon libro di meccanica quantistica).

Conclusione: pur ammettendo che in questo paragrafo sono stato "euristico", e magari anche tendenzioso, mi dà da pensare il fatto che, semplicemente dalle (17) e (19) iniziali, si pervenga alle (25) con tutto quel che segue. Abbiamo usato una di quelle soluzioni fittizie delle equazioni di Maxwell che, abbiamo visto, in guida d'onda forniscono i modi in guida. Le abbiamo rappresentate sotto forma di onde piane dove qualcuno o qualcosa ha memorizzato e imposto il valore di  $\omega_0 \equiv k_c$  che l'onda si porta dietro. Codesti raggi ("pesanti" e "carichi") li abbiamo fatti viaggiare in un

(\*)

La scrittura  $e^2$  oppure  $\alpha$  dipende dal sistema di unità di misura adottato.

campo elettrico esterno di potenziale  $\frac{Ze}{r}$  ..... e il risultato è tutta la teoria di Dirac sulle righe spettrali, fino ai livelli di approssimazione più spinti che spiegano la struttura fine degli spettri. Vorrei infine osservare una cosa. Ho insistito, per vari paragrafi, sul fatto che questa non è meccanica quantistica, e nemmeno è elettromagnetismo, ma è .... un puro problema di linguaggio matematico. Puro linguaggio, pura geometria, pura matematica. Dopodiché saltano fuori le (25), con dentro atomi, righe, valori di costanti sperimentali, quali  $c, e^2, m_0, h$ . In realtà, è possibile che anche queste ultime soluzioni appartengano alla geometria pura, ovvero, al linguaggio?

### 13 – Considerazioni sulla costante di struttura fine

Le soluzioni della equazione  $\partial^* F = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{in 2D con } \partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \\ \text{in 3D con } \partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{in 3D con } \partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + T \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \text{in 4D con } \partial^* = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial \tau} \end{array} \right.$$

danno luogo rispettivamente, se si impone la separazione delle variabili angolari, (e in più la condizione ... che si ricoprono in angolo) a funzioni analitiche di questo tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^n = \rho^n e^{in\varphi} \\ \Psi_l^m = r^l \psi_l^m(\theta, \varphi) \\ F_n = (J_n e^{in\varphi} + T i J_{n+1} e^{i(n+1)\varphi}) e^{-i\omega_0 t} \\ F_l^m = (j_l \psi_l^m + T \frac{Z}{r} \psi_l^m j_{l+1} i) e^{-i\omega_0 t} \end{array} \right.$$

Oltre alle condizioni sugli angoli, che danno luogo a numeri interi, abbiamo qui autovalori che riguardano la  $\omega$  (o la  $\omega_0$ , massa a riposo, o l'energia totale  $E$ ). Questi autovalori non nascono più da condizioni riguardanti gli angoli cioè lo spazio, ma da condizioni riguardanti il tempo. Le ultime due danno le funzioni speciali  $J_n$  e  $j_l$ , e corrispondono all'autovalore "normalizzato"  $\omega_0 = 1$ . Le prime due possono essere pensate, anzi sono, le soluzioni corrispondenti all'autovalore  $\omega_0 = 0$ . Tutte queste appaiono quindi come soluzioni di base dell'equazione  $\partial^* F = 0$  corrispondenti agli autovalori  $\omega_0 = 0$  e  $\omega_0 = 1$ . Ce ne sono altri?

La soluzione relativa all'atomo di paragrafo 12 non corrisponde ad alcuna funzione analitica soluzione di  $\partial^* F = 0$  (l'abbiamo potuta ricavare solo con delle approssimazioni non conoscendo ... cos'altro fare, oltretutto perché non sapremmo come scrivere ... la presenza del corpo costituito dal nucleo  $Ze$ ). È possibile che esista una funzione analitica, descrivente l'intero sistema elettrone più nucleo, oppure descrivente singolarmente l'elettrone e il nucleo, ma in termini giustappunto esatti di funzione analitica  $\partial^* F = 0$ ?

