О гравитационной массе

Кирьян Д. Г., Кирьян Г. В.

Институт Проблем Машиноведения РАН
В.О., Большой проспект 61, Санкт-Петербург, Россия, 199178
эл.адрес: diki.ipme@gmail.com

Дано естественное определение понятия гравитационной массы без привлечения новых сущностей, что позволило расширить область применения закона о гравитационном взаимодействии между материальными объектами в гравитирующей среде. Показана функциональная связь между инерционной и гравитационной массами, из которой следует, что условие, при котором имеет место равенство инерционной и гравитационной масс — весьма искусственное и на практике не реализуемое. Приведены реальные примеры существования отрицательной гравитационной массы и естественного проявления гравитационного «отталкивания». Приведены примеры гравитационного диполя, как физического объекта, присутствующего в окружающей нас Природе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о нахождении сил, действующих на неподвижное материальное тело $\mathcal{G}$, фиксированного объёма и постоянной плотности, помещённое в некую однородную статичную среду $\mathcal{F}$ с равномерным распределением плотности вещества. Наличие плотности подразумевает существование гравитационного поля, источником которого являются, как тело $\mathcal{G}$, так и среда $\mathcal{F}$. Будем считать, что материальное тело $\mathcal{G}$ испытывает гравитационное воздействие только со стороны среды $\mathcal{F}$. Для простоты полагаем, что область $\mathcal{F}$ — некоторая *гравитирующая среда*[1], например несжимаемая жидкость с нулевой вязкостью в виде сферы конечного радиуса. Так как материальное тело $\mathcal{G}$, в нашей постановке, выполняет роль инородного включения в рассматриваемой области $\mathcal{F}$, то по отношению к нему мы будем использовать термин *аномалия*[2]. В качестве аномалии $\mathcal{G}$ выберем однородную недеформируемую сферу, расположенную на некотором фиксированном расстоянии от центра области $\mathcal{F}$.

Требование постоянства плотности вещества в области $\mathcal{F}$ и выбор геометрии для областей $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ в виде сфер не является обязательным, но это

[1] здесь, термин гравитирующая среда означает, что эта среда с заданным распределением плотности вещества

[2] В гравиметрии термин *аномалия* часто используется применительно к включению (телу) с иной плотностью, чем окружающая его среда [1, 2]

позволяет упростить задачу и сосредоточиться на главном