

# Matter as gravitational waves. ( On the nature of electron)

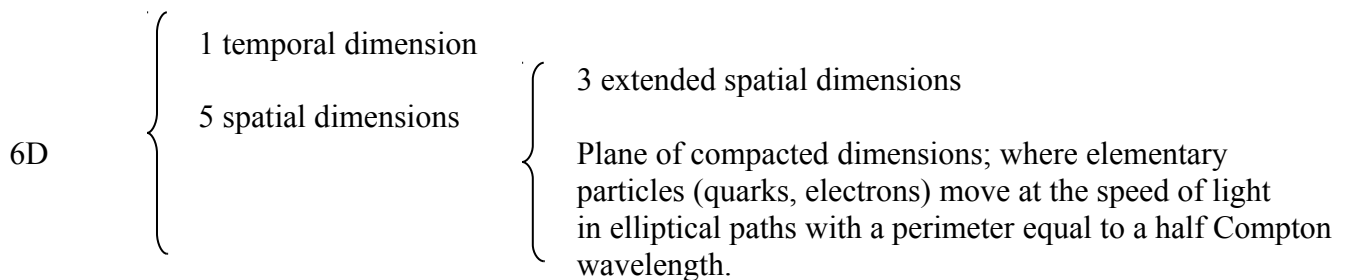
by Ernesto López González Eng,

c/ Pablo Neruda 78, Portal 9 4º A 28922 Alcorcón Madrid España. [e\\_lopez@teleingenieros.net](mailto:e_lopez@teleingenieros.net)

## Abstract

**Background:** At present in physics there are 2 large and seemingly incompatible theories: the theory of General Relativity and Quantum Mechanics. A model to derive Quantum Mechanics from General Relativity is presented here.

**Results:** A hexadimensional model with the following characteristics is proposed:



The charge / mass ratio and the intrinsic magnetic momentum of the electron solely from its mass are estimated.

The gravitational wave equations are solved for the particular case of a flat three-dimensional space. The boundary conditions are set assuming that the waves are guided by the curvature of compacted dimensions. In particular, exact solutions are obtained for the case of a motionless particle-pulsation, uniform linear motion particle-pulsation and the relativistic hydrogen atom. These solutions justify the postulates of quantum mechanics and provide numerical solutions compatible with the experimental data. Finally a possible origin of inertia is proposed.

**Conclusions:** We should review the dual wave-particle concept in favour of a solely gravitational wave nature. It is remarkable to note that the same conclusions can be drawn with other configurations of compacted dimensions (whether it be in number, size or topology) A great deal of theoretical effort is needed to expand the hypothesis towards strong and weak nuclear forces and curved tridimensional spaces.

**keywords:** Quantum Mechanics, General Relativity, extra dimensions, Kaluza-Klein, Hydrogen atom, inertia.

© Ernesto López González. 2012. ( Registro Territorial de la Comunidad de Madrid. M-005674/2012)  
All rights reserved.

# La Materia como ondas gravitatorias. ( Sobre la naturaleza del electrón)

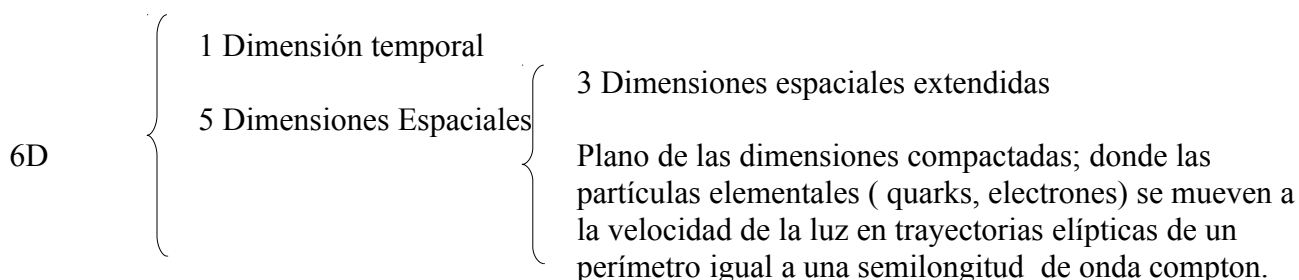
por Ernesto López González (Ingeniero),

c/ Pablo Neruda 78, Portal 9 4º A 28922 Alcorcón Madrid España. [e\\_lopez@teleingenieros.net](mailto:e_lopez@teleingenieros.net)

## Resumen

**Antecedentes** En la Física actual existen 2 grandes teorías aparentemente incompatibles entre sí: la teoría de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. Se expone a continuación un modelo para deducir la mecánica cuántica a partir de la Relatividad General.

**Resultados** Se propone un modelo hexadimensional con las siguientes características:



Se estiman la relación carga/masa y el momento magnético intrínseco del electrón a partir únicamente de su masa.

Se resuelven las ecuaciones de onda gravitatoria para el caso particular de un espacio tridimensional plano. Las condiciones de contorno se establecen suponiendo que son ondas guiadas por la curvatura de las dimensiones compactadas. En concreto se consiguen soluciones exactas para los casos de una partícula-pulsación inmóvil, una partícula-pulsación con movimiento rectilíneo y uniforme y el átomo de hidrógeno relativista. Dichas soluciones justifican los postulados de la mecánica cuántica y proporcionan soluciones numéricas compatibles con los experimentos. Finalmente se propone un posible origen de la inercia.

**Conclusiones** Debería revisarse la concepción dual onda-partícula en favor de una concepción únicamente ondulatoria de naturaleza gravitacional. Es destacable observar que se pueden sacar las mismas conclusiones con otras configuraciones de las dimensiones compactadas ( ya sea en número, topología o tamaño). Es necesario todavía un gran esfuerzo teórico para ampliar la hipótesis a las fuerzas nuclear fuerte y débil y hacia espacios tridimensionales curvos.

**Palabras clave:** Mecánica Cuántica, Relatividad General, dimensiones extras, Kaluza-Klein, átomo de hidrógeno , inercia.

© Ernesto López González. 2012. ( Registro Territorial de la Comunidad de Madrid. M-005674/2012)  
Todos los derechos reservados.

# Índice de contenido

Ámbito de aplicación.....	4
Tabla de constantes físicas.....	5
Símbolos.....	5
1.Introducción. La teoría de Kaluza-Klein.....	8
2.Consideraciones a la teoría de Kaluza-Klein.....	9
2.1 Sobre la topología circular de las dimensiones.....	9
3.Significado físico de las 2 dimensiones espaciales adicionales.....	10
3.1 La fórmula relativista de la energía.....	10
3.2 Interpretación de la masa como la inversa de una longitud .....	12
3.3 La longitud de onda de D'Broglie .....	12
3.4 Influencia de la curvatura del espacio en fenómenos que suceden a escalas muy superiores a la de las dimensiones compactadas. Radio de las dimensiones compactadas.....	14
3.5 Interpretación del principio de incertidumbre.....	17
4.Origen del campo eléctrico.....	17
4.1 Sobre el gravitomagnetismo.....	17
4.2 Campo gravitomagnético producido por las partículas elementales.....	18
5.Los electrones como pulsaciones gravitomagnéticas.....	22
5.1 Ecuación de ondas gravitomagnéticas.....	22
5.2 Ecuación escalar de onda gravitomagnética en 6D. Solución para una partícula-pulsación libre.....	24
5.2.1 Topología circular de las dimensiones compactadas.....	25
5.2.2 Topología elíptica de las dimensiones compactadas.....	31
5.2.3 Solución para las dimensiones extendidas.....	36
6.Discusión. Significado físico de la mecánica cuántica .....	38
6.1 Concepto de partícula. Origen de la inercia.....	38
6.2 Ecuación de Klein-Gordon. Longitud de onda de D'Broglie.....	41
7. Aplicación de la ecuación de onda gravitomagnética al átomo de hidrógeno.....	44
7.1 Ecuación de onda para el átomo de hidrógeno.....	44
7.2 Ecuación de Schrodinger.....	46
7.3 Resolución de la ecuación para las dimensiones extendidas. Caso no relativista.....	46
7.4 Resolución de la ecuación para las dimensiones extendidas. Caso relativista.....	50
Conclusiones.....	57

## Ámbito de aplicación:

La hipótesis se limita a circunstancias en las que el espacio de las 3 dimensiones espaciales pueda considerarse plano, por tanto las ecuaciones de la relatividad general disminuyen de complejidad y pueden escribirse de una forma similar a las leyes de Maxwell, formulación conocida como gravitomagnetismo. También se restringe a distancias tales en las que pueda despreciarse la influencia de la expansión del universo. Los postulados en los que se basa son:

- 1) La ecuación relativista que liga la energía de un cuerpo con su velocidad es reflejo de un movimiento a la velocidad de la luz en una hipotética dirección perpendicular a las 3 dimensiones espaciales conocidas.
- 2) Esta dimensión extra es la misma que postulaba Kaluza en 1919.
- 3) La topología de la dimensión de Kaluza es cerrada y muy pequeña. (Klein 1926).
- 4) Se establece que con el fin de conservar la isotropía espacial en las dimensiones extendidas es necesaria la existencia de al menos otra dimensión compactada.
- 5) El movimiento de las partículas a grandes velocidades en el plano de estas dimensiones compactadas se traduce en una vibración que queda reflejada en la ley que rige la emisión de un cuerpo negro como un término independiente de la temperatura e igual a  $E_r = \frac{h\nu}{2}$ .
- 6) La energía que poseen las partículas elementales (electrones, quarks) en reposo es debida a este movimiento, lo que implica que la 5ª dimensión espacial del postulado número 4( a la que llamaremos  $\xi$ ) se puede identificar con el inverso de la masa de las partículas elementales mediante la relación  $\xi_0 = \frac{\hbar}{2m_0c}$ . Es por ello que todas nuestras ecuaciones en las que interviene la masa de las partículas elementales son ecuaciones de 5 dimensiones, y no de 4, como lo consideramos actualmente.
- 7) Las constantes  $G$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ , etc son debidas a la formulación en 3 dimensiones espaciales planas de un espacio de 5 dimensiones espaciales (con dos de ellas extremadamente curvadas y compactadas) y por tanto, desaparecen o se simplifican enormemente cuando se efectúan los cálculos en 6 dimensiones ( 5 espaciales + tiempo) .

## Tabla de constantes físicas.

Masa del electrón  $m_e = 9,10938291 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Magnetón de Bohr  $\mu_B = 9,27400915 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$

Momento magnético intrínseco del electrón  $\mu_e = -1,001159652 \times \mu_B$

Carga eléctrica elemental  $e = 1,602176 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante reducida de Planck  $\hbar = 1,054571628 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Velocidad de la luz  $c = 299792458 \text{ m/s}$

Constante de gravitación universal  $G = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

Constante de gravitación universal en 6 dimensiones  $\hat{G}$

Permeabilidad magnética del vacío  $\mu_B = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

# Símbolos

$\hat{\quad} \equiv$  aplicado a una constante , hexadimensional

$\vec{B} \equiv$  Inducción magnética

$\vec{B}_g \equiv$  Inducción gravitomagnética

$\beta r \equiv$  Constante de propagación de una onda

$\oint \vec{E} dl \equiv$  Circulación del vector  $\vec{E}$

$dl \equiv$  diferencial de longitud

$dS \equiv$  diferencial de superficie

$E \equiv$  Energía

$\vec{E} \equiv$  Campo eléctrico

$\vec{E}_g \equiv$  Campo gravitatorio

$E_r \equiv$  Energía residual

$E_0 \equiv$  Energía de una partícula en reposo

$E_c \equiv$  Energía cinética

$E_m \equiv$  Energía mecánica

$\oint \vec{E} dS \equiv$  Flujo del vector  $\vec{E}$

$\vec{H} \equiv$  Excitación magnética

$\vec{H}_g \equiv$  Excitación gravitomagnética

$i \equiv$  intensidad de corriente

$i_g \equiv$  intensidad de corriente másica

$j \equiv$  densidad de corriente

$j_m \equiv$  densidad de corriente másica

$K \equiv$  constante de Boltzman

$k \equiv$  Número de onda circular

$k_c \equiv$  Número de ondas circular de corte

$L \equiv$  Longitud

$\lambda \equiv$  longitud de onda

$\lambda_{apa} \equiv$  longitud de onda aparente

$\lambda_0 \equiv$  longitud de onda para una partícula en reposo

$\vec{\nabla}^2 \equiv$  Laplaciano

$\vec{\nabla}_{6D}^2 \equiv$  Laplaciano hexadimensional

$\vec{\nabla}_{3D}^2 \equiv$  Laplaciano tridimensional

$m \equiv$  masa

$m_0 \equiv$  masa en reposo

$\mu \equiv$  momento magnético

$\mu_g \equiv$  momento gravitomagnético

$\vec{n} \equiv$  vector normal

$\nu \equiv$  frecuencia

$p \equiv$  momento lineal

$p_e \equiv$  perímetro

$Q, q \equiv$  carga eléctrica

$q_e, e \equiv$  Carga del electrón

$R \equiv$  curvatura escalar

$r \equiv$  radio

$T \equiv$  tensor de materia – impulso

$v \equiv$  velocidad

$v_g \equiv$  velocidad de grupo

$v_p \equiv$  velocidad de propagación

$\omega \equiv$  frecuencia angular

$\xi \equiv$  Dimensión radial compactada

$\xi_0 \equiv$  Dimensión radial compactada correspondiente a la masa en reposo de una partícula

# 1.Introducción. La teoría de Kaluza-Klein

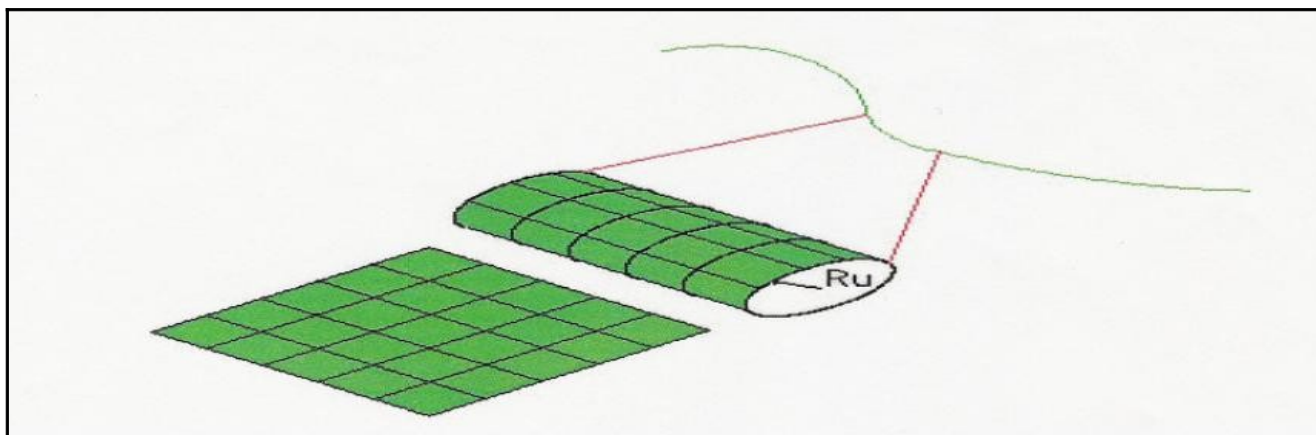
La teoría de Kaluza-Klein pretende unificar las 2 fuerzas fundamentales de la gravedad y el electromagnetismo mediante la introducción de una cuarta dimensión espacial. Fue enunciada por primera vez por el matemático polaco Kaluza, el cual extendió la relatividad general a un espacio-tiempo de 5 dimensiones. Las ecuaciones resultantes pueden dividirse en varios grupos de ecuaciones, uno de ellos se corresponde con las ecuaciones de campo de Einstein ( gravedad), otro con las ecuaciones de Maxwell (electromagnetismo) y finalmente un campo escalar de significado físico poco claro.

Ecuaciones de campo de Einstein

$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{13}$	$g_{14}$	M a x w e l l	
$g_{21}$	$g_{22}$	$g_{23}$	$g_{24}$		
$g_{31}$	$g_{32}$	$g_{33}$	$g_{34}$		
$g_{41}$	$g_{42}$	$g_{43}$	$g_{44}$		
M a x w e l l				$\Phi$	Campo escalar

Es decir, el mero hecho de que cada partícula tenga libertad para moverse a través de una dimensión adicional permite la unificación de la gravedad con el electromagnetismo. A pesar de este resultado espectacular la teoría adolecía de un grave problema, y es que, ¿donde se encuentra esta 4º dimensión?. Si el mundo poseyese 4 dimensiones espaciales la gravedad disminuiría con el cubo de la distancia, circunstancia que contradice la experiencia diaria, ya que disminuye con el cuadrado de la distancia.

Con el fin de intentar explicar porque la dimensión extra no afecta a las leyes físicas Oscar Klein en 1926 propuso que la 4º dimensión espacial se encuentra curvada sobre sí misma en un círculo de radio extremadamente pequeño (por debajo de  $10^{-18}$  m) de tal manera que una partícula que se mueva una pequeña distancia en la dirección de esta dimensión debería retornar al punto de inicio. La distancia que una partícula debe viajar antes de retornar a su punto de inicio se define como el tamaño de esa dimensión y esta dimensión extra se dice que esta compactada



**Figura 1. Proceso de compactación de una dimensión y ejemplo de como un cilindro tridimensional aparenta un hilo unidimensional cuando el radio de compactación es suficientemente pequeño.**



Por tanto a partir de ahora deberíamos representamos el espacio-tiempo como si en cada punto existiese un pequeño círculo en el cual las partículas se pueden mover libremente.