E tuttavia, vedendo le cose da un altro punto di vista, o per abilità, o per fortuna, siamo stati capaci di trovare uno spettro di autovalori dell'energia che si dimostra molto giusto (cioè: Dirac è stato capace). Ora, questo è il punto, questo spettro di autovalori dell'energia ha in realtà una natura puramente geometrica (o numerica). Normalizzando opportunamente le unità di misura esso

propone, accanto all'autovalore 0 e all'altro autovalore 1, l'ulteriore autovalore  $\left(1 - \frac{(Z\alpha)^2}{n^2 + 2nv + (l+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

dove compaiono solo numeri interi ( $n, l, Z$ ) e  $\alpha = 1/137,035999 \dots$ . Tanto per capirsi, la situazione è un po' come se avessimo trovato, per certe funzioni di base del nostro linguaggio geometrico, soltanto lo 0, 1, numeri interi e il  $\pi$ .

Questa non è una dimostrazione. È un dubbio. Può  $\alpha$  essere legato ad elementi ancora non compresi della geometria (\*)? Di indizi più o meno suggestivi ce ne sono tanti.

(\*)

Condizioni di quantizzazione su angoli spazio - temporali? Salto queste riflessioni lasciandole al lettore (n.d.r.).

## 14 - Conclusione

Non so se Eddington avesse capito tutto (\*), ma mi ha sempre colpito la frase finale di un suo libro:

“... abbiamo trovato che, dove la scienza è avanzata di più, la mente non ha fatto che riprendersi dalla natura ciò che la mente stessa aveva posto nella natura. Abbiamo scoperto una strana impronta sulla spiaggia dell'ignoto. Abbiamo escogitato profonde teorie, l'una dopo l'altra, per spiegarne la provenienza. Alla fine siamo riusciti a ricostruire la creatura che aveva lasciato quell'impronta. Ed ecco! è la nostra impronta”. (Arthur Eddington, 1920)

---

(\*)

Che peraltro, dicono i libri, è rimbecillito dedicando gli ultimi anni della sua vita a mostrare che  $\alpha$  era un trucco.

## 15 – Appendici

A1

Indico, anche se è un po' noioso, come si ricavano i campi di Ramo, Whinnery.

Prendo le soluzioni  $e^{-i\omega_0 t}$  con  $n$  positivo e  $n$  negativo (e con  $n$  pari (\*),  $J_{-n} = +J_n$ )

$$\begin{aligned} & (J_{n-1} e^{i(n-1)\varphi} + T i J_n e^{in\varphi}) e^{-i\omega_0 t} \\ & (J_{-n-1} e^{-i(n+1)\varphi} + T i J_n e^{-in\varphi}) e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

I campi magnetici per somma danno:

$$T i J_n \cos n\varphi e^{-i\omega_0 t}$$

Con  $e^{+i\omega_0 t}$  avrei ottenuto:

$$\begin{aligned} & (J_{n-1} e^{i(n-1)\varphi} - T i J_n e^{in\varphi}) e^{+i\omega_0 t} \\ & (J_{-n-1} e^{-i(n+1)\varphi} - T i J_n e^{-in\varphi}) e^{+i\omega_0 t} \end{aligned}$$

In questo caso i campi magnetici per somma danno:

$$-T i J_n \cos n\varphi e^{+i\omega_0 t}$$

Sottraendo i campi magnetici nei due casi (perché io voglio una soluzione in cui sia eliminato il campo  $TH_r$ ) si ottiene solamente un campo  $H_z$

$$+T i J_n \cos n\varphi \cos \omega_0 t$$

I campi elettrici si possono dapprima riscrivere.

Nel caso  $e^{-i\omega_0 t}$  essi sono

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial J_n}{\partial r} + \frac{n}{r} J_n \right) e^{in\varphi} e^{-i\varphi} e^{-i\omega_0 t} \\ & \left( \frac{\partial J_n}{\partial r} - \frac{n}{r} J_n \right) e^{-in\varphi} e^{-i\varphi} e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

e per somma danno

$$\left( \frac{\partial J_n}{\partial r} \cos n\varphi + i \frac{n}{r} J_n \sin n\varphi \right) e^{i\varphi} e^{-i\omega_0 t}$$

Nel caso  $e^{+i\omega_0 t}$  sono

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial J_n}{\partial r} + \frac{n}{r} J_n \right) e^{in\varphi} e^{-i\varphi} e^{+i\omega_0 t} \\ & \left( \frac{\partial J_n}{\partial r} - \frac{n}{r} J_n \right) e^{-in\varphi} e^{-i\varphi} e^{+i\omega_0 t} \end{aligned}$$

e sommando

$$\left( \frac{\partial J_n}{\partial r} \cos n\varphi + i \frac{n}{r} J_n \sin n\varphi \right) e^{-i\varphi} e^{+i\omega_0 t}$$

Ora sottraendo i campi elettrici nei due casi (come per il campo magnetico che dava  $H_z$ ) si ha

$$\left( \frac{n}{r} J_n \sin n\varphi e^{-i\varphi} - \frac{\partial J_n}{\partial r} \cos n\varphi i e^{-i\varphi} \right) \sin \omega_0 t$$

Combinando il tutto e passando ai coniugati, come si fa per le funzioni analitiche sul piano (poiché s'è visto che l'equazione  $\partial^* F = 0$  rappresenta le equazioni di Maxwell per la grandezza coniugata) si arriva a

$$\frac{n}{r} J_n \sin n\varphi \sin \omega_0 t e^{i\varphi} + \frac{\partial J_n}{\partial r} \cos n\varphi \sin \omega_0 t i e^{i\varphi} - T i J_n \cos n\varphi \cos \omega_0 t$$

Si riconoscono qui i versori  $e_r = e^{i\varphi}$  e  $e_\varphi = i e^{i\varphi}$  delle coordinate polari sul piano  $r, \varphi$ .

(\*)

Per comodità considero il caso con  $n$  pari per poter scrivere  $J_{-n} = +J_n$ .



E dunque infine si ottengono i campi di Ramo Whinnery per i TE

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{n}{r} J_n \sin n\varphi \sin \omega_0 t \\ E_\varphi &= \frac{\partial J_n}{\partial r} \cos n\varphi \sin \omega_0 t \\ H_z &= -J_n \cos n\varphi \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

A2

Ripartiamo dall'inizio cercando in altro modo la soluzione delle equazioni in guida (e ne approfitto, tanto per confondere le acque, a cercare la soluzione con  $e^{+i\omega_0\tau}$ ).

Cerchiamo  $F$  come autofunzione dell'operatore  $J_z$  con autovalore  $(n + \frac{1}{2})$ .

Si abbia da risolvere l'equazione

$$\partial^* F = 0$$

ossia

$$e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) F + T \frac{\partial}{\partial \tau} F = 0$$

Pongo  $F = F_1(r, \varphi) e^{+i\omega_0\tau}$  e si può così semplificare l'esponenziale da destra ottenendo

$$e^{i\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial r} + e^{i\varphi} \frac{i}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + T \omega_0 F_1 i = 0$$

Separo le variabili  $r, \varphi$  in  $F_1$ ; ma non posso usare una espressione tipo  $-i \frac{\partial}{\partial \varphi} F_1 = n F_1$ , perché

$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} F_1$  non ha nessun autovalore, non è eguale .... a niente (sappiamo già ..... com'è  $F_1$ ).

Però (dato che noi sappiamo già che è  $J_z F = (n + \frac{1}{2}) F$ , e quindi anche  $J_z F_1 = (n + \frac{1}{2}) F_1$ ) dico:

“provo a porre  $J_z F_1 = (n + \frac{1}{2}) F_1$ ”.

Per far ciò ... bisogna anzitutto far comparire questo operatore che non c'è. Siccome in luogo di

$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} F_1$  serve  $J_z F_1 = -\frac{\partial}{\partial \varphi} F_1 i - \frac{1}{2} i F_1 i$ , bisogna riscrivere l'equazione anzitutto con una

moltiplicazione per  $i$  da destra,

$$e^{i\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial r} i + e^{i\varphi} \frac{i}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} i - T \omega_0 F_1 = 0$$

e poi aggiungendo e togliendo acconciamente  $\frac{1}{2} i F_1 i$ ;