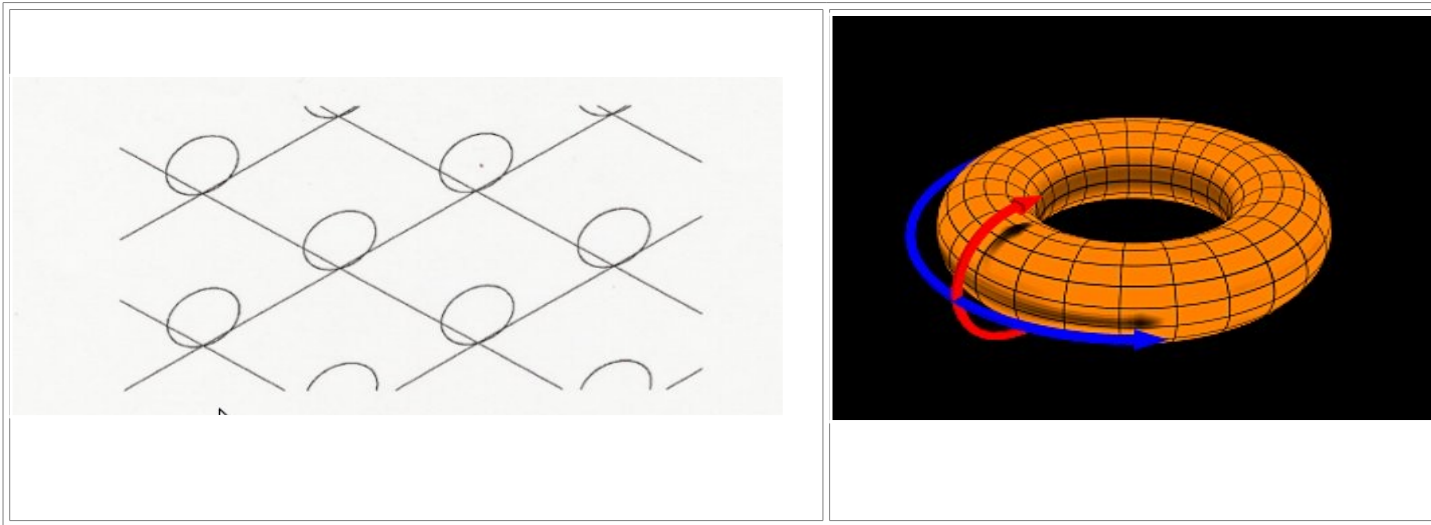
En la teoría de Kaluza-Klein la pura geometría de un espacio-tiempo de 5 dimensiones vacío ( sin masa) conduce a las ecuaciones de un mundo tetradimensional con masa. Lamentablemente la aplicación de dicha teoría al estudio del electrón proporciona una relación masa-carga que difiere de la experimental unos 20 ordenes de magnitud, razón por la cual fue abandonada en gran parte durante varias décadas.

## 2.Consideraciones a la teoría de Kaluza-Klein

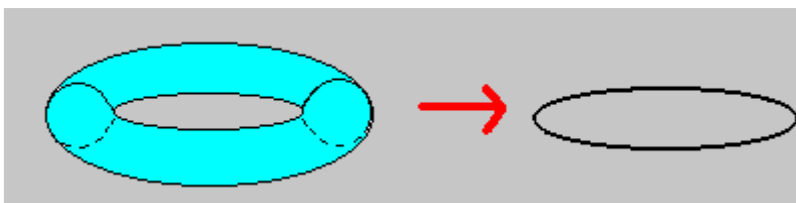
### 2.1 Sobre la topología circular de las dimensiones

La curvatura de una dimensión exige la existencia de otra sobre la que curvarse, como puede comprobarse simplemente dibujando un círculo. Si nos centramos en la hipotética 4ª dimensión espacial de topología circular de la teoría de Kaluza-Klein tenemos 2 opciones:

1. La 4ª dimensión espacial se curva sobre alguna de las dimensiones espaciales conocidas, lo que provocaría que el espacio no fuese isótropo(las leyes de la Física cambiarían según las direcciones espaciales) , circunstancia que contradice la experiencia.
2. La 4ª dimensión espacial se curva sobre otra dimensión espacial extra también compactada , como por ejemplo en el caso de un toroide. Es fácil ver que, independientemente de su numero, podemos separar las dimensiones en 2 grandes grupos, las extendidas y las compactadas.



**Figura 2. Representación de una hipotética cuarta dimensión espacial arrollada sobre una dimensión extendida o sobre otra dimensión compactada.**



### 3. Significado físico de las 2 dimensiones espaciales adicionales

#### 3.1 La fórmula relativista de la energía.

La fórmula relativista de la energía de un cuerpo en movimiento es:

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (p c)^2 \quad \text{donde:}$$

- E = Energía de un cuerpo en movimiento
- $m_0$  = masa en reposo del cuerpo
- c = velocidad de la luz
- p = momento lineal del cuerpo, igual al producto de la masa por la velocidad.

Si escribimos la energía en función de las componentes de la velocidad  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$  tendremos:

$$E^2 = (m_0 \cdot c)^2 + (m_0 \cdot c \cdot V_x)^2 + (m_0 \cdot c \cdot V_y)^2 + (m_0 \cdot c \cdot V_z)^2$$

ecuación que sugiere que todos los cuerpos se mueven a la velocidad de la luz en una dirección perpendicular a  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_z$ .

En el seno de la teoría de la relatividad el término  $(m_0 c^2)$  se interpreta como el resultado del desplazamiento de los cuerpos a través del tiempo a la velocidad de la luz. Otra posibilidad consiste en identificar este término con la energía debida a un movimiento en la dirección de la cuarta dimensión espacial postulada en la teoría de Kaluza-Klein.

Este movimiento a la velocidad de la luz de las partículas elementales sería en la dirección  $R_v$ .

Ahora bien, debido a la topología circular de la dimensión adicional dicho movimiento visto perpendicularmente desde las otras dimensiones expandidas debería percibirse como una vibración.

Considerando la modificación propuesta en 1913 por Albert Einstein y Otto Stern de la fórmula deducida en 1900 por Max Planck para un radiador de energía aislada tenemos:

$$E = \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1} + \frac{h \cdot \nu}{2}$$

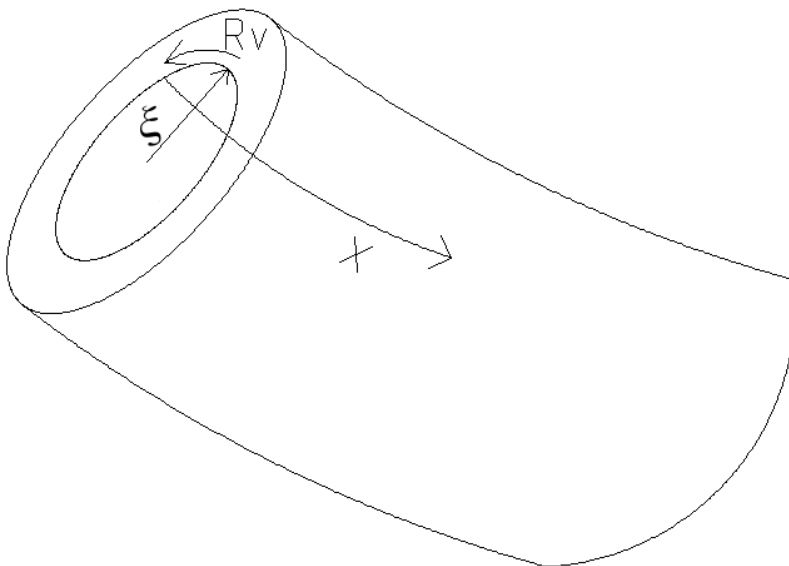


Fig. 3 Sistema de coordenadas compactadas.

donde:

$h$ = constante de Plank ,  $K$ = constante de Boltzman ,  $\nu$ = frecuencia  $T$ = temperatura absoluta

se puede observar que incluso a la temperatura del cero absoluto cualquier partícula posee una energía residual de vibración igual a:

$$E_r = \frac{h \cdot \nu}{2}$$

Esta ecuación ha sido interpretada en numerosas ocasiones como un reflejo de la energía de las fluctuaciones cuánticas del vacío. Sin embargo podría interpretarse esa vibración como la proyección en nuestras 3 dimensiones del movimiento de las partículas a la velocidad de la luz en la 4° dimensión espacial  $R_v$ . En ese caso podemos igualar las 2 energías

$$\begin{array}{l}
 E = m_0 c^2 \\
 \\
 E_r = \frac{h \cdot \nu}{2}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 m_0 c^2 = \frac{h \cdot \nu}{2} \\
 \\
 \nu = \frac{2 \cdot m_0 c^2}{h}
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 \\
 \text{frecuencia de los electrones en función de su masa.}
 \end{array}$$

Si la trayectoria fuese circular y suponiendo que todas las partículas viajan a la velocidad de la luz se puede deducir el radio de dicho movimiento circular:

$$\begin{array}{l}
 v = \frac{c}{2\pi \xi_0} \\
 \\
 v = \frac{2m_0 c^2}{h}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \xi_0 = \frac{h}{4\pi m_0 c} = \frac{\bar{h}}{2m_0 c} \text{ Para el caso del electrón tendríamos} \\
 \\
 \xi_e = \frac{\bar{h}}{2m_e c} = 1,93079616 \cdot 10^{-13} m
 \end{array}
 \right.$$

donde  $h$  representa la constante reducida de Planck y  $\xi$  el radio de la trayectoria circular a través de las 2 dimensiones compactadas.

El perímetro sería:

$$\boxed{p_e = \frac{h}{2m_0 c}}$$

lo que representa una semilongitud de onda de D'Broglie para una partícula que se desplace a la velocidad de la luz.

### 3.2 Interpretación de la masa como la inversa de una longitud

La relación anterior proporciona una interpretación física de la masa en reposo como la inversa de una longitud.

$$\xi_0 = \frac{\bar{h}}{2m_0c} = \frac{1,7588 \cdot 10^{-43}}{m_0} \quad \text{en unidades del S.I.}$$

Esta interpretación permite un nuevo punto de vista de fenómenos ya conocidos, por ejemplo si analizamos dimensionalmente la energía tendremos:

$$\text{Energía} = \text{Fuerza} \cdot \text{desplazamiento} = [M L T^{-2} \cdot L] = [L^{-1} \cdot L^2 T^{-2}] = [L T^{-2}]$$

es decir, proporciona para la energía gravitatoria unidades de aceleración, que coincide con el fenómeno que se manifiesta físicamente.

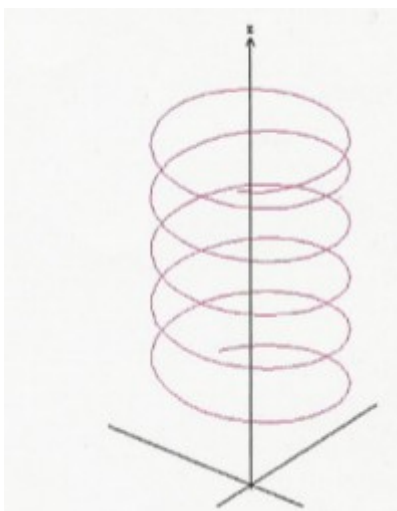
Si analizamos dimensionalmente la densidad tenemos:

Densidad = Masa/Volumen =  $[L^{-4}]$  es decir, unidades de curvatura, coincidiendo con la teoría de la relatividad general que relacionaba directamente la densidad de materia-energía con la curvatura del espacio-tiempo.

Por otro lado si consideramos la ecuación que relaciona la curvatura escalar R con el tensor de materia-impulso T tenemos:  $-R = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T$  donde el factor  $\frac{8\pi G}{c^4} = 2,0766 \cdot 10^{-43}$  es del mismo orden de magnitud que el factor  $\frac{\bar{h}}{2c} = 1,7588 \cdot 10^{-43}$ .

### 3.3 La longitud de onda de D'Broglie

La composición del movimiento circular en el plano de las dimensiones compactadas con cualquier desplazamiento en el resto de dimensiones conformaría trayectorias helicoidales.



El triángulo de velocidades puede representarse por tanto:

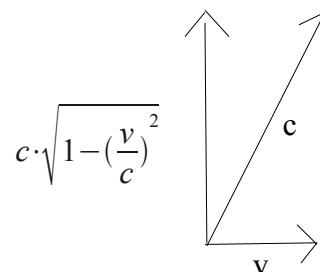
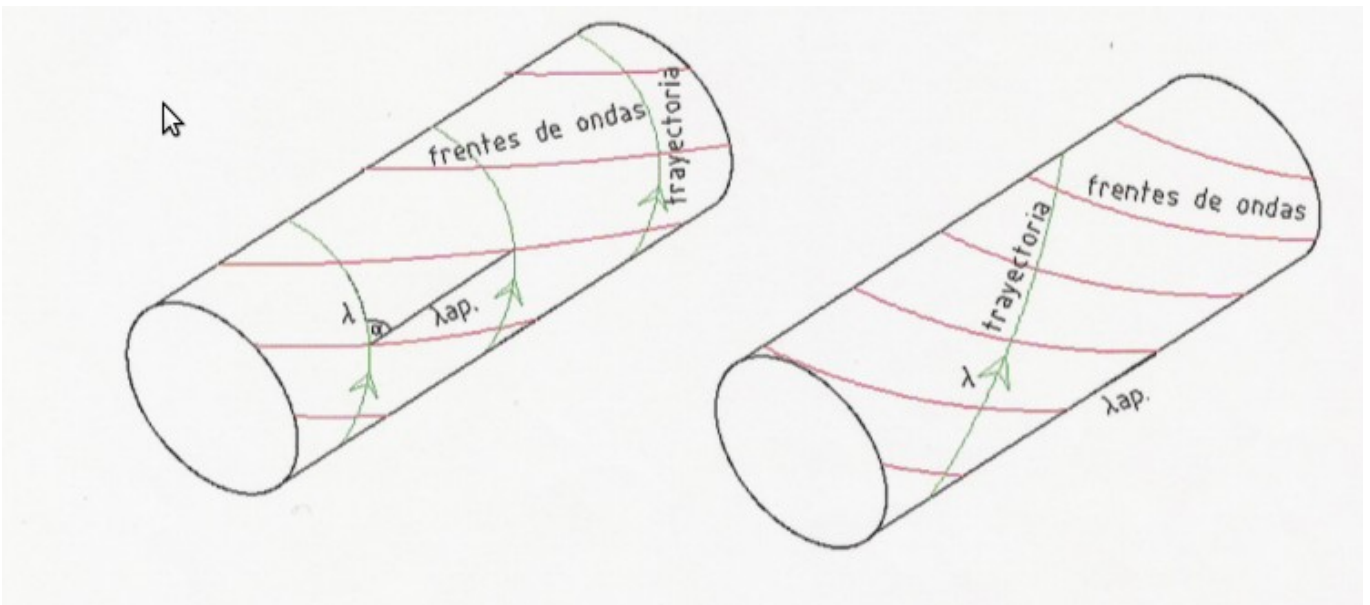


Fig. 4 Trayectorias helicoidales



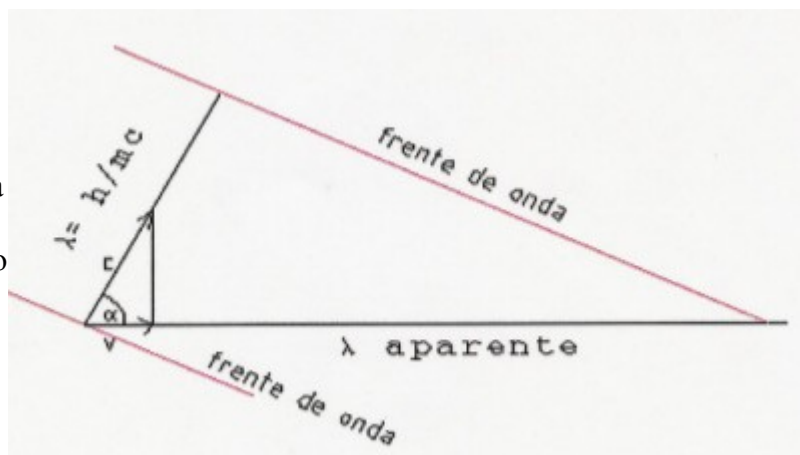
**Fig 5. Trayectorias reales de las partículas en el espacio.**

La onda transversal asociada a una partícula material que se mueva a la velocidad de la luz tendría una longitud de onda igual a :

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_0 \cdot c}$$

Sin embargo, para un observador tetradimensional que estudiase este fenómeno le parecería que a la partícula material tiene asociada una onda de  $\lambda$  aparente igual a la proyección sobre las dimensiones no compactadas.

Por tanto:



**Fig 6. Triangulo de velocidades.**

$$\cos \alpha = \frac{v}{c}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{\frac{h}{m_0 \cdot c}}{\lambda_{apa}} \quad \longrightarrow \quad \lambda_{apa} = \frac{h}{m_0 \cdot v}$$

$$\cos \alpha = \frac{\lambda_0}{\lambda_{apa}} = \frac{\frac{h}{m_0 \cdot c}}{\lambda_{apa}}$$

Como la longitud de onda aparente es una dimensión en la dirección del movimiento aparecerá contraído por el efecto relativista  $\lambda_{apa} = \frac{h}{m_0 \cdot v} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ , que coincide con la longitud de onda de D'Broglie para las partículas materiales.

### 3.4 Influencia de la curvatura del espacio en fenómenos que suceden a escalas muy superiores a la de las dimensiones compactadas. Radio de las dimensiones compactadas.

En condiciones en las que se pueda considerar al espacio tridimensional como plano ó cuasi plano las ecuaciones de campo de Einstein pueden linealizarse y escribirse de una forma muy similar a las ecuaciones de Maxwell.

Para comprender la necesidad de la constante G en los fenómenos macroscópicos analizados desde un punto de vista pentadimensional sería conveniente considerar las leyes del gravitomagnetismo en su forma integral.