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial r} i + e^{i\varphi} \frac{i}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} i + e^{i\varphi} \frac{i}{r} \frac{1}{2} i F_1 i - e^{i\varphi} \frac{i}{r} \frac{1}{2} i F_1 i - T \omega_0 F_1 &= 0 \\ e^{i\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial r} i - e^{i\varphi} \frac{i}{r} \left( -\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} i - \frac{1}{2} i F_1 i \right) + e^{i\varphi} \frac{1}{r} \frac{1}{2} F_1 i - T \omega_0 F_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ho così fatto comparire  $J_z F_1$ . Ora “provo a porre”  $J_z F_1 = (n + \frac{1}{2}) F_1$  ed ottengo:

$$e^{i\varphi} \frac{\partial F_1}{\partial r} i - e^{i\varphi} \frac{i}{r} \left( n + \frac{1}{2} \right) F_1 + \frac{e^{i\varphi}}{r} \frac{1}{2} F_1 i - T \omega_0 F_1 = 0$$

L'equazione contiene ancora  $F_1(r, \varphi)$  a variabili  $r, \varphi$  non separate (infatti, se guardiamo l'equazione vediamo che c'è un  $e^{i\varphi}$  non semplificabile) tuttavia la si può riscrivere moltiplicando da sinistra per  $e^{-i\varphi/2}$  (approfittando del fatto che  $e^{-i\varphi/2} T = T e^{i\varphi/2}$ ) e si vede così che essa è

$$e^{i\varphi/2} \frac{\partial F_1}{\partial r} i - e^{i\varphi/2} \frac{i}{r} \left( n + \frac{1}{2} \right) F_1 + \frac{e^{i\varphi/2}}{r} \frac{1}{2} F_1 i - T \omega_0 e^{i\varphi/2} F_1 = 0$$

Questo invoglia ad assumere come incognita in luogo di  $F_1$  la  $e^{i\varphi/2} F_1$ .

Assumo dunque come incognita  $e^{i\varphi/2}F_1$  e separo le variabili nella forma

$$e^{i\varphi/2}F_1 = \mathfrak{F}(r)\Phi(\varphi)$$

Sostituendo arrivo alla equazione per  $\mathfrak{F}(r)$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r} i - \frac{i}{r} \left( n + \frac{1}{2} \right) \mathfrak{F} + \frac{1}{2r} \mathfrak{F} i - T\omega_0 \mathfrak{F} = 0$$

Questa è l'equazione differenziale del 1° ordine delle “funzioni di Bessel ipercomplesse”  $\mathfrak{F}(r) = \underline{J_n + T i J_{n+1}}$ .

Se pongo  $\mathfrak{F} = R_E + T R_H$  ottengo

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_E}{\partial r} - \frac{n}{r} R_E + i\omega_0 R_H &= 0 \\ \frac{\partial R_H}{\partial r} + \frac{n+1}{r} R_H + i\omega_0 R_E &= 0 \end{aligned}$$

cioè il solito sistema di equazioni con le solite soluzioni (è scritto diverso dal precedente perché questa volta ho cercato soluzioni con  $e^{+i\omega_0\tau}$ )

Avendo così trovato  $\mathfrak{F}(r) = J_n + T i J_{n+1}$  possiamo terminare calcolando  $\Phi(\varphi)$ .

$$e^{i\varphi/2}F_1 = (J_n + T i J_{n+1})\Phi(\varphi)$$

$$F_1 = e^{-\frac{i\varphi}{2}} (J_n + T i J_{n+1})\Phi(\varphi)$$

e dalla condizione  $J_z F_1 = (n + \frac{1}{2})F_1$ , con lunghi ma ovvi passaggi si ritrova infine come deve essere

$$\Phi(\varphi) = e^{i(n+1/2)\varphi}$$

A3

La espressione che mi serve

$$-\Gamma^* T \frac{z}{r} \psi_l^m = -(l+2) T \frac{z}{r} \psi_l^m$$

la trovo, già pronta, in C. Doran, A. Lasenby, S. Gull, S. Somaroo, A. Challinor, “Spacetime Algebra and Electron Physics” Adv. Imag. & Elect. Phys. (1996). Sta scritto

$$-\vec{x} \wedge \vec{\nabla} \hat{e}_r \psi_l = -(l+2) \hat{e}_r \psi_l$$

essendo

$$-\vec{x} \wedge \vec{\nabla} \psi_l = l \psi_l$$

“so, without loss of generality, we can choose  $l$  to be positive and recover the negative  $-l$  states through multiplying by  $\hat{e}_r$ ”.

Traduco dalle notazioni di Cambridge alle mie. È:

$$\begin{aligned} -\vec{x} \wedge \vec{\nabla} &= -(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \\ &= -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) - j \left( x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right) - ji \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\Gamma^* \end{aligned}$$

(vedi paragrafo 4). È poi ancora:

$$\hat{e}_r = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \frac{1}{r} = \frac{(x - iy - jz)}{r} \hat{i} = \frac{z^*}{r} \hat{i}$$

e quindi decodificando il tutto si ottiene

$$-\Gamma^* \frac{z^*}{r} \hat{i} \psi_l^m = -(l+2) \frac{z^*}{r} \hat{i} \psi_l^m$$

che si può infine scrivere, moltiplicando per  $\hat{T}$  ( $T = \hat{T}$ ,  $\frac{z^*}{r} \hat{i} = \hat{i} \frac{z}{r}$ ), nella forma voluta  $-\Gamma^* T \frac{z}{r} \psi_l^m =$

$$-(l+2) T \frac{z}{r} \psi_l^m$$

A4 (\*)

Per chi avesse dei dubbi sul fatto che queste siano effettivamente funzioni analitiche in 4 dimensioni, osservo dalla (12) che abbiamo trovato in definitiva

$$\begin{cases} E_1 = j_l \psi_l^m \\ H_1 = -j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \end{cases}$$

Possiamo verificare, sostituendo, se queste realmente soddisfano la (1) ovvero la (5) ovvero il sistema (7). Dalla prima delle (7) si ha

$$\frac{z}{r} \frac{\partial j_l \psi_l^m}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* j_l \psi_l^m - j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \omega_0 i = 0$$

quindi subito un  $\frac{z}{r}$  si semplifica da sinistra. Il termine  $\psi_l^m$  si semplifica da destra,  $\omega_0 = 1$  quindi l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial j_l}{\partial r} - \frac{l}{r} j_l + j_{l+1} = 0$$

e questa è vera in quanto equazione ricorsiva per le  $j_l$  CVD.

Passiamo alla seconda delle (7)

$$\frac{z}{r} \frac{\partial T(j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i)}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* T(j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i) - T j_l \psi_l^m \omega_0 i = 0$$

Anzitutto modifico il secondo termine usando la relazione

$$-\Gamma^* T \frac{z}{r} \psi_l^m = -(l+2) T \frac{z}{r} \psi_l^m$$

Otengo così

$$\frac{z}{r} \frac{\partial T(j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i)}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} (l+2) T \frac{z}{r} \psi_l^m (j_{l+1} i) - T j_l \psi_l^m \omega_0 i = 0$$

Ora nel 1° termine sposto  $T \frac{z}{r}$  fuori dal segno di derivata (non dipende da  $r$  ma solo dagli angoli) e semplifico dovunque un termine  $T \frac{z z^*}{r^2} = T$ .

$$\frac{\partial (j_{l+1} \psi_l^m i)}{\partial r} + \frac{1}{r} (l+2) \psi_l^m (j_{l+1} i) - j_l \psi_l^m \omega_0 i = 0$$

Pongo anche  $\omega_0 = 1$  e semplifico un  $\psi_l^m i$  da destra e arrivo a

$$\frac{\partial j_{l+1}}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} j_{l+1} - j_l$$

e questa è vera in quanto equazione ricorsiva per le  $j_l$  CVD.

A5

Calcolando dalla (12) il momento angolare della soluzione  $F$ , ovvero facendo  $-\Gamma^*(F)$  si osserva che il 1° termine di campo elettrico dà un autovalore  $l$ . Il termine di campo magnetico dà un autovalore  $(l+2)$ .

$F$  nel suo complesso non dà un autovalore per l'operatore  $-\Gamma^*$

(\*)

Ho aggiunto in questa Appendice una verifica diretta, a posteriori, che effettivamente la (12) soddisfa l'equazione iniziale (1) (n.d.r.)