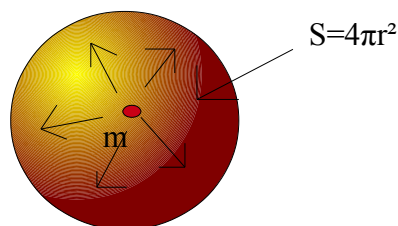
Forma integral
$\oint_s E_g \cdot dS = 4\pi G \cdot m$
$\oint_s B_g \cdot dS = 0$
$\oint E_g \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_s \vec{B}_g \cdot d\vec{S}$
$\oint_c B_g \cdot d\vec{S} = \frac{-4\pi G}{c} \oint_s \vec{j}_m \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt} \oint_s \vec{E}_g \cdot \vec{n} dS$

La primera ecuación es el equivalente a la ley de Gauss para el campo gravitatorio.

$$\oint_s E_g \cdot dS = 4\pi G \cdot m$$

"El flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada es igual a la masa encerrada en dicha superficie multiplicada por  $4\pi G$ "

$$4\pi r^2 \cdot E_{gSD} = 4\pi G \cdot m_0$$



Notese que la ecuación resultante es una ecuación pentadimensional, ya que  $m_0 = \frac{\hbar}{2\xi_0 c}$ , por tanto debemos pensar en que todas nuestras ecuaciones actuales se refieren a un mundo con 3 dimensiones espaciales expandidas, el tiempo y la inversa de la masa:

Si por el principio de equivalencia la masa inercial y la masa gravitatoria son esencialmente lo mismo no tiene sentido la presencia de la constante de gravitación  $G$ , las leyes del gravitomagnetismo expresados en 6 dimensiones no deben necesitar de ninguna constante, o, lo que es lo mismo la constante gravitatoria en 6D debe ser  $\hat{G}=1$ .

Si suponemos un mundo de 5D en el cual una de las dimensiones espaciales extendidas se compactase linealmente hasta una extensión "a" como se muestra en la figura 7 veamos que ocurriría cuando los físicos de ese mundo analizaran la ley de Gauss en 4 D.

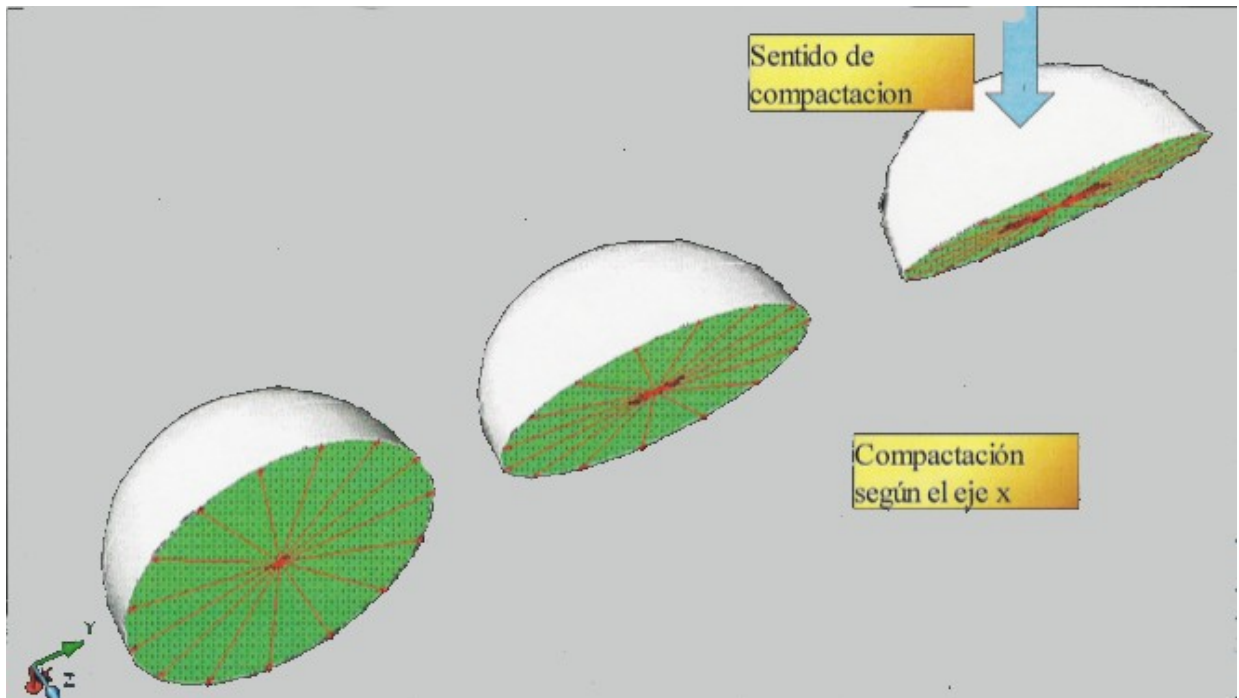
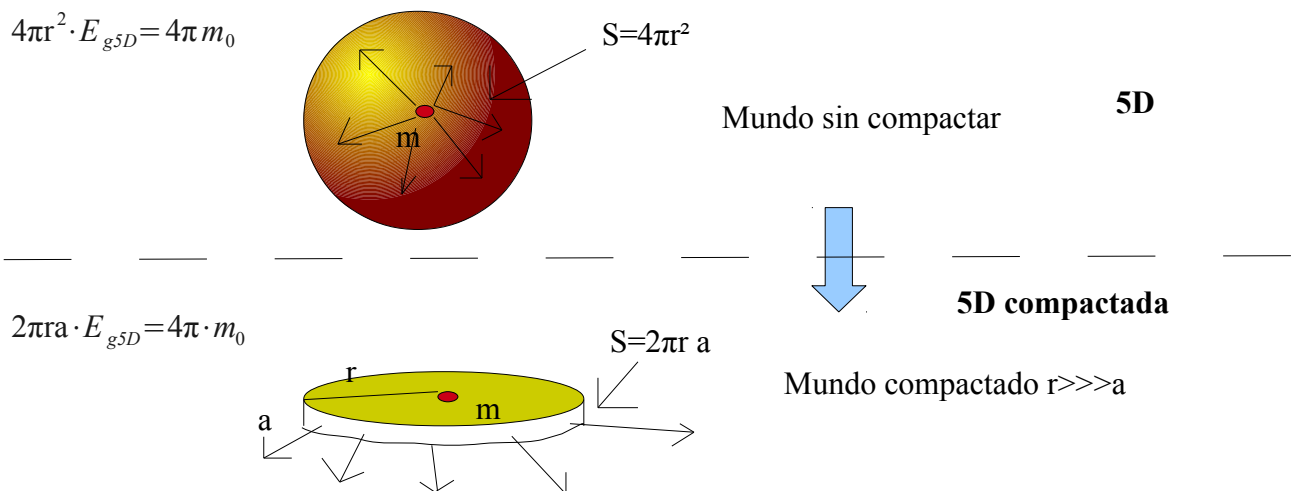


Fig 7. Efecto sobre la ley de Gauss al compactar linealmente una dimensión espacial.



Los científicos de este mundo plano de 4D medirían un campo  $E_g$  y le intentarían aplicar la ley de Gauss obteniendo el siguiente resultado:

$$2\pi r \cdot E_{g4D} = 4\pi \cdot m_0 \qquad \qquad \qquad \mathbf{4D}$$

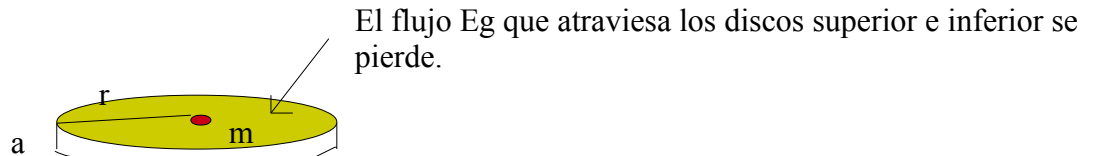
Igualando las 2 ecuaciones tendremos:

$$2\pi r \cdot E_{g4D} = 2\pi r a \cdot E_{g5D} \quad \text{luego} \quad E_{g4D} = a \cdot E_{g5D}$$

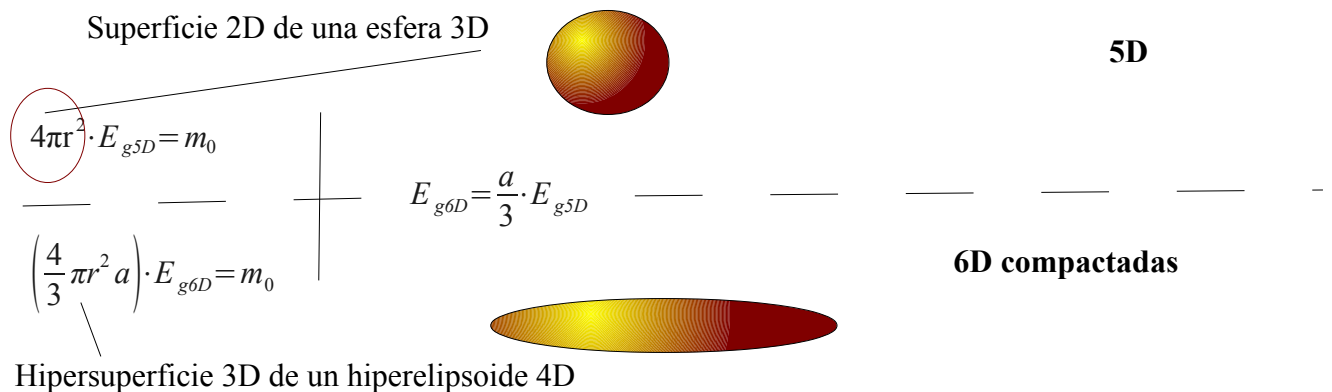
Como  $E_{g4D}$  tiene que ser igual a  $E_{g5D}$  habría que añadir una constante para que la formula en 4D proporcionase un resultado correcto:

$$2\pi r \cdot E_{g4D} = 4\pi a \cdot m_0, \quad \text{es decir aparece una constante de gravitación } G = a.$$

Como  $a$  es muy pequeño el campo medido al compactar una dimensión es mucho menor. Podemos decir que de alguna manera la gravedad se “escapa” hacia otras dimensiones:

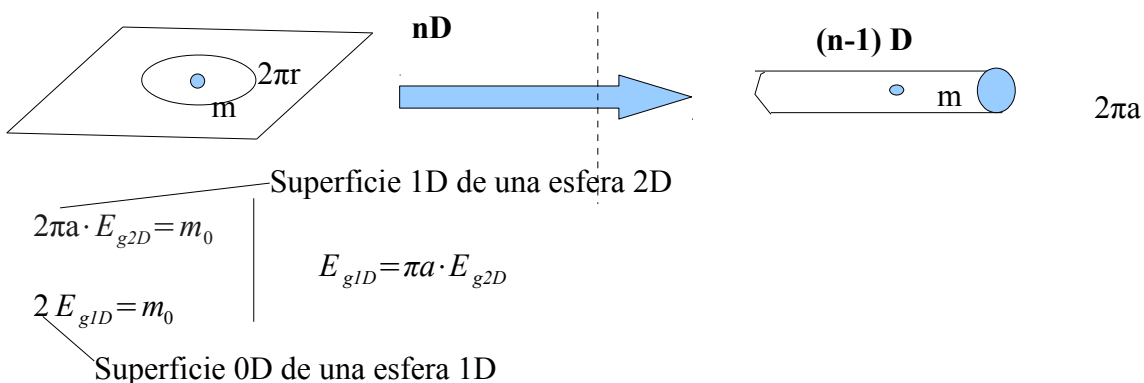


Si estudiamos el caso de compactar linealmente (sin condición circular) la 5ª dimensión tendríamos:



Luego desde nuestro punto de vista pentadimensional se percibiría un campo  $a/3$  veces menor.

En el caso de una dimensión que se enrolla sobre sí misma en un círculo de radio “ $a$ ” tendríamos:



Es decir al compactar circularmente una dimensión el campo quedaría alterado en un factor igual a  $\pi a$ , lo que nos permite estimar el radio de las dimensiones compactadas de la relación:

$$G = \pi \cdot R_u \rightarrow R_u = \frac{G}{\pi} = 2,1240819 \cdot 10^{-11} m$$



En consecuencia la curvatura del espacio-tiempo hexadimensional justifica la relación entre la masa inercial y la masa gravitatoria cuando hablamos de fenómenos que suceden a escalas muy superiores al tamaño de la 5ª dimensión espacial. Por tanto la mayor parte de las constantes deben desaparecer cuando efectuamos los cálculos en 6D. (  $\hat{\mu}_{0g}=1, \hat{G}=1, \dots$  )

Por otro lado, los fenómenos que suceden a escalas inferiores siguen la ley de la inversa del cubo, lo que al menos de manera cualitativa podría justificar la diferencia de escalas entre las 4 fuerzas fundamentales de la Naturaleza.

### 3.5 Interpretación del principio de incertidumbre.

El principio de incertidumbre para la posición y el momento afirma que  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  por tanto la

incertidumbre del momento debe satisfacer  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ , si usamos la ecuación relativista que liga la energía con el momento  $p = \gamma m_0 v$  cuando la incertidumbre del momento supera el valor de  $m_0 c$  entonces la incertidumbre de la energía superaría el valor de  $m_0 c^2$ , suficiente para generar otra partícula del mismo tipo. Por tanto debe existir una limitación fundamental en la incertidumbre de la posición

$$\Delta x \geq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hbar}{m_0 c} \right) \text{ o lo que es lo mismo } \Delta x \geq \xi_0 .$$

Se infiere por tanto que el principio de incertidumbre deriva del hecho de estudiar fenómenos que suceden en 5 dimensiones espaciales como si se tratase de fenómenos con 3 dimensiones espaciales. No es de extrañar por tanto que la longitud de onda compton represente la longitud que define el límite entre el comportamiento como partícula o como onda.

## 4. Origen del campo eléctrico.

### 4.1 Sobre el gravitomagnetismo.

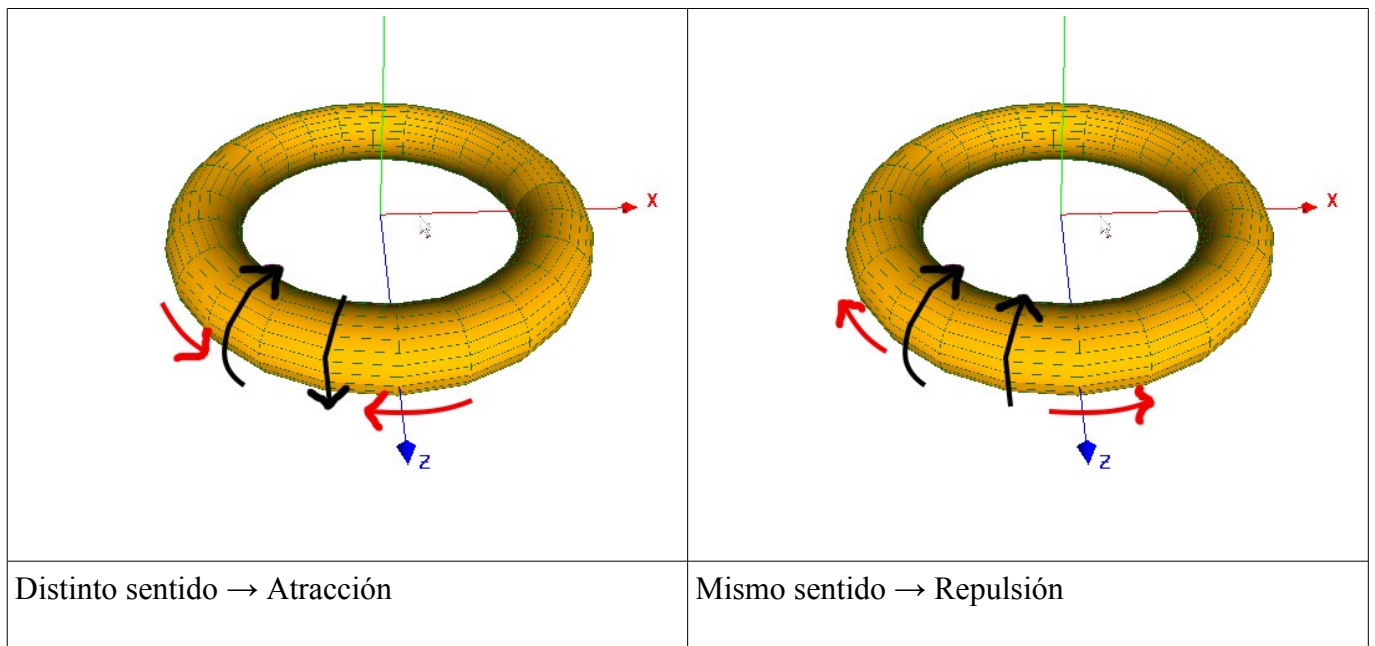
Si escribimos las ecuaciones del gravitomagnetismo comparándolas con las ecuaciones de Maxwell.

GRAVITOMAGNETISMO	ELECTROMAGNETISMO
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -4\pi G \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_g = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\vec{\nabla} \times \vec{B}_g = \frac{-4\pi G}{c} \cdot \vec{j}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

A pesar de las evidentes similitudes las ecuaciones del gravitomagnetismo se diferencian en dos signos de las ecuaciones de Maxwell, el primero indica que solo pueden existir fuerzas atractivas entre las masas, la segunda indica que **dos corrientes de masa que circulan en el mismo sentido se repelen** al contrario de lo que sucede en el electromagnetismo en el que se atraen.

## 4.2 Campo gravitomagnético producido por las partículas elementales.

Las partículas elementales girando en trayectorias muy pequeñas a la velocidad de la luz deben producir un campo de inducción  $B_g$  considerable provocando un campo de fuerzas que cualitativamente es similar al campo eléctrico, tal como se muestra en la figura n° 8.



**Fig 8. Ejemplo en 3 dimensiones de como un movimiento circular de una masa puede provocar la ilusión de la existencia de una carga eléctrica.**

Como habíamos visto en el capítulo anterior las leyes del gravitomagnetismo expresados en seis dimensiones no deben necesitar de ninguna constante, o, lo que es lo mismo la constante gravitatoria en 6D debe ser  $\hat{G}=1$ .

Para calcular el campo de inducción generado por las partículas elementales se puede asimilar al campo generado por una espira circular.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

ELECTROMAGNETISMO 5D

$$B_g = \frac{-4\pi \hat{G}}{c} \cdot \frac{i_g}{2R^2}$$

GRAVITOMAGNETISMO 6D

Nota: Si consideramos la masa como la inversa de una longitud cualquier ecuación que contenga la dimensión masa ( ó carga eléctrica, ya que la relación carga/masa es constante para cada tipo de partículas elementales) se debe considerar como una ecuación en 5 dimensiones, 4 espaciales más una temporal.

Si el campo eléctrico es la expresión en 5D del campo gravitomagnético en 6D entonces  $B=B_g$

$$\frac{B}{B_g} = \frac{\mu_0 2cR^2}{-4\pi \hat{G} \cdot 2R} \cdot \frac{i}{i_g} = 1$$

la relación entre la intensidad eléctrica y la intensidad gravitatoria es la misma que la relación entre la carga y la masa de una partícula elemental. Por tanto se puede escribir:

$$\frac{\mu_0 cR}{-4\pi \hat{G}} \cdot \frac{q}{m_0} = 1$$

Teniendo en cuenta que hemos postulado que  $\hat{G}=1$  y que  $R=\xi_e = \frac{\bar{h}}{2m_e c} = 1,93079616 \cdot 10^{-13}$

$$\frac{\mu_0 c \xi_e}{-4\pi} \cdot \frac{q_e}{m_e} = 1$$

$$\frac{q_e}{m_e} = 1,72759870 \cdot 10^{11} \text{ en unidades del S.I.}$$

Si comprobamos la relación experimental carga-masa del electrón tendremos:

$$\frac{q}{m_0} = \frac{e}{m_{e0}} = \frac{1,602176 \cdot 10^{-19}}{9,10938291 \cdot 10^{-31}} = 1,75881946 \cdot 10^{11}$$

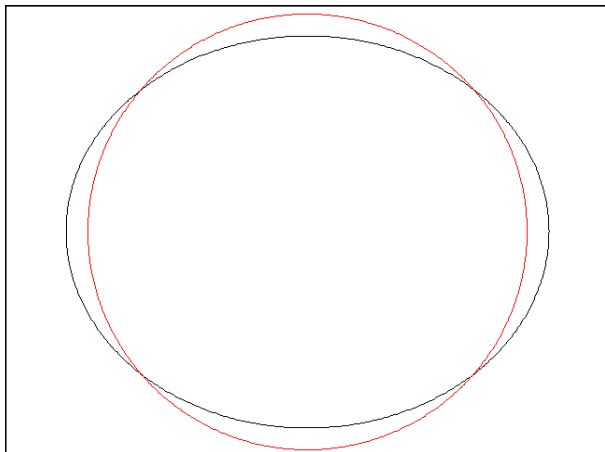
que difiere en un 1,8% del valor estimado.

Por tanto, al considerar la masa como la inversa de una longitud es posible salvar la principal dificultad que presentaba la teoría de Kaluza-Klein.

Es de observar que simplemente considerando un valor de  $\hat{G} = 1,01807176$  se puede obtener un valor de la relación carga-masa del electrón correcta. Esto supone que el radio de las dimensiones compactadas anteriormente estimado debe reducirse en el mismo porcentaje, es decir

$$R_u = G/(\pi \hat{G}) = 2,0863774 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

### 4.3 Topología elíptica de las dimensiones compactadas.



La forma más sencilla de incrementar la inducción magnética manteniendo el perímetro recorrido consiste en deformar la trayectoria circular a una elipse. En efecto, si observamos la expresión que permite calcular la inducción magnética en el centro de una espira de corriente elíptica tendremos:

$$B_z = \mu_0 I \frac{l}{4S}$$

donde  $l$  = perímetro,  $S$  = superficie,  $I$  = Intensidad eléctrica.

Para estimar la longitud se ha utilizado la siguiente formula aproximada:

$$L \approx \pi(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)})$$

Si elegimos una espira circular de radio unidad y la deformamos manteniendo el perímetro constante basta con elegir una espira de semiejes  $a=1,10576$  y  $b=0,8883$  para incrementar la relación longitud-superficie y por tanto el campo de inducción magnética B por un factor de 1,018068, lo que proporcionaría el valor correcto de relación masa-carga para el electrón.

Se ha estimado la longitud de la elipse obtenida anteriormente mediante la relación:

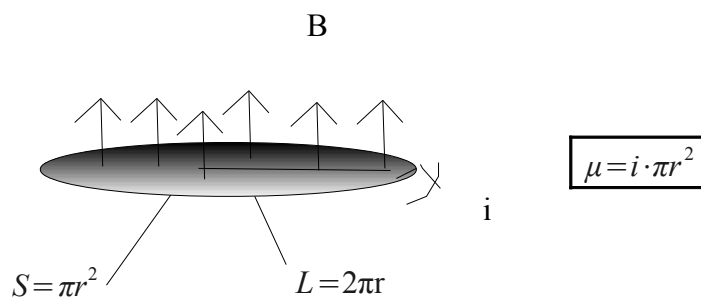
$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

donde e representa la excentricidad de la la elipse. Se ha encontrado que el error cometido al utilizar la formula aproximada es de  $3,42 \cdot 10^{-6}$  por uno.

No obstante es posible seguir utilizando la hipótesis circular en muchos casos simplemente manteniendo la constante  $\hat{G} = 1,01807176$ , que ahora se considera un factor de forma.

#### 4.4 Ejemplo de aplicación. Momento magnético intrínseco del electrón.

Veamos como se pueden convertir las formulas electromagnéticas 5D a gravitomagnéticas 6D.



La expresión del momento gravitomagnético debería ser análogamente el producto de la intensidad másica por la superficie abrazada por la espira. Sin embargo como las distancias involucradas son inferiores a G debemos utilizar formulas referidas a 6 dimensiones.

Para convertir la formula a 6D partimos de la definición de momento magnético.

$$\mu = \frac{1}{2} \int r \times i dl$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Eliminar constantes( salvo aquellas que provengan de las leyes de Maxwell).

$$\mu = \int r \times i dl$$

2. Dividir por r para pasar de 5D a 6D.

$$\mu = \frac{1}{r} \int r \times i dl = i \int dl = i \cdot 2\pi R$$

3. Utilizar la intensidad másica en vez de la intensidad eléctrica.

$$\mu = i_m \cdot 2\pi R$$

4. Eliminar la constante electromagnética y sustituirla por la gravitomagnética, es decir, multiplicar por el factor  $\frac{-4\pi \hat{G}/c}{\mu_0}$ .

$$\mu_g = \frac{-4\pi \hat{G}/c}{\mu_0} \cdot i_m \cdot 2\pi R$$

El flujo másico será  $i_m = m_0 \cdot v$  donde  $v = \frac{n^\circ \text{ vueltas}}{\text{segundo}} = \frac{c}{2\pi R}$  ya que habíamos postulado que el electrón viaja a la velocidad de la luz en las dimensiones compactadas.

Luego

$$\mu_g = \frac{-4\pi \hat{G}}{\mu_0 c} \cdot \frac{m_0 c}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \frac{-4\pi \hat{G} m_0}{\mu_0}$$

sustituyendo para el caso del electrón y como  $\hat{G} = 1,01807176$  tendremos

$$\mu_g = \frac{-4\pi \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,01807176}{4\pi \cdot 10^{-7}} = -9,2740055 \cdot 10^{-24} \text{ en unidades del SI.}$$

La estimación produce un valor muy similar al magnetón de Bohr, que es de  $9,274 \cdot 10^{-24}$  en el mismo sistema de unidades.

## 5. Los electrones como pulsaciones gravitomagnéticas.

### 5.1 Ecuación de ondas gravitomagnéticas.

La ecuaciones del gravitomagnetismo son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = -4\pi G\rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_g = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}$$

$$\nabla \times B_g = \frac{-4\pi G}{c} \cdot \vec{j}_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}$$

Si tenemos en cuenta que hemos postulado que  $\hat{\mu}_{0g}$  tiene que ser igual a la unidad para 6D y por tanto  $B=H$  podemos plantear las ecuaciones del gravitomagnetismo en ausencia de masas.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = 0(a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_g = 0(b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_g}{\partial t}(c)$$

$$\nabla \times H_g = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}(d)$$

Operando en (c) tenemos  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}_g) = \vec{\nabla} \times \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_g}{\partial t} \right)$

por tanto  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}_g = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\nabla \vec{H}_g \times H_g)}{\partial t}$

y sustituyendo  $\nabla \times H_g = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}_g = \vec{\nabla}^2 \vec{E}_g$

nos queda  $\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E}_g = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla^2 \vec{E}_g}{\partial t^2}}$

La velocidad de fase viene dada por  $v_p = \frac{w}{k}$  lo que significa que  $v_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2}}} = c$  y por tanto:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_g + \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial \vec{E}_g}{\partial t^2} = 0$$

Análogamente podemos obtener:

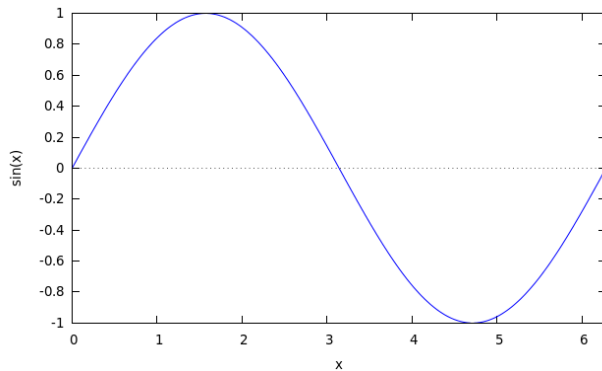
$$\vec{\nabla}^2 \vec{H}_g + \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial \vec{H}_g}{\partial t^2} = 0$$

Si suponemos que el campo tiene dependencia armónica con el tiempo de la forma

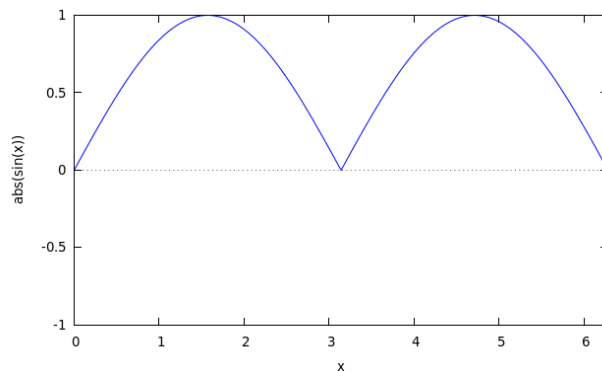
$$\vec{\Psi} = |\vec{\Psi}_0 e^{-i\omega t}| \text{ se llega a la conclusión:}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_g + \frac{\omega^2}{v_p^2} \vec{E}_g = 0 \text{ si llamamos número de onda } k \text{ al cociente } \frac{\omega}{v_p} \text{ nos quedaría:}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_g + k^2 \vec{E}_g = 0 \text{ totalmente análoga a las ecuaciones de Helmholtz. y las soluciones serían del tipo.}$$



Sin embargo las ondas gravitomagnéticas son diferentes, ya que el campo gravitatorio no puede ser negativo.



En la figura podemos observar una onda gravitomagnética equivalente a la electromagnética superior.

Es de observar que para la misma frecuencia la onda gravitomagnética presenta una longitud de onda que es la mitad de la electromagnética equivalente, por tanto el número de onda  $k$  debe definirse como:

$$k = \frac{\pi}{\lambda}$$

**Fig 9. Onda gravitomagnética vs Onda electromagnética**

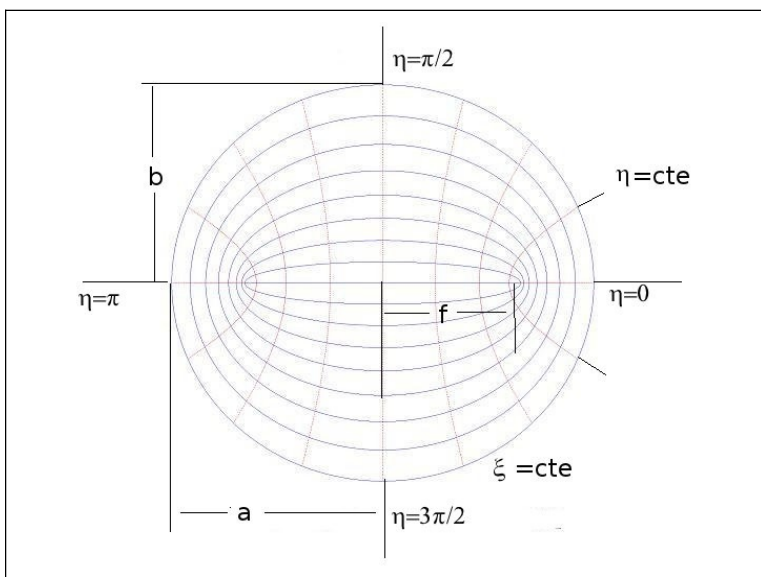
## 5.2 Ecuación escalar de onda gravitomagnética en 6D. Solución para una partícula-pulsación libre.

Debido a la topología del espacio las ondas gravitomagnéticas no pueden desplazarse libremente, sino que deben ajustarse a unas condiciones de frontera muy estrictas. El fenómeno físico más parecido se encuentra en la transmisión de las ondas electromagnéticas a través de ondas guía circulares o elípticas, aunque en este caso el confinamiento se debe a la curvatura del espacio y no a unas paredes metálicas.

Se va a utilizar un sistema de coordenadas cilíndrico elíptico en 5D espaciales:

**Dimensiones espaciales expandidas:** Coordenadas cartesianas  $x, y, z$ .

**Dimensiones espaciales compactadas:** Coordenadas elípticas, las curvas con  $\xi = \text{cte}$  representan elipses confocales, mientras que las curvas  $\eta = \text{cte}$  representan hipérbolas perpendiculares a las elipses anteriores. En el caso límite en que la distancia focal  $f$  se anula, es decir  $f=0$ , se reducen a coordenadas circulares, donde  $\text{radio}(\xi)$ ,  $\text{angulo}(\eta)$



**Fig 10. Coordenadas elípticas.**

La relación entre coordenadas cartesianas y elípticas es la siguiente:

$$x = f \cosh \xi \cos \eta, \quad y = f \sinh \xi \sin \eta$$

La ecuación de onda hexadimensional sería:

$$(\nabla_{6D}^2 + k^2) \cdot H = 0$$

Se va a resolver la ecuación para dos casos, primeramente suponiendo una topología circular y posteriormente generalizándola a una topología elíptica:



### 5.2.1 Topología circular de las dimensiones compactadas.

Aplicando el laplaciano en cilíndricas tenemos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} + k^2 \right) \cdot H = 0$$

Se puede solucionar mediante separación de variables

$$H(\xi, \eta, x, y, z) = G(\xi) \cdot N(\eta) \cdot F(x, y, z)$$

Sustituyendo:

$$G'' NF + \frac{1}{\xi} \cdot G' NF + \frac{1}{\xi^2} GN'' F + GN \cdot \nabla_{3D}^2 F + k^2 GNF = 0$$

Dividiendo por GNF

$$\frac{G''}{G} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{G'}{G} + \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{N''}{N} + \frac{\nabla_{3D}^2 F}{F} + k^2 = 0$$

Y como es habitual en los cálculos de ondas guía podemos descomponer el número de onda en 2:

$k^2 = \beta^2 + k_c^2$  donde  $\beta$  se denomina “constante de propagación” y  $k_c$  es el “número de ondas de corte” y representa la frecuencia mínima para que una onda pueda propagarse por la guía.

De tal forma que podemos obtener 2 ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{G''}{G} + \frac{1}{\xi} \cdot \frac{G'}{G} + \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{N''}{N} + k_c^2 = 0 \quad (1) \\ \frac{\nabla_{3D}^2 F}{F} + \beta^2 = 0 \quad (2) \end{array} \right\}$$

Si multiplicamos (1) por  $\xi^2$ :

$$\frac{\xi^2 \cdot G''}{G} + \xi \cdot \frac{G'}{G} + \frac{N''}{N} + \xi^2 \cdot k_c^2 = 0 \quad (3)$$

Que podemos descomponer en 2 ecuaciones que dependen de una única variable, y además como los términos de la ecuación suman una constante entonces cada término debe ser constante:

$$\frac{N''}{N} = -m_s^2 \rightarrow \boxed{N'' + m_s^2 N = 0} \quad (3a)$$

Cuya solución es:  $N(\eta) = A_0 \cdot \text{sen}(m_s \cdot \eta) + B_0 \cdot \text{cos}(m_s \cdot \eta)$

sustituimos  $\frac{N''}{N} = -m_s^2$  en (3) y obtenemos:

$$\xi^2 \cdot \frac{G''}{G} + \xi \cdot \frac{G'}{G} - m_s^2 + \xi^2 \cdot k_c^2 = 0 \rightarrow$$

$$\xi^2 \cdot G'' + \xi \cdot G' + (\xi^2 \cdot k_c^2 - m_s^2) \cdot G = 0 \quad (4) \text{ conocida como la ecuación diferencial de Bessel}$$

Examinemos  $m_s$  :

Lógicamente  $H(\xi, \eta, x, y, z) = H(\xi, \eta + \pi l, x, y, z)$  donde  $l = \text{entero}$

Esto solo puede ser cierto si  $m_s$  es **semientero**.