Tuttavia si può vedere che un altro operatore  $\mathcal{K}$  che agisce in questo modo:

$$\mathcal{K} = -\hat{T}(1 - \Gamma^*)(F)\hat{T}$$

dà un autovalore ..... che è  $(l + 1)$ . Infatti la azione di  $(1 - \Gamma^*)$  su  $F$ , o su  $F_1$ , è:

$$\begin{aligned} (1 - \Gamma^*)F_1 &= (1 - \Gamma^*) \left( j_l \psi_l^m - T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \right) \\ &= j_l \psi_l^m - T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i + l j_l \psi_l^m + (l + 2) T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \\ &= (l + 1) j_l \psi_l^m + (l + 1) T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \end{aligned}$$

Se prendo l'operatore nella forma  $\mathcal{K} = -\hat{T}(1 - \Gamma^*)(F_1)\hat{T}$  il risultato è che la parte "T" della formula sopra cambia di segno, e quindi

$$\mathcal{K}F_1 = (l + 1) \left( j_l \psi_l^m - T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \right) = (l + 1)F_1$$

"Le funzioni analitiche  $F$  sono autofunzioni dell'operatore  $\mathcal{K}$  con autovalore  $(l + 1)$ ".

Riesaminiamo ora la soluzione finale (12). Si nota una curiosa particolarità cioè che nella espressione

$$(12) \quad F = (j_l \psi_l^m - T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i) e^{i\omega_0 t}$$

le variabili  $r, (\vartheta, \varphi)$  non appaiono separate (come sono, invece, nelle singole parti  $E$  ed  $H$ ). Infatti la parentesi non appare come il prodotto fra una funzione di  $(\vartheta, \varphi)$  e una funzione di  $r$ .

Tuttavia possiamo tentare di procedere in analogia con quanto fatto nel caso delle guide d'onda.

Suppongo di poter scrivere  $\frac{z}{r} = e^{b\alpha}$  dove  $b$  ha indici spaziali e  $e^{b\alpha} = e^{b\alpha/2} e^{b\alpha/2}$  e in più  $(e^{b\alpha/2})^* = e^{-b\alpha/2}$  e poi ancora  $e^{-b\alpha/2} e^{b\alpha} = e^{+b\alpha/2}$  e infine  $e^{+b\alpha/2} T = T e^{-b\alpha/2}$ .

Posso quindi moltiplicare da sinistra per  $e^{+b\alpha/2}$  e ottengo:

$$e^{+b\alpha/2} F = (j_l e^{+b\alpha/2} \psi_l^m - T j_{l+1} e^{-b\alpha/2} \frac{z}{r} \psi_l^m i) e^{i\omega_0 t}$$

Risulta  $e^{-b\alpha/2} \frac{z}{r} = e^{-b\alpha/2} e^{b\alpha/2} e^{b\alpha/2} = e^{+b\alpha/2}$  per cui

$$e^{+b\alpha/2} F = (j_l e^{+b\alpha/2} \psi_l^m - T j_{l+1} e^{+b\alpha/2} \psi_l^m i) e^{i\omega_0 t}$$

Posso far comparire un  $i\hat{T} = \hat{j}\hat{T}$  che commuta con tutti i complessi (i bivettori) dell'algebra,  $\hat{T}$  commuta con tutti i bivettori spaziali, quindi posso scrivere

$$e^{+b\alpha/2} F = (j_l e^{+b\alpha/2} \psi_l^m - \hat{j} j_{l+1} e^{+b\alpha/2} \psi_l^m \hat{j}\hat{T}) e^{i\omega_0 t}$$

Questo mi consente di capire che  $e^{+b\alpha/2} \psi_l^m$  può uscire dalla parentesi da destra e quindi

$$e^{+b\alpha/2} F = (j_l - \hat{j} j_{l+1} \hat{j}\hat{T}) e^{+b\alpha/2} \psi_l^m e^{i\omega_0 t}$$

$$F = e^{-b\alpha/2} (j_l + i T j_{l+1}) e^{+b\alpha/2} \psi_l^m e^{i\omega_0 t}$$

Cosa dice questo risultato?

La situazione, come si vede, è analoga a quella delle guide d'onda, dove sfruttando  $e^{-i\varphi/2} T = T e^{+i\varphi/2}$  arrivavo alla nuova espressione

$$F = e^{-i\varphi/2} (J_n + T i J_{n+1}) e^{i(n+1/2)\varphi} e^{-i\omega_0 \tau}$$

con  $r, \varphi$  e  $\tau$  separate. Compariva la particolare "Bessel function ipercomplessa" costituita dall'insieme  $(J_n + T i J_{n+1})$ .

Qui, analogamente, le variabili  $r, (\vartheta, \varphi)$  sono ora separate e compare la particolare "spherical Bessel function ipercomplessa"  $f(r) = j_l + i T j_{l+1}$ .

Ci viene dunque il sospetto che tutto ciò sia legato al particolare operatore che ha autovalori su  $F$

$$\mathcal{K}F = (l+1) \left( j_l \psi_l^m - T j_{l+1} \frac{z}{r} \psi_l^m i \right) e^{i\omega_0 t} = (l+1)F$$

Ripartiamo dall'inizio cercando direttamente  $F$ , ovverosia  $F_1$ , come autofunzione dell'operatore  $\mathcal{K}$  con autovalore  $(l+1)$ .

Proviamo a porre nella (5) la condizione di cercare  $F_1$  come autofunzione di  $\mathcal{K}$

$$(5) \quad \mathcal{K}F_1 = (l+1)F_1$$

$$\frac{z}{r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Gamma^* F_1 \right) + T F_1 \omega_0 i = 0$$

Siccome  $\mathcal{K}$  non c'è, anzitutto va introdotto.

$$\mathcal{K}F_1 = -\hat{T}(1 - \Gamma^*)(F_1)\hat{T} = -\hat{T}(F_1)\hat{T} + \hat{T}\Gamma^*(F_1)\hat{T}$$

$$\frac{\hat{T}z}{r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Gamma^* F_1 \right) \hat{T} + \hat{T} T F_1 \omega_0 i \hat{T} = 0$$

$$\frac{\hat{T}z}{r} \left( \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \Gamma^* F_1 \right) \hat{T} + \hat{T} T F_1 \omega_0 i \hat{T} = 0$$

$$\frac{\hat{T}z}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \hat{T} + \frac{\hat{T}z}{r} \frac{1}{r} \Gamma^* F_1 \hat{T} + \hat{T} T F_1 \omega_0 i \hat{T} = 0$$

$$\frac{\hat{T}z}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \hat{T} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} (\hat{T}\Gamma^* F_1 \hat{T} - \hat{T}(F_1)\hat{T}) + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \hat{T}(F_1)\hat{T} + \hat{T} T F_1 \omega_0 i \hat{T} = 0$$

$$\frac{\hat{T}z}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \hat{T} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} (l+1)F_1 + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \hat{T}(F_1)\hat{T} + \hat{T} T F_1 \omega_0 i \hat{T} = 0$$

$\hat{T}$  anticommuta con  $T$ , quindi posso riscrivere l'ultimo termine

$$\frac{\hat{T}z}{r} \frac{\partial F_1}{\partial r} \hat{T} + \frac{z}{r} \frac{1}{r} (l+1)F_1 + \frac{z}{r} \frac{1}{r} \hat{T}(F_1)\hat{T} - T \hat{T} F_1 \omega_0 i \hat{T} = 0$$

Moltiplico da sinistra per  $e^{-b\alpha/2}$  e ottengo:

$$\hat{T} \frac{\partial (e^{b\alpha/2} F_1)}{\partial r} \hat{T} + \frac{1}{r} (l+1) \left( e^{\frac{b\alpha}{2}} F_1 \right) + \frac{1}{r} \hat{T} \left( e^{\frac{b\alpha}{2}} F_1 \right) \hat{T} - T \hat{T} (e^{b\alpha/2} F_1) \omega_0 i \hat{T} = 0$$

Come si vede, questo invoglia ad assumere come incognita  $(e^{b\alpha/2} F_1)$ . Pongo

$$e^{b\alpha/2} F_1 = \check{f}(r) \Phi(\vartheta, \varphi)$$

Sostituendo, posso semplificare un  $\Phi(\vartheta, \varphi)$  da destra e ottengo:

$$\frac{\partial \hat{T} \check{f} \hat{T}}{\partial r} + \frac{1}{r} (l+1) \check{f} + \frac{1}{r} \hat{T} \check{f} \hat{T} - T \hat{T} \check{f} \hat{T} \omega_0 i = 0$$

La trasformo nella forma più accattivante

$$\boxed{\frac{\partial \check{f}}{\partial r} + \frac{1}{r} (l+1) \hat{T} \check{f} \hat{T} + \frac{1}{r} \check{f} + T \check{f} \omega_0 i = 0}$$

Questa è l'equazione differenziale del 1° ordine delle "spherical Bessel functions ipercomplesse"

$$\check{f}(r) = j_l + iT j_{l+1}$$

Infatti se pongo  $\check{f} = R_E + iTR_H$ , considerato anche che  $\hat{T} \check{f} \hat{T} = -R_E + iTR_H$ , ottengo le seguenti due equazioni

$$\frac{\partial R_E}{\partial r} - \frac{l}{r} R_E + R_H = 0$$

$$\frac{\partial R_H}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} R_H - R_E = 0$$

Queste, considerate le equazioni ricorsive per le “spherical Bessel functions”

$$\frac{\partial j_l}{\partial r} - \frac{l}{r} j_l + j_{l+1} = 0$$
$$\frac{\partial j_{l+1}}{\partial r} + \frac{(l+2)}{r} j_{l+1} - j_l = 0$$

sono giustamente verificate da  $R_E = j_l$  e da  $R_H = j_{l+1}$ .

La soluzione finale è dunque  $f(r) = j_l + iTj_{l+1}$  CVD.

## RIFERIMENTI

[1] David Hestenes, "... you must be very careful when and where and how you voice such a crackpot idea".

[2] Chandogya Upanisad 6.15.3 "Qualunque sia questa essenza sottile, tutto l'universo è costituito di essa, essa è la vera realtà, essa è l'Atman. Essa ssi tu, o Svetaketu"

[3] Sommerfeld, Lectures on theoretical physics: "It is not exaggerated claim that the theory of analytic functions of a complex variable is identical with two-dimensional potential theory or, in terms of hydrodynamics, with two-dimensional theory of potential flow".

[4] Maxwell, A Treatise on Electricity & Magnetism: "... the method ... is much more powerful than any known method applicable to three dimensions. The method depends on the properties of conjugate functions of two variables".

[5] David Hestenes, "But if you try to explain it to most physicists, they are likely to dismiss you as some kind of crackpot".

[6] W. Pauli, "è ormai di vecchia data il desiderio di ricondurre tutte le proprietà meccaniche dell'elettrone a principi elettromagnetici" (1921).

[7] Sommerfeld, "Gustav Mie took the first step in this direction in 1912 in his famous papers "Foundations of a Theory of Matter". Their goal is no less than the generalization of the Maxwell equations so that they include the existence of the electron", Electrodynamics (1948).

[8] W. Pauli, "è tuttavia facile convincersi (...) necessariamente (...) dell'esistenza di un'energia di tipo non elettromagnetico. (...). L'energia elettromagnetica di Lorentz dell'elettrone in quiete è eguale ai  $\frac{3}{4}$  della sua energia totale", (1921).

[9] Sommerfeld, "Poincaré introduced (1906) a membrane (...). The missing quarter (...) was supposed to be hidden herein".

[10] Doran (et al.) "It is not surprising, therefore, that the  $\partial^*$  operator should play a fundamental role in the STA formulation of the Dirac theory. What is less obvious is that the same operator should also play a fundamental role in the STA formulation of the Maxwell equations".

(La notazione  $\partial^*$  è mia. La sottolineatura è mia. Il motivo per cui cito la frase è che a me risulta naturale, con queste notazioni, che l'operatore  $\partial^*$  compaia in entrambe e che  $\Psi$  ed  $F$  siano riconducibili alle stesse grandezze. Può darsi che io stia sbagliando qualcosa).