Recordemos que:

$N(\eta) = A_0 \cdot \text{sen}(m_s \cdot \eta) + B_0 \cdot \text{cos}(m_s \cdot \eta)$  se puede escribir como:

$$N(\eta) = C_0 \cdot \text{sen}[m_s \cdot (\eta - \eta_0)]$$

Si suponemos que los electrones son ondas gravitatorias para el caso de un electrón en reposo tendríamos que la constante de propagación  $\beta=0$ , en ese caso:

$$k^2 = 0^2 + k_c^2 = k_c^2$$

Si asociamos esta frecuencia de corte a la vibración que presentan todos los electrones entonces tendríamos:

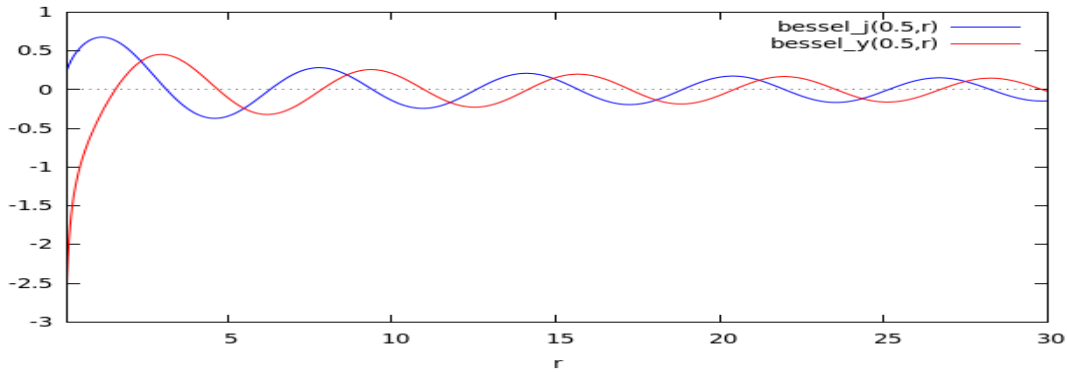
$k = \frac{\pi}{\lambda}$  donde la longitud de onda debe ser igual al perímetro del movimiento circular de los electrones, es decir:  $\lambda = \frac{h}{2m_0 c}$  lo que conlleva que:

$$k = k_c = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{2\pi m_0 c}{h} = \frac{m_0 c}{\hbar} \text{ y por tanto el número de ondas circular debe ser:}$$

$$k_c = \frac{m_0 c}{\hbar} \text{ Luego podemos escribir (4) como } \xi^2 \cdot G'' + \xi \cdot G' + \left( \xi^2 \cdot \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 - m_s^2 \right) \cdot G = 0 \quad (5)$$

Como ya habíamos comentado se trata de la conocida ecuación de Bessel, cuyas soluciones son:

- $J_\alpha \rightarrow$  Función de Bessel de primera especie.
- $Y_\alpha \rightarrow$  Función de Bessel de segunda especie.



**Fig 11. Funciones de Bessel.**

Como puede observarse ambas son funciones periódicas, por tanto no validas, ya que si no las ondas saldrían del universo.

Las funciones de Hankel tampoco son validas por ser combinaciones lineales de  $J_\alpha$  e  $Y_\alpha$ .

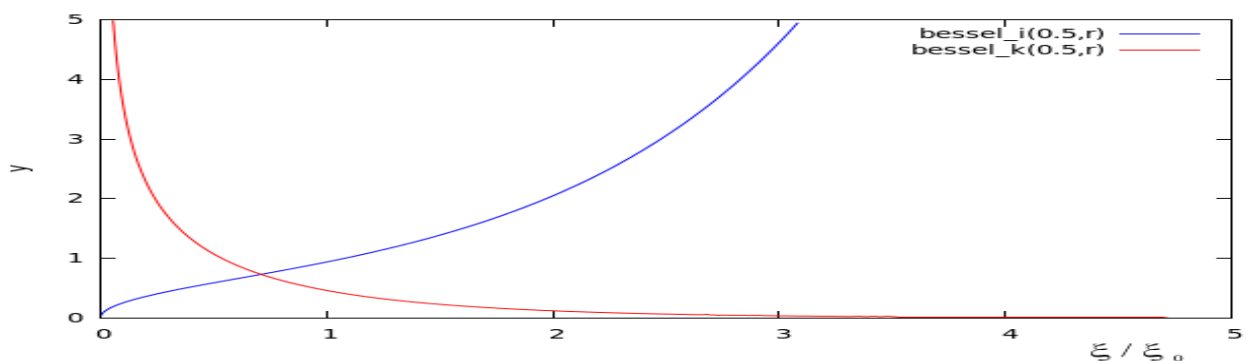
Sin embargo si consideramos  $k_c$  imaginario tendríamos:

$$\boxed{k_c = \frac{m_0 c}{\hbar} i} \rightarrow \boxed{\xi^2 G'' + \xi G' - \left( \xi^2 \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 + m_s^2 \right) G = 0} \quad (6) \text{ o Ecuación modificada de Bessel}$$

cuya solución general es:

$$G = C_2 I_{m_s} \left( \frac{2 m_0 c}{\hbar} \cdot \xi \right) + C_3 K_{m_s} \left( \frac{2 m_0 c}{\hbar} \cdot \xi \right) \quad (7)$$

donde  $I_{m_s}$  y  $K_{m_s}$  representan las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie respectivamente de orden  $m_s$ . Nótese el factor de escala 2 que corrige la diferente definición de  $n^\circ$  de onda. Si las representamos veremos que:



**Fig 12 Funciones modificadas de Besel.**

Es decir, ninguna de las funciones por separado puede cumplir con las condiciones de contorno, sin embargo si nos damos cuenta que en realidad  $r_u$  representa un horizonte de sucesos es fácil ver que la solución sería:

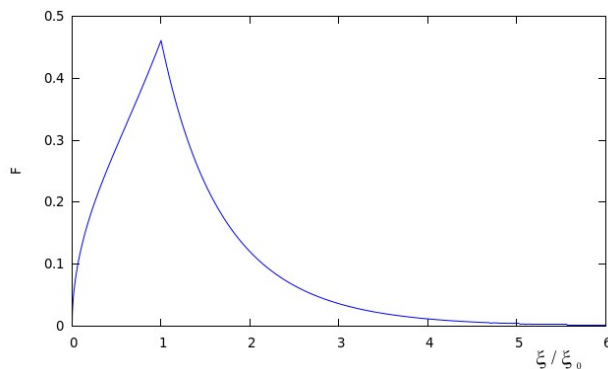
$$\left. \begin{aligned} Si \xi \leq \xi_0 \rightarrow G = C_2 I_{m_s} \left( \frac{2 m_0 c}{\hbar} \cdot \xi \right) \\ Si \xi \geq \xi_0 \rightarrow G = C_3 K_{m_s} \left( \frac{2 m_0 c}{\hbar} \cdot \xi \right) \end{aligned} \right\}$$

Las condiciones de contorno exigen que las 2 soluciones coincidan para

$$\boxed{\xi_0 = \frac{\hbar}{2m_0 c}} \text{ y por tanto } \boxed{\frac{2m_0 c}{\hbar} \xi_0 = \frac{2m_0 c}{\hbar} \cdot \frac{\hbar}{2m_0 c} = 1}$$

Luego si consideramos que el electrón representa la onda más sencilla posible  $m_s = \pm 1/2$  tendríamos que debe cumplirse:

$$C_2 \cdot I_{\frac{1}{2}}(1) = C_3 \cdot K_{\frac{1}{2}}(1) \text{ , lo que obliga a que: } C_2 = 0,4916 C_3$$



**Fig 13 Solución en función de  $\xi/\xi_0$**

Podemos por tanto representar la solución hallada  $G(\xi)N(\eta)$  para las dimensiones compactadas:

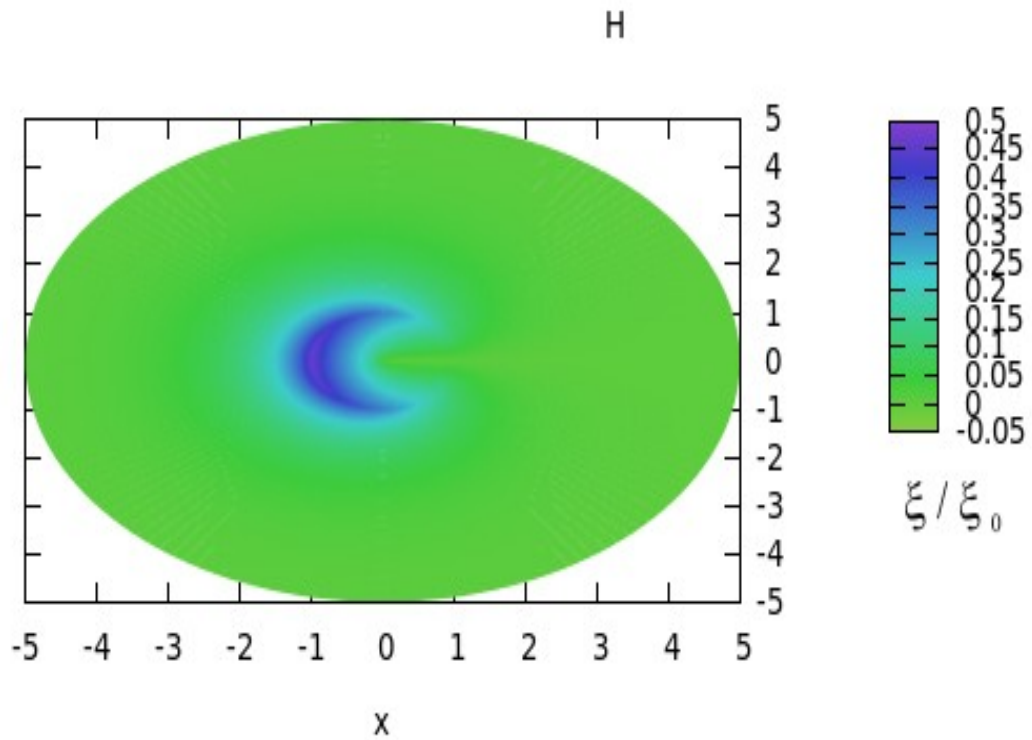


Fig 14. Solución para el plano de las dimensiones compactadas.

Lo que representa una onda estacionaria. El flujo de energía en una onda se expresa mediante el cuadrado de la función de onda  $\langle \Psi \rangle^2$ , en nuestro caso  $\Psi$  puede ser  $E_g$  ó  $H_g$ .

Si representamos  $\langle E_g \rangle^2$  en función de  $\xi / \xi_0$  tenemos:

$$\text{Si } \xi \leq \xi_0 \rightarrow G = 0,4916 I_{\frac{1}{2}} \left( \frac{2m_0 c}{\hbar} \cdot \xi \right)$$

$$\text{Si } \xi > \xi_0 \rightarrow G = K_{\frac{1}{2}} \left( \frac{2m_0 c}{\hbar} \cdot \xi \right)$$

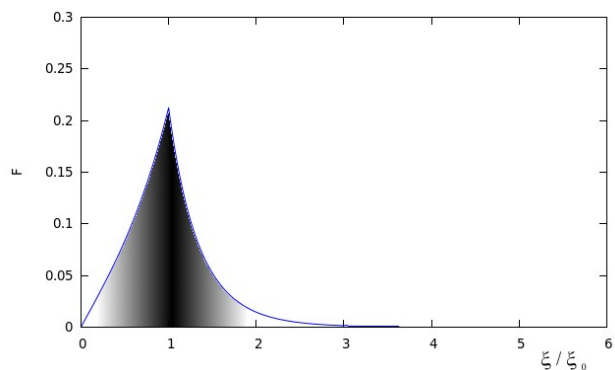
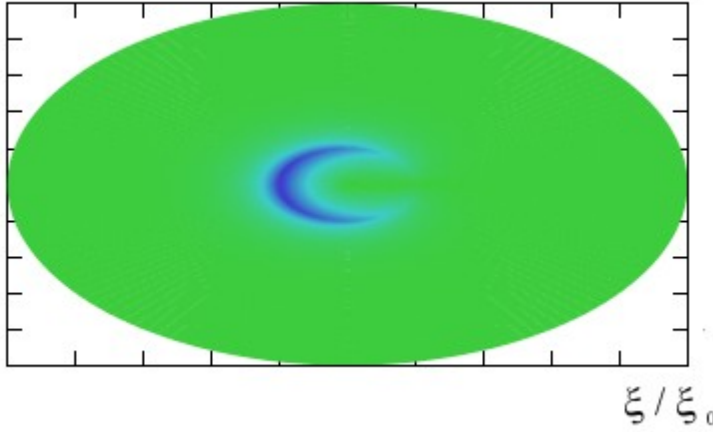


Fig 15 Flujo de energía frente a  $\xi / \xi_0$

Si representamos la función  $(GN)^2$  en el plano de las dimensiones compactadas tendremos:



**Fig 16.  $G(\xi)^2 N(\eta)^2$  Flujo de energía en el plano de las dimensiones compactadas.**

Podemos calcular el centro de masas de la función  $\langle E_g \rangle^2$

$$\xi_{cdm} = \frac{\int \xi E^2 d\xi}{\int E^2 d\xi} \quad \text{Si nos fijamos en el gráfico podemos ver que:}$$

$$\int E^2 d\xi = \int_0^1 (0,4916 I_{0,5}(\xi))^2 d\xi + \int_1^\infty (K_{0,5}(\xi))^2 d\xi$$

$$\int \xi E^2 d\xi = \int_0^1 (0,4916 \xi I_{0,5}(\xi))^2 d\xi + \int_1^\infty (\xi K_{0,5}(\xi))^2 d\xi$$

Las integrales se han resuelto numéricamente mediante el método de Romberg utilizando como límites de integración  $[0,1]$  U  $[1,20]$

$$\xi_{cdm} = \frac{\int \xi E^2 d\xi}{\int E^2 d\xi} = 1,006495 \quad , \text{ es decir, las condiciones de contorno que hemos elegido no son}$$

correctas, ya que el flujo de energía no se encuentra concentrado en la coordenada  $\xi = \frac{1,006495 \cdot \hbar}{2 m_0 c}$ .

Es necesario imponer por tanto unas condiciones de contorno tales que el el flujo de energía se concentre en la coordenada  $\xi = \frac{\hbar}{2 m_0 c}$ .

En el caso de la topología circular esto se cumple si las 2 soluciones coinciden en

$$\boxed{\xi_0 = 0,99195 \frac{\hbar}{2 m_0 c}} \quad \text{y por tanto} \quad \boxed{\frac{2 m_0 c}{\hbar} \xi_0 = \frac{2 m_0 c}{\hbar} \cdot 0,99195 \frac{\hbar}{2 m_0 c} = 0,99195}$$

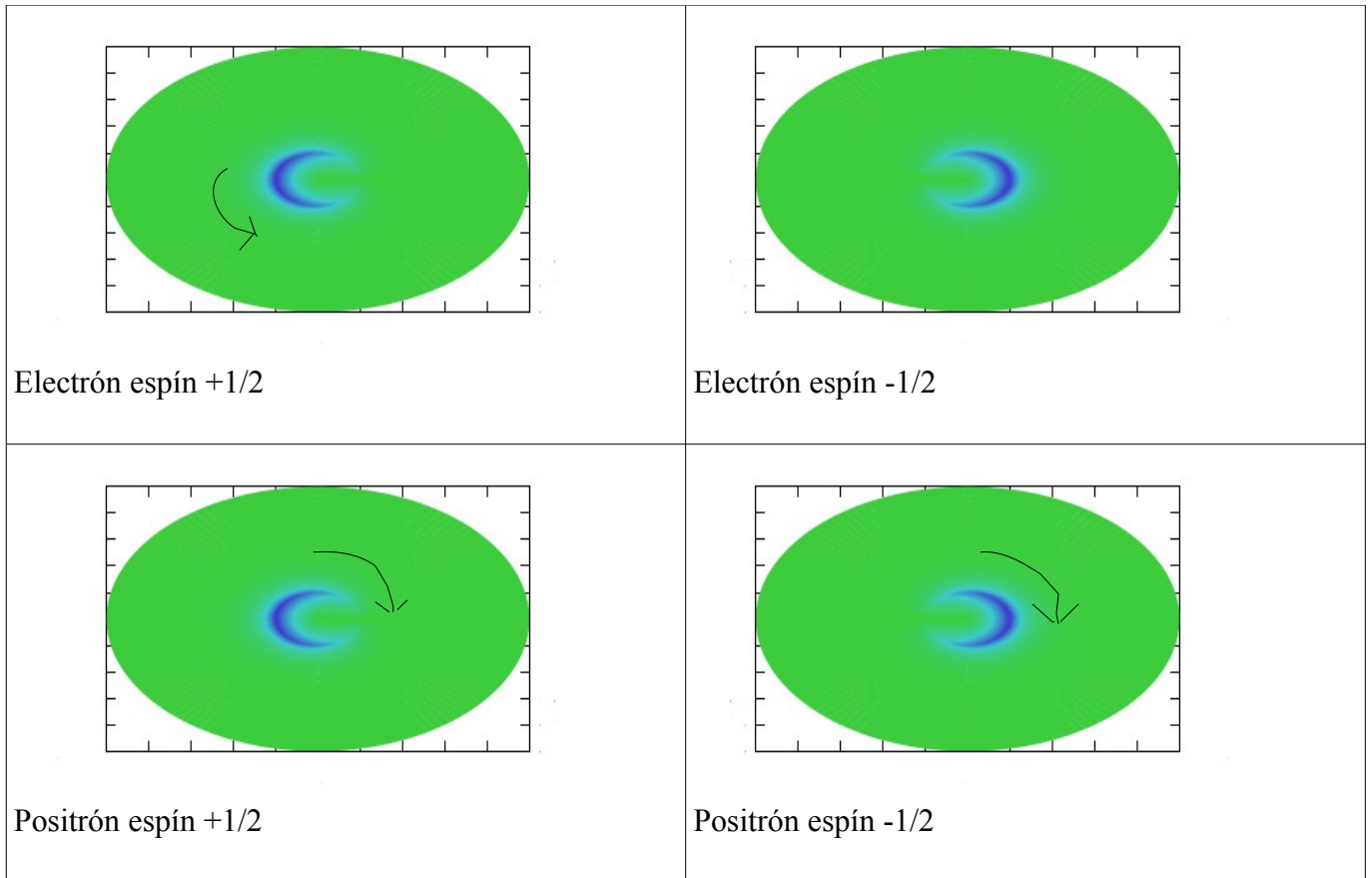
Luego si consideramos que el electrón representa la onda más sencilla posible  $m_s = \pm 1/2$  tendríamos que debe cumplirse:

$$C_2 \cdot I_{\frac{1}{2}}(0,99195) = C_3 \cdot K_{\frac{1}{2}}(0,99195) \quad , \text{ lo que obliga a que: } C_2 = 0,50096797837993 C_3$$

La topología circular es una buena aproximación para calcular el momento angular del electrón atribuible a su giro en las dimensiones compactadas:

$$L = m \times r \cdot v = m_e \xi c = m_e \frac{\hbar}{2m_e c} \cdot c = \frac{\hbar}{2}$$

En base al resultado anterior es prácticamente inevitable asignar la propiedad cuántica de espín a la onda estacionaria de los electrones en las dimensiones compactadas, identificándolo con la constante  $m_s$ , el signo de esta constante representa la diferencia de fase y el diferente sentido de giro explicaría la diferencia entre electrones y positrones.



**Fig 17. Representación intuitiva del espín del electrón.**

Es fácil ver que se puede extrapolar el resultado para estimar el momento angular de giro a partículas con diferente espín, resultando:

$$L_s = m_s \cdot \hbar$$

### 5.2.2 Topología elíptica de las dimensiones compactadas.

Teniendo en cuenta análogas consideraciones que en el caso anterior el laplaciano también es separable, quedando:

$$H(\xi, \eta, x, y, z) = D(\xi, \eta) \cdot F(x, y, z)$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\frac{\nabla_{\xi, \eta}^2 D(\xi, \eta)}{D(\xi, \eta)} + k_c^2 = 0} \quad (3) \\ \boxed{\frac{\nabla_{3D}^2 F(x, y, z)}{F(x, y, z)} + \beta^2 = 0} \end{array} \right\}$$

En el sistema de coordenadas elípticas (3) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{2}{f^2(\cosh(2\xi) - \cos(2\eta))} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) D + k_c^2 \cdot D = 0$$

Y suponiendo que D puede escribirse como  $D(\xi, \eta) = G(\xi) \cdot N(\eta)$  nos quedaría:

$$\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{k_c^2}{2} f^2 \cosh(2\xi) = \frac{-1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \frac{k_c^2}{2} f^2 \cos(2\eta)$$

que puede ser separada mediante una constante que llamaremos a ( No confundir con el semieje mayor de la elipse)

$$\left. \begin{array}{l} G'' - (a - 2q \cosh 2\xi)G = 0 \\ N'' - (a - 2q \cos 2\eta)N = 0 \end{array} \right\}$$

donde se ha definido:

$$q = \frac{k_c^2 f^2}{4} \text{ y la constante de separación } a \text{ solo depende del parámetro } a, \text{ es decir } a = a(q).$$

Es notable observar que para el caso límite en que  $q=0$  todas las soluciones se reducen a las ya conocidas como funciones de Bessel.

La segunda ecuación representa la dependencia “angular” de la ecuación anterior y es conocida como ecuación de Mathieu, mientras que la primera ecuación representa la dependencia “radial” y es conocida como ecuación modificada de Mathieu.

Ya que se ha postulado en el apartado anterior que  $k_c = \frac{m_0 c}{\hbar} i$  es imaginario tendremos que  $q < 0$ .

Para el caso del electrón se va a estimar el valor del parámetro q.

$$k_c = \frac{m_0 c}{\hbar} i = \frac{9,10938291 \cdot 10^{-31} \cdot 299792458}{1,054571628 \cdot 10^{-34}} i = 2,58960532 \cdot 10^{12} i$$

como el radio de las dimensiones compactadas se había estimado en:



$$r_u = \frac{G}{\hat{G}\pi} = \frac{6,673 \cdot 10^{-11}}{1,018071765 \cdot \pi} = 2,0863773 \cdot 10^{-11} m$$

y supuesta una topología elíptica de parámetros

$$a = 1,10576 \cdot r_u$$

$$b = 0,8883 \cdot r_u$$

Se puede calcular el foco de la elipse mediante la expresión:

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = r_u \sqrt{1,10576^2 - 0,8883^2} = 1,3738795 \cdot 10^{-11} m$$

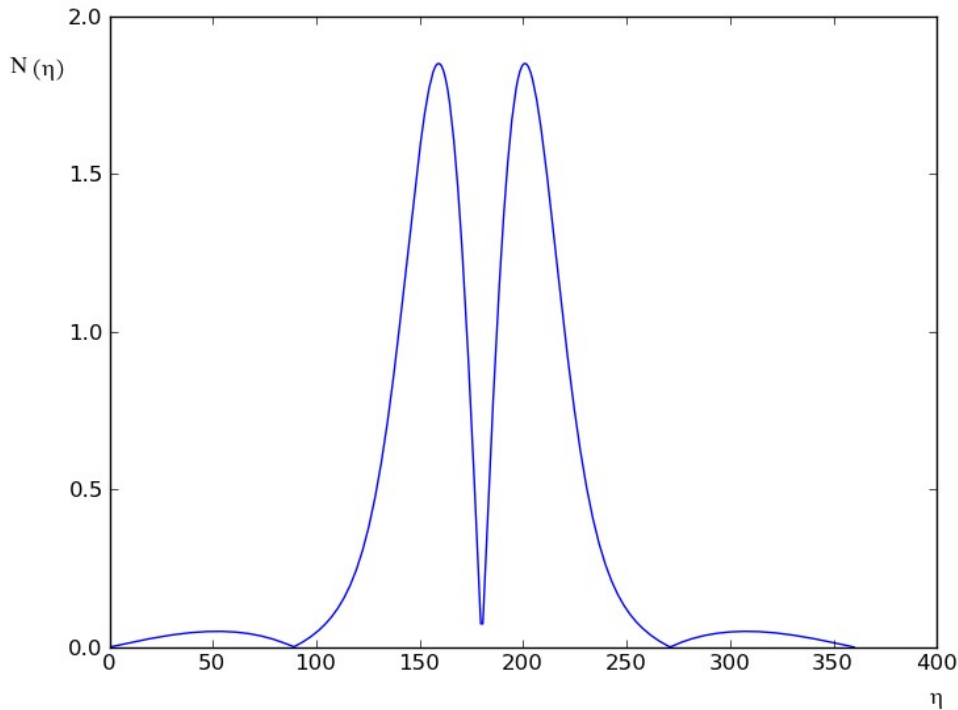
y por tanto el parámetro q valdrá:

$$q = \frac{k_c^2 f^2}{4} = \frac{(1,3738795 \cdot 10^{-11})^2 (2,58960532 \cdot 10^{12})^2}{4} = -316,4495$$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en el apartado 5.2.1 las soluciones que podemos identificar con el electrón serán:

$$N(\eta) = \left| se_{\frac{1}{2}}(\eta, -316,4495) \right| \text{ o valor absoluto de la función angular par de Mathieu de orden } \frac{1}{2}$$

(también conocida como seno elíptico). La periodicidad de esta función es de  $4\pi$ , pero al tratarse del valor absoluto su periodicidad se reduce a  $2\pi$ .



**Fig 18 Solución angular de Mathieu para  $q=-316,4495$  y orden 0,5.**

En cuanto a la ecuación modificada de Mathieu ninguna de las funciones radiales puede ser solución por si sola, así que al igual que en el caso circular la solución radial vendrá dada por:

$$\text{Si } 0 < \xi < \xi_0 \quad G(\xi) = I_{o1/2}(2k_c \xi, -316,4495) = I_{o1/2}\left(\frac{\xi r}{\xi_0}, -316,4495\right)$$

o función radial evanescente de Mathieu de primer tipo y orden  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Si } \xi > \xi_0 \quad G(\xi) = K_{o1/2}(2k_c \xi, -316,4495) = K_{o1/2}\left(\frac{\xi r}{\xi_0}, -316,4495\right)$$

o función radial evanescente de Mathieu de segundo tipo y orden  $\frac{1}{2}$ .

Dado que q es bastante grande su valor se puede aproximar mediante la siguiente relación:

$$a_r = -2q + (2 + 4r)\sqrt{q} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r^2} + \left(\frac{-1}{32} - \frac{3r}{32} - \frac{3r^2}{32} - \frac{r^3}{10}\right) \frac{1}{\sqrt{q}} + \dots$$

( Algebraic methods to compute Mathieu functions) donde r representa el orden de la función.

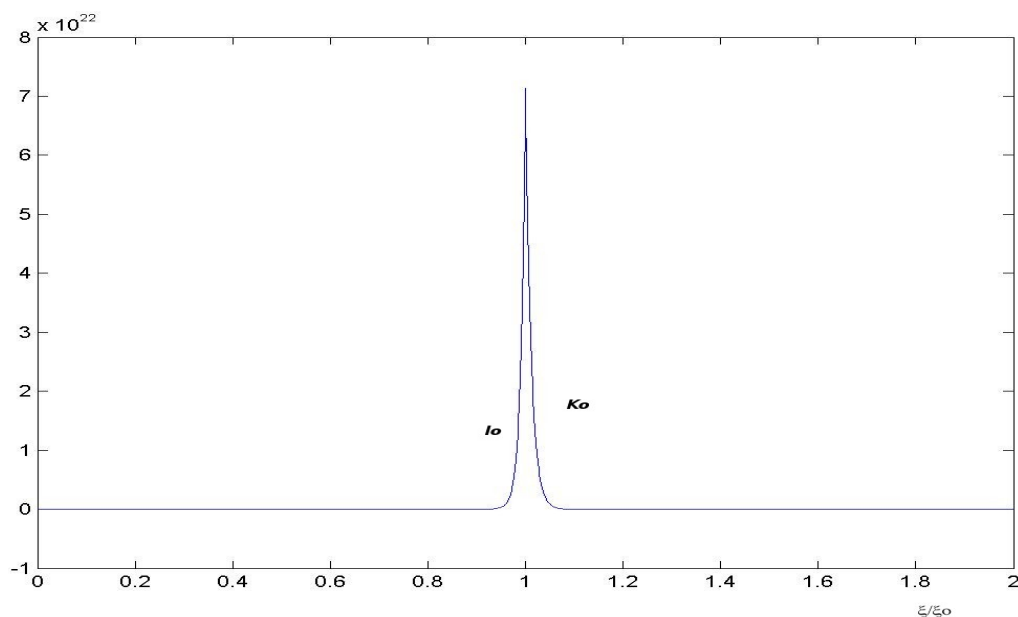
Las funciones  $I_o$  y  $K_o$  de orden semientero no se encuentran resueltas en la literatura, sin embargo cuando  $q \rightarrow \infty$  entonces  $a_{\frac{1}{2}} \rightarrow a_1$  y por tanto se puede aproximar:

$$I_{o\frac{1}{2}} \simeq I_{o1} \quad K_{o\frac{1}{2}} \simeq K_{o1}$$

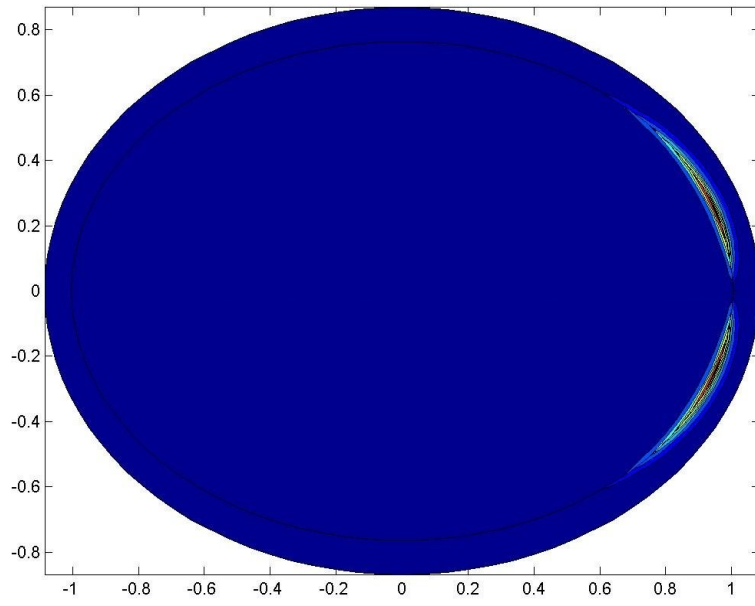
Si imponemos que el flujo de energía de la onda coincida con  $\xi/\xi_0 = 1$  puede obtenerse por tanteo que las dos soluciones deben coincidir en  $\xi/\xi_0 = 0,9976535$ , es decir:

$$I_{o1}(0,9976535, -316,4495) = K_{o1}(0,9976535, -316,4495)$$

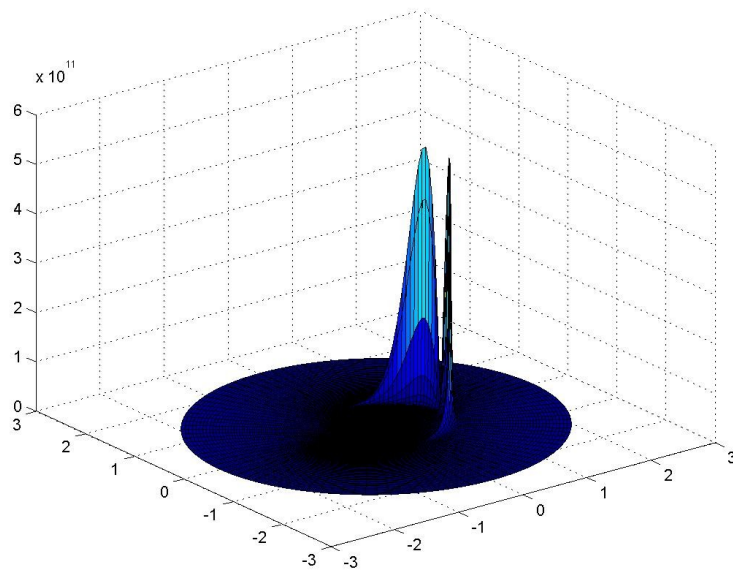
Si representamos el cuadrado de la función de onda respecto a  $\xi/\xi_0$  tendremos:



y combinando las 2 soluciones:



Y finalmente en otra representación en 3D tenemos:



### 5.2.3 Solución para las dimensiones extendidas.

Seguimos solucionando el resto de variables, si recordamos (2)

$$\boxed{\frac{\nabla_{3D}^2 F}{F} + \beta^2 = 0} \text{ entonces podemos considerar 2 casos:}$$

CASO A. PARTICULA-PULSACIÓN INMOVIL.  $\beta=0$

Tenemos entonces:

$$\boxed{\frac{\nabla_{3D}^2 F}{F} = 0} \text{ (8) de soluciones:}$$

$$\boxed{F = \text{constante} = C_1} \text{ (9)}$$

$$\boxed{F = \frac{C_2}{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ (10)}$$

Es notable observar que (10) es totalmente análogo a los potenciales gravitatorio y eléctrico. Sin embargo la solución no es valida si  $x=y=z=0$ , ya que proporciona valores infinitos. Se propone por tanto la siguiente forma para la solución:

$$\boxed{\text{Si } r \leq \xi_0 \text{ -----} \rightarrow F = C_1}$$

$$\boxed{\text{Si } r > \xi_0 \text{ -----} \rightarrow F = \frac{C_2}{x^2 + y^2 + z^2} + C_3}$$

que podemos representar de la siguiente manera:

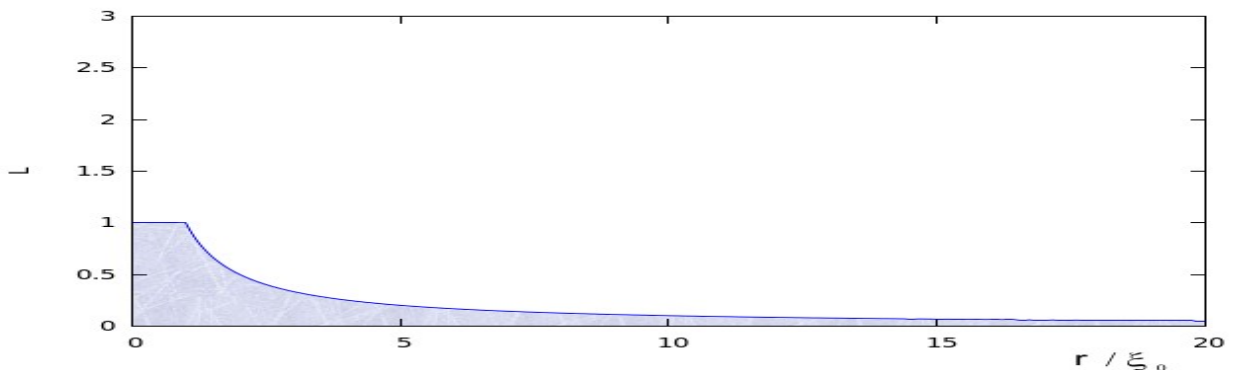


Fig 14. Solución en función de r para una partícula-pulsación inmóvil.

Es de observar que una pulsación gravitomagnética hexadimensional debido a las restricciones que impone la topología del espacio aparece como una fuente de campo gravitatorio y eléctrico en un espacio tetradimensional.

CASO B. PARTICULA-PULSACIÓN EN MOVIMIENTO UNIFORME

$$\frac{\nabla_{3D}^2 F}{F} + \beta^2 = 0$$

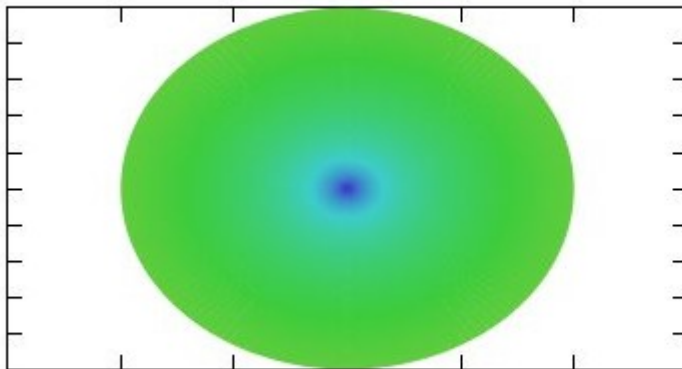
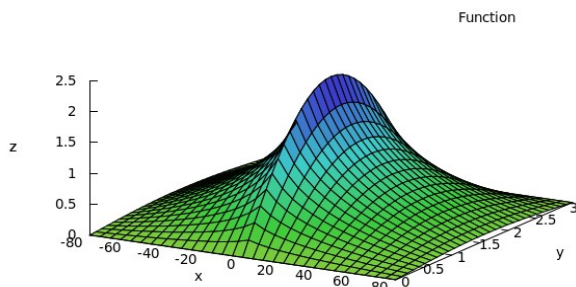
Si consideramos un movimiento uniforme a lo largo del eje Z se propone la siguiente solución:

$$\text{Si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \xi_0 \longrightarrow F = C_4 \text{Sen}(\beta z)$$

$$\text{Si } \sqrt{x^2 + y^2} > \xi_0 \longrightarrow F = C_5 \text{Sen}(\beta z) \cdot \log C_6 \sqrt{x^2 + y^2}$$

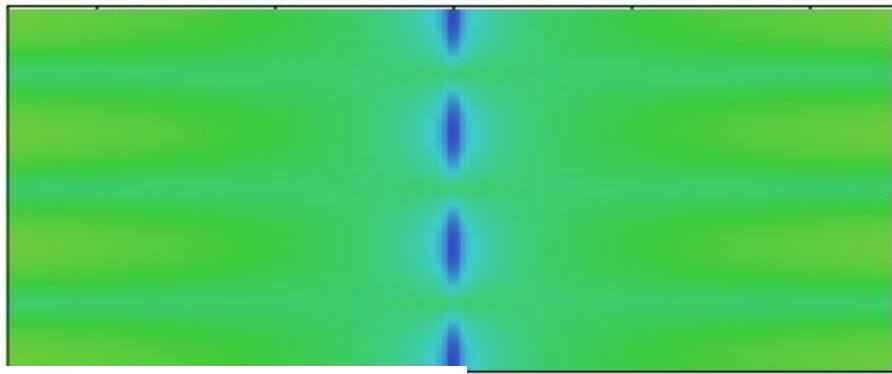
Es decir, el producto de una onda plana por un potencial bidimensional en el plano perpendicular al movimiento.

Si z representa la amplitud quedaría así.

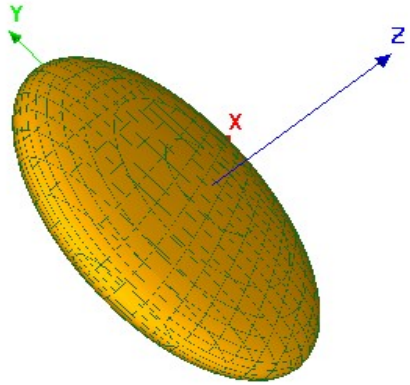


**Fig 15 Solución frontal para una partícula-pulsación libre con movimiento uniforme.**

Si observamos un electrón de frente nos vuelve a aparecer como una fuente de campo gravitatorio y eléctrico. Pero visto transversalmente al movimiento aparece como una onda.



**Fig 16. Solución transversal para una partícula-pulsación libre con movimiento uniforme.**



La forma del electrón sería entonces:

**Fig 17. Isosuperficie.**

Orbital que representa un electrón libre con movimiento uniforme a lo largo del eje z. Es de observar que únicamente se trata de una isosuperficie. El electrón se extiende hasta el infinito en el plano XY, pero se encuentra comprimido por efecto del movimiento en el eje Z.

## 6. Discusión. Significado físico de la mecánica cuántica

### 6.1 Concepto de partícula. Origen de la inercia.

Es notable observar que la solución de la ecuación de onda gravitomagnética para una pulsación libre aparenta ser una partícula frontalmente, ya que aparece como una fuente de campo gravitatorio y eléctrico, pero visto transversalmente justifica plenamente su comportamiento ondulatorio. (hipótesis de D'Broglie).

De esta forma, si consideramos a los electrones como pulsaciones gravitomagnéticas podemos explicar:

- El experimento de la doble rendija, en el que cada electrón efectivamente interfiere consigo mismo.
- El efecto Aharonov-Bohm, en el cual un electrón se ve influido por un campo magnético confinado en un solenoide tiene explicación simplemente considerando que parte de la pulsación que representa el electrón atraviesa el solenoide, quedando por tanto afectado.
- El que se considere al electrón como un objeto sin dimensión (puntual), sin ninguna estructura interna.

Por otro lado, esto conlleva a la ausencia de la acción a distancia. El campo eléctrico o gravitatorio de los electrones se perciben porque efectivamente estamos atravesando a los electrones.

Para determinar el origen de la inercia resulta muy interesante observar la propagación de las ondas electromagnéticas en una guía de ondas como las que se utilizan para transmitir señales electromagnéticas. Las ondas cuya frecuencia es inferior a una frecuencia mínima, denominada de corte, no se transmiten, mientras que las de frecuencia superior se transmiten a una velocidad mayor cuanto más alta es su frecuencia, es decir, las pulsaciones más energéticas presentan una velocidad de grupo mayor.

El modo de propagación de una onda cuya frecuencia sea  $\omega$  en una guía de onda con una frecuencia de corte  $\omega_0$  viene dada por la siguiente relación:

$$\beta = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

La velocidad con la que efectivamente se transmiten la información y la energía dentro de una guía de onda viene representada por la velocidad de grupo, que se define como la derivada de la frecuencia con respecto al modo de propagación  $d\omega/dk$ .

Derivando la expresión anterior con respecto a  $\omega$  tenemos:

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

así que la velocidad de grupo de una onda de frecuencia  $\omega$  en una guía de onda con una frecuencia de

corte  $\omega_0$  es: 
$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

y reordenando tenemos:

$$\left(\frac{v_g}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \rightarrow \frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2} \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2}} \text{ y por tanto:}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2}}$$

Si multiplicamos por la constante de Planck  $h$  tenemos:

$$\omega h = \frac{\omega_0 h}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2}} \text{ y recordando que la energía de una onda viene dada por la expresión } E = h\omega$$

nos queda: 
$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2}}$$

Es decir, de una manera bastante sorprendente una onda electromagnética adquiere las mismas propiedades que una partícula material cuando es guiada por una estructura metálica o por otras condiciones de contorno, como es el caso de la fibra de vidrio.

En las páginas posteriores vamos a aceptar implícitamente que existe un tipo de ondas entre cuyas propiedades se incluye la de interactuar entre ellas intercambiando energía. Dicha interacción se produce modificando la frecuencia y la fase. Dichas ondas conformarían lo que conocemos como electrones. En este sentido las constantes de integración no deberían normalizarse para obtener una probabilidad de 1, sino para que se ajusten al flujo de energía del electrón.

## 6.2 Ecuación de Klein-Gordon. Longitud de onda de D'Broglie.

Si partimos de la ecuación de onda gravitomagnética en 6D tenemos:

$$(\nabla_{6D}^2 + k^2) \cdot H = 0$$

Como  $k^2 = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} i\right)^2 + \beta^2$  podemos escribir:  $\rightarrow \boxed{\left[\nabla_{6D}^2 + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} i\right)^2 + \beta^2\right] \cdot H = 0}$  (a)

La velocidad de grupo se define como:  $v_g = \frac{c^2 \beta}{2\pi f_0} \rightarrow \beta = \frac{v_g \cdot 2\pi f_0}{c^2}$

Si tenemos en cuenta que  $\omega = 2\pi f_0$  podemos escribir:

$$\beta = \frac{v_g \cdot \omega}{c^2} = \left(\frac{v_g}{c}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right)$$

Considerando que  $k = \frac{\omega}{c}$  y sustituyendo en (a)

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} i\right)^2 + \left(\frac{v_g}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2\right] = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} i\right)^2, \text{ como } \frac{v_g}{c} = \varepsilon \text{ tenemos } \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [1 - \varepsilon^2] = \left(\frac{m_0 c}{\hbar} i\right)^2$$

y recordando que hemos postulado que k era imaginario tenemos :

$$k = \frac{m_0 c}{\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot i, \text{ si tenemos en cuenta que } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

y sustituimos en la ecuación de onda tendríamos entonces:

$$\boxed{\left(\nabla_{6D}^2 + \left(\frac{m c}{\hbar} i\right)^2\right) \cdot H = 0}$$
 similar a la ecuación de Klein-Gordon independiente del tiempo.

Esta ecuación debe resolverse para 6 dimensiones, no para cuatro, por eso esta ecuación fracasó cuando se aplicó al átomo de hidrógeno.

Si multiplicamos y dividimos por c nos queda:  $\boxed{k = \frac{1}{\hbar c} \cdot \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \cdot i = \frac{\text{Energía}_{onda}}{\hbar c} \cdot i}$

Esta ultima relación nos va a permitir resolver la ecuación de onda de los electrones cuando están sometidos a un campo de fuerzas.



Por otro lado si volvemos a la ecuación:

$$k = \frac{m_0 c}{\hbar} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot i \quad \text{y teniendo en cuenta que} \quad k^2 = \left( \frac{m_0 c}{\hbar} i \right)^2 + \beta^2$$

Podemos escribir  $\left( \frac{m_0 c}{\hbar} i \right)^2 \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2} = \left( \frac{m_0 c}{\hbar} i \right)^2 + \beta^2$

$$\left( \frac{m_0 c}{\hbar} i \right)^2 \cdot \left[ \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right) - 1 \right] = \beta^2 \quad \text{Por tanto} \quad \beta^2 = \left( \frac{m_0 c}{\hbar} i \right)^2 \cdot \left[ \frac{1-1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right] = \left( \frac{m_0 c}{\hbar} i \right)^2 \cdot \left[ \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \right]$$

Luego:

$$\beta = \frac{m_0 c}{\hbar} \cdot \left[ \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right] i \quad \text{y como} \quad \frac{v_g}{c} = \varepsilon \quad \text{nos queda finalmente:}$$

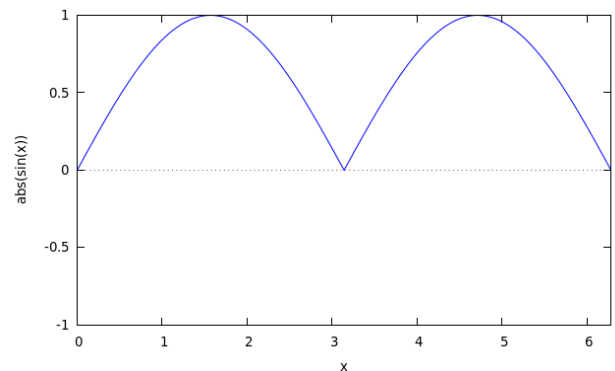
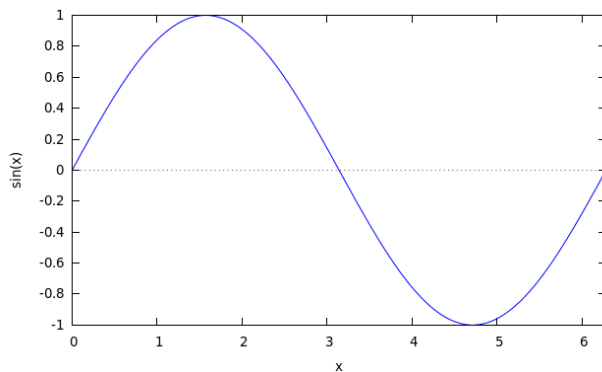
$$\beta = \frac{m_0 v_g}{\hbar} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right] i$$

La longitud de onda asociada al modo de propagación será:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi \hbar \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}}{m_0 v_g} i = \frac{\pi h \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2 \pi m_0 v_g} i$$

Finalmente tendremos:

$$\boxed{\lambda = \frac{h \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2 m_0 v_g} i} \quad \text{lo que representa una semilongitud de onda de D'Broglie.}$$





## 7. Aplicación de la ecuación de onda gravitomagnética al átomo de hidrógeno.

### 7.1 Ecuación de onda para el átomo de hidrógeno.

Si utilizamos un sistema de coordenadas esféricas para las dimensiones extendidas y circular para las compactadas y consideramos un potencial eléctrico tridimensional la ecuación de onda sería:

$$(\nabla_{6D}^2 + k^2) \cdot H = 0 \quad \text{donde} \quad k = \frac{E_{\text{onda}}}{\hbar c} i$$

La energía total de la pulsación tendrá los siguientes términos:

- Energía de la pulsación en reposo:  $E_0 = mc^2$
- Energía cinética:  $E_c$

Como la energía cinética no es conocida a priori y el electrón se va a mover en un campo potencial eléctrico podemos expresarla como la diferencia entre:

- Energía mecánica:  $E_m$
- Energía potencial eléctrica. Si consideramos que debido a su gran masa con respecto al electrón el protón se mantiene inmóvil podemos expresar la energía debida al campo eléctrico como

$$E_{\text{ELEC}} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Por tanto tendremos que:

$$k = \frac{E_{\text{onda}}}{\hbar c} i = \frac{mc^2 + E_m - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}}{\hbar c} i = \left( \frac{mc^2 + E_m}{\hbar c} - \frac{e^2}{\hbar c 4\pi\epsilon_0 r} \right) i \quad \text{y si llamamos a} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c 4\pi\epsilon_0}$$

podemos escribir:

$$\nabla_{6D}^2 H - \left( \frac{mc^2 + E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right)^2 H = 0$$

Desarrollando tenemos:

$$\nabla^2 H - \left( \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \frac{E_m^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{2E_m mc^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{2mc^2 \alpha}{\hbar c r} - \frac{2E_m \alpha}{\hbar c r} \right) H = 0$$

agrupando nos queda:

$$\nabla^2 H - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 H - \left( \frac{E_m}{\hbar c} \right)^2 H - \frac{2mc^2}{\hbar c} \left( \frac{E_c}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) H - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{2E_m \alpha}{\hbar c r} \right) H = 0$$

Se puede solucionar mediante separación de variables

$$H(\xi, \eta, x, y, z) = \Phi(\xi, \eta) \cdot \Psi(r, \theta, \varphi)$$

que permite separar los laplacianos utilizando el mismo postulado que en el punto 5.2.

$$\nabla_{\xi, \eta}^2 \Phi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Phi = 0 \quad \text{De solución análoga a la de la partícula libre.} \quad (\text{I})$$

$$\nabla_{r, \theta, \varphi}^2 \Psi - \left[ \left(\frac{E_m}{\hbar c}\right)^2 - \frac{2E_m \alpha}{\hbar c r} \right] \Psi - \frac{2mc^2}{\hbar c} \left(\frac{E_m - \alpha}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r}\right) \Psi - \left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) \Psi = 0 \quad (\text{II})$$

Sacando factor común en (II)

$$\nabla^2 \Psi - \frac{E_m}{\hbar c} \left[ \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{2\alpha}{r} \right] \Psi - \frac{2mc^2}{\hbar c} \left(\frac{E_m - \alpha}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r}\right) \Psi - \left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) \Psi = 0$$

En el caso no relativista  $mc^2 \gg E_m$  y el término  $\frac{E_m}{\hbar c} \left[ \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{2\alpha}{r} \right] \Psi$  es despreciable frente a

$\frac{2mc^2}{\hbar c} \left(\frac{E_m - \alpha}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r}\right) \Psi$  y por tanto podemos escribir:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2m_0 c}{\hbar} \left(\frac{E_m - \alpha}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r}\right) \Psi - \left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) \Psi = 0$$

## 7.2 Ecuación de Schrodinger.

Si escribimos la ecuación de Schrodinger tenemos:

$$\frac{i}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{1}{2} \frac{\hbar}{m_0 c} \nabla^2 \Psi - \frac{\alpha}{r} \Psi$$

Si tenemos en cuenta que  $\frac{i}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{E}{\hbar c} \Psi$  nos queda:

$$\left( \frac{E}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) \Psi = -\left( \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m_0 c} \right) \nabla^2 \Psi \quad \text{y despejando y reordenando tendríamos:}$$

$$\boxed{\nabla^2 \Psi + \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) \Psi = 0} \quad \text{que presenta evidentes analogías con la ecuación anterior.}$$

## 7.3 Resolución de la ecuación para las dimensiones extendidas. Caso no relativista.

Si partimos de la ecuación:

$$\boxed{\nabla^2 \Psi - \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) \Psi - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) \Psi = 0}, \quad \text{aplicando el laplaciano en esféricas tenemos:}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{Sen} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) \Psi - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) \Psi = 0$$

Si descomponemos  $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)T(\varphi)$  tenemos entonces:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R' P T) + \frac{1}{r^2 \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{Sen} \theta R P' T) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} R P T'' - \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) R P T - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) R P T = 0$$

Si multiplicamos por  $\frac{r^2 \text{Sen}^2 \theta}{R P T}$

$$\frac{\text{Sen}^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{\text{Sen} \theta}{P} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen} \theta P') + \frac{T''}{T} - r^2 \text{Sen}^2 \theta \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) - r^2 \text{Sen}^2 \theta \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0$$

Como tenemos un término que solo depende de  $\varphi$  y la suma debe ser constante por fuerza tenemos que:

$$\frac{T''}{T} = cte = -m_l^2$$

y cuya solución es:  $T(\varphi) = C_4 e^{-im_l \varphi}$  con  $m_l$  semientero.

Sustituyendo entonces y dividiendo por  $\text{Sen}^2 \theta$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{1}{P \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen} \theta P') - \frac{m_l^2}{\text{Sen}^2 \theta} - r^2 \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) - \alpha^2 = 0$$

Ya tenemos separadas las variables.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') - r^2 \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) - \alpha^2 = l(l+1)$$

$$\frac{1}{P \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen} \theta P') - \frac{m_l^2}{\text{Sen}^2 \theta} = -l(l+1)$$

Como  $\alpha^2 \ll l(l+1)$  podemos escribir:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') - r^2 \frac{2m_0 c}{\hbar} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) = l(l+1) \quad (a)$$

$$\frac{1}{P \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen} \theta P') - \frac{m_l^2}{\text{Sen}^2 \theta} = -l(l+1) \quad (b)$$

$$\frac{T''}{T} = -m_l^2 \quad (c)$$

La ecuación (b) se trata de la función asociada de Legendre, que junto con la ecuación (c) proporciona la solución de los armónicos esféricos. Las condiciones de contorno restringen la solución a  $l=0,1,2,\dots$  junto con la condición  $0 \leq |m_l| \leq l$

En principio  $m_l$  puede adoptar valores semienteros, pero los polinomios de Legendre de orden semientero presentan valores infinitos para  $\theta=1$ , por lo que no pueden tener significado físico.

Vamos a analizar la ecuación (a) para determinar los niveles de energía:

Si aplicamos la regla de la cadena y reagrupamos

$$2rR' + r^2 R'' - r^2 \left( \frac{2m_0 c^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{2m_0 c^2 \alpha}{\hbar c r} \right) R = l(l+1) R$$

Definimos la función

$$u(r) = rR$$

$$u'(r) = rR' + R$$

$$u''(r) = R' + rR'' + R' = 2R' + rR''$$

lo que nos permite escribir los dos primeros términos de forma simplificada:

$$2rR' + r^2 R'' = r(2R' + rR'') = ru''$$

y por tanto:

$$u'' - \left( \frac{2m_0 c^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{2m_0 c^2 \alpha}{\hbar c r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u = 0$$

Si realizamos un estudio asintótico de la función anterior cuando  $r \rightarrow \infty$  se puede escribir:

$$u'' - \left( \frac{2m_0 c^2 E_m}{(\hbar c)^2} \right) u = 0$$

si llamamos

$$\beta^2 = \frac{2m_0 c^2 E_c}{(\hbar c)^2}$$

podemos escribir:

$$u'' - \left( \beta^2 - \frac{2m_0 c \alpha}{\hbar r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u = 0$$

Dividiendo por  $\beta^2$ :

$$\frac{u''}{\beta^2} - \left( 1 - \frac{2m_0 c \alpha}{\beta^2 \hbar r} + \frac{l(l+1)}{\beta^2 r^2} \right) u = 0$$

Como  $r$  aparece siempre multiplicado por  $\beta$  podemos realizar el siguiente cambio de variable  $\rho = \beta r$  definiendo la función  $U(\rho)$ :

$$U'' - \left( 1 - \frac{2m_0 c \alpha}{\beta \hbar \rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) U = 0$$

Si llamamos  $\rho_0 = \frac{2m_0 c \alpha}{\beta \hbar}$

tenemos

$$U'' - \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) U = 0 \quad (d)$$

La ecuación (d) aparece en forma muy similar en la resolución de la ecuación de Schrodinger radial del átomo de hidrógeno y puede encontrarse su resolución en la literatura mediante su estudio asintótico y posterior desarrollo en serie. La condición para que la serie de términos no sea infinita es que para algún valor de  $j$  se cumpla la igualdad siguiente:

$$\boxed{2(j+l+1)=\rho_0} \text{ donde } j \text{ es un número entero.}$$

si llamamos  $n=j+l+1$  nos queda:

$$\boxed{2n=\rho_0}$$

Si recordamos las definiciones:

$$\beta^2 = \frac{2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} \text{ y } \rho_0 = \frac{2m_0 c \alpha}{\beta \hbar}$$

podemos obtener la relación que cuantifica los niveles energéticos del electrón en el átomo de hidrógeno:

$$\frac{2mc\alpha}{\hbar \frac{\sqrt{2mE_m}}{\hbar}} = 2n \rightarrow \frac{mc\alpha}{\sqrt{2mE_m}} = n$$

Elevando al cuadrado

$$\frac{mc^2 \alpha^2}{2E_m} = n^2 \text{ Y eligiendo la solución negativa } \rightarrow \boxed{E_m = -\frac{mc^2 \alpha^2}{2n^2}}$$

que proporciona los mismos niveles energéticos que la ecuación de Schrodinger.

En realidad la ecuación (a) se trata de una variación de la función asociada de Lagerre y por tanto proporciona las mismas soluciones. Finalmente recalcar que la solución final vendrá dada por el producto de las 3 soluciones, es decir:

$H(\xi, \eta, x, y, z, t) = \Phi(\xi, \eta) \cdot \Psi(r, \theta, \varphi) \cdot e^{-\omega t}$ , y que de dichas soluciones se pueden obtener los momentos angulares, que serían:

- Momento angular orbital  $L = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$
- Proyección sobre el eje z del momento angular orbital  $L_z = m_l \hbar$
- Momento angular de espín  $L_s = m_s \hbar = \frac{\pm 1}{2} \hbar$



## 7.4 Resolución de la ecuación para las dimensiones extendidas. Caso relativista.

Si partimos de la ecuación de onda para las dimensiones extendidas:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{E_m}{\hbar c} \left[ \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{2\alpha}{r} \right] \Psi - \frac{2mc^2}{\hbar c} \left( \frac{E_m}{\hbar c} - \frac{\alpha}{r} \right) \Psi - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) \Psi = 0$$

sacando factor común y reordenando tenemos:

$$\nabla^2 \Psi - \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] \Psi - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) \Psi = 0$$

aplicando el laplaciano en esféricas tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{Sen}\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] \Psi - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) \Psi = 0$$

Si descomponemos  $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)T(\varphi)$  tenemos entonces:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R' P T) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{Sen}\theta R P' T) + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} R P T'' - \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] R P T - \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) R P T = 0$$

Si multiplicamos por  $\frac{r^2 \text{Sen}^2 \theta}{R P T}$

$$\frac{\text{Sen}^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{\text{Sen}\theta}{P} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen}\theta P') + \frac{T''}{T} - r^2 \text{Sen}^2 \theta \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] - r^2 \text{Sen}^2 \theta \left( \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0$$

Como tenemos un término que solo depende de  $\varphi$  y la suma debe ser constante por fuerza tenemos que:

$$\frac{T''}{T} = \text{cte} = -m_l^2$$

y cuya solución es:  $T(\varphi) = C_4 e^{-im_l \varphi}$  con  $m_l$  semientero.

Sustituyendo entonces y dividiendo por  $\text{Sen}^2 \theta$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') + \frac{1}{P \text{Sen}\theta} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen}\theta P') - \frac{m_l^2}{\text{Sen}^2 \theta} - r^2 \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] - \alpha^2 = 0$$

Ya tenemos separadas las variables.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') - r^2 \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] = l'(l'+1)$$

$$\frac{1}{P \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen} \theta P') - \frac{m_l^2}{\text{Sen}^2 \theta} - \alpha^2 = -l'(l'+1)$$

Si llamamos  $\alpha^2 - l'(l'+1) = -l(l+1)$  nos quedaría:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') - r^2 \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] = l'(l'+1) \quad (\text{a'})$$

$$\frac{1}{P \text{Sen} \theta} \frac{d}{d\theta} (\text{Sen} \theta P') - \frac{m_l^2}{\text{Sen}^2 \theta} = -l(l+1) \quad (\text{b'})$$

$$\frac{T''}{T} = \text{cte} = -m_l^2 \quad (\text{c'})$$

La segunda ecuación solo tiene solución para l entero positivo, por tanto podemos obtener los valores de l' en función de los posibles valores de l.

$$\alpha^2 - l' - l'^2 = -l(l+1) \rightarrow l'^2 + l' - \alpha^2 - l(l+1) = 0$$

Ecuación de segundo grado cuyas soluciones para los primeros valores de l son:

<b>l</b>	<b>l'</b>
0	-5,3254190509x10 <sup>-5</sup>
	-0,9999467485
1	0,9999822494
	-1,9999822494
2	1,9999893497
	-2,9999893497
3	2,9999923927
	-3,99.....

Parece evidente que la solución con significado físico es la primera, por tanto podemos escribir:

<b>l</b>	<b>l'</b>	<b><math>\delta=l-l'</math></b>
0	$-5,3254190509 \times 10^{-5}$	$5,325419051 \times 10^{-5}$
1	0,9999822494	$1,775055653 \times 10^{-5}$
2	1,9999893497	$1,065029359 \times 10^{-5}$
3	2,9999923927	$7,607344624 \times 10^{-6}$
4	3,9999940832	$5,916821056 \times 10^{-6}$
5	4,999995159	$4,841 \times 10^{-6}$
6	5,9999959037	$4,096259329 \times 10^{-6}$
7	6,9999964499	$3,55009114 \times 10^{-6}$

Ya estamos en condiciones por tanto de resolver la ecuación (a):

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 R') - r^2 \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] = l'(l'+1)$$

aplicando la regla de la cadena y multiplicando por R tenemos:

$$2rR' + r^2 R'' - r^2 \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] R = l'(l'+1)R$$

Realizamos la siguiente sustitución:

$$u(r) = rR$$

$$u'(r) = rR' + R$$

$$u''(r) = R' + rR'' + R' = 2R' + rR''$$

lo que nos permite escribir los dos primeros términos de forma simplificada:

$$2rR' + r^2 R'' = r(2R' + rR'') = ru''$$

y por tanto:

$$ru'' - r^2 \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] \frac{u}{r} = l'(l'+1) \frac{u}{r}$$

operando tenemos:

$$u'' - r \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} \right] u = l'(l'+1) \frac{u}{r}$$

Dividiendo por r y reordenando:

$$u'' - \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right] u = 0$$

Si realizamos un estudio asintótico de la función anterior cuando  $r \rightarrow \infty$  se puede escribir:

$$u'' - \left[ \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} \right] u = 0$$

si llamamos

$$\beta^2 = \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2}$$

podemos escribir:

$$u'' - \left[ \beta^2 - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\hbar c r} + \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right] u = 0$$

Dividiendo por  $\beta^2$  :

$$\frac{u''}{\beta^2} - \left[ 1 - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\beta^2 \hbar c r} + \frac{l'(l'+1)}{\beta^2 r^2} \right] u = 0$$

Como r aparece siempre multiplicado por  $\beta$  podemos realizar el siguiente cambio de variable  $\rho = \beta r$  definiendo la función  $U(\rho)$ :

$$U'' - \left[ 1 - \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\beta \hbar c \rho} + \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} \right] U = 0$$

Si llamamos

$$\rho_0 = \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\beta \hbar c} \quad \text{podemos escribir:}$$

$$\boxed{U'' - \left[ 1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} \right] U = 0} \quad \text{(d')}$$

La ecuación (d') aparece en la resolución de la ecuación de Schrodinger radial del átomo de hidrógeno y puede encontrarse su resolución en la literatura mediante su estudio asintótico y posterior desarrollo en serie. La condición para que la serie de términos no sea infinita es que para algún valor de  $j$  se cumpla la igualdad siguiente:

$$\boxed{2(j+l'+1)=\rho_0} \quad \text{donde } j \text{ es un número entero. Si escribimos } l' \text{ en función de } l \text{ tendremos:}$$

$$2(j+l-\delta(l)+1)=\rho_0 \quad \text{si llamamos } n=j+l+1 \quad \text{nos queda:}$$

$$2(n-\delta(l))=\rho_0 \quad \text{y llamando } n'(l)=n-\delta(l) \quad \text{la condición resulta en :}$$

$$\boxed{2n'(l)=\rho_0}$$

Si recordamos las definiciones:

$$\beta^2 = \frac{E_m^2 + 2mc^2 E_m}{(\hbar c)^2} \quad \text{y} \quad \rho_0 = \frac{(2E_m + 2mc^2)\alpha}{\beta \hbar c}$$

podemos obtener la relación que cuantifica los niveles energéticos del electrón en el átomo de hidrógeno si consideramos que la energía mecánica es negativa y por tanto su raíz cuadrada imaginaria:

$$n'(l) = \frac{(E_m + mc^2)\alpha}{i\sqrt{E_m^2 + 2mc^2 E_m}}$$

Si elevamos al cuadrado (apareciendo por supuesto soluciones extras) tenemos:

$$n'^2 = \frac{-(E_m + mc^2)^2 \alpha^2}{E_m^2 + 2mc^2 E_m}$$

operando

$$n'^2 E_m^2 + 2n'^2 mc^2 E_m = -(E_m \alpha + \alpha mc^2)^2$$

desarrollando el cuadrado del binomio y operando:

$$n'^2 E_m^2 + 2n'^2 mc^2 E_m + E_m^2 \alpha^2 + \alpha^2 (mc^2)^2 + 2E_m \alpha^2 mc^2 = 0$$

reordenando nos quedaría:

$$(n'^2 + \alpha^2) E_m^2 + 2mc^2 (n'^2 + \alpha^2) E_m + \alpha^2 (mc^2)^2 = 0$$

ecuación de segundo grado en  $E_m$  del tipo  $ax^2 + bx + c = 0$

donde

$$a = n'^2 + \alpha^2$$

$$b = 2mc^2 (n'^2 + \alpha^2)$$

$$c = \alpha^2 (mc^2)^2$$

Y la solución será:

$$E_m = -mc^2 \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{n'^2 + \alpha^2}} \right]$$

La segunda solución coincide numéricamente con la corrección relativista de primer orden a la ecuación de Schrodinger que aparece en la literatura.

$$E = -\frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right)$$

Los resultados numéricos se muestran en la página siguiente:

La soluciones anteriores no reproducen cuantitativamente la estructura fina ni cualitativamente la estructura hiperfina porque en la expresión de la energía no se han introducido los términos magnéticos ni el momento magnético nuclear, pero basta para demostrar que las dos formulaciones son equivalentes.

l	l'	l'-l	$\mu$	c	$\alpha$	n	l	n'(l)	En eV	E (n') eV	E(n,l) eV	Dif. diezmilesimas
0	-5,3282E-005	-5,3254E-005	9,10E-031	299792458	0,0072973526	1	0	0,9999467458	-13,5982875367	-13,599192797	-13,5991926957	-0,001012656
1	0,9999822401	-1,7751E-005										
2	1,9999893441	-1,0650E-005			0,0072973526	2	0	1,9999467458	-3,3995718842	-3,3997189861	-3,3997189725	-0,0001362814
3	2,999923887	-7,6073E-006			0,0072973526	2	1	1,9999822494	-3,3995718842	-3,399598285	-3,3995982846	-3,21175530615E-006
4	3,999940801	-5,9168E-006										
5	4,999951564	-0,000004841			0,0072973526	3	0	2,9999467458	-1,5109208374	-1,5109677754	-1,5109677716	-3,86328924407E-005
6	5,999959016	-4,0963E-006			0,0072973526	3	1	2,9999822494	-1,5109208374	-1,5109320123	-1,5109320122	-1,28389521237E-006
7	6,99996448	-3,5501E-006			0,0072973526	3	2	2,9999893497	-1,5109208374	-1,5109248604	-1,5109248603	-2,78053136071E-007
					0,0072973526	4	0	3,9999467458	-0,849892971	-0,8499134801	-0,8499134786	-1,57074475649E-005
					0,0072973526	4	1	3,9999822494	-0,849892971	-0,8498983926	-0,8498983926	-4,91273688397E-007
					0,0072973526	4	2	3,9999893497	-0,849892971	-0,8498953754	-0,8498953754	5,70987701565E-008
					0,0072973526	4	3	3,9999923927	-0,849892971	-0,8498940823	-0,8498940823	-3,18922666054E-008
					0,0072973526	5	0	4,9999467458	-0,5439315015	-0,5439422193	-0,5439422186	-7,64989516178E-006
					0,0072973526	5	1	4,9999822494	-0,5439315015	-0,5439344945	-0,5439344945	-1,67669211848E-007
					0,0072973526	5	2	4,9999893497	-0,5439315015	-0,5439329497	-0,5439329497	8,13449307913E-008
					0,0072973526	5	3	4,9999923927	-0,5439315015	-0,5439322877	-0,5439322877	-5,49404965966E-008
					0,0072973526	5	4	4,9999940832	-0,5439315015	-0,5439319198	-0,5439319199	5,83488812822E-008

me mp  
9,11E-031 1,67E-027

$$E_n = -\frac{mc^2 \alpha^2}{2}$$

$$E_{n,l} = -mc^2 \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{n'^2 + \alpha^2}} \right]$$

$$E(n,l) = -\frac{mc^2 \alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right)$$

## Conclusiones

Es posible conseguir la unificación de la gravedad con el electromagnetismo suponiendo la existencia de dos dimensiones adicionales ( una de ellas íntimamente ligada a la inversa de la masa en reposo de las partículas elementales) e interpretando el potencial eléctrico como la formulación en 5 dimensiones del vector inducción gravitomagnética en 6 dimensiones, el magnetismo se puede obtener del potencial eléctrico a través de los postulados de la electrodinámica relativista.

Los electrones ( y posiblemente el resto de partículas elementales ) están constituidos por pulsaciones gravitatorias guiadas por la curvatura de las dimensiones compactadas. El número de ondas circular de corte es igual a  $k_c = \frac{m_0 c}{\hbar} i$  . Por tanto no pueden considerarse como partículas puntuales y se debe interpretar el cuadrado de la función de onda como el flujo de energía de la onda gravitatoria, lo que soluciona la mayor parte de los experimentos paradójicos, como el de la doble rendija, por ejemplo. Por otro lado las pulsaciones gravitatorias interactúan entre ellas modificando su frecuencia y su ángulo de fase, por lo que aparentan ser partículas.

Debería revisarse la concepción dual onda-partícula en favor de una concepción únicamente ondulatoria de naturaleza gravitacional, ya que de esta forma se abre un camino hacia la unificación de todas las fuerzas y se proporciona una base única a las dos grandes teorías de la Física actual. Es destacable observar que se pueden sacar las mismas conclusiones con otras configuraciones de las dimensiones compactadas ( ya sea en número, topología o tamaño). Es necesario todavía un gran esfuerzo teórico para ampliar la hipótesis a las fuerzas nuclear fuerte y débil y a espacios tridimensionales curvos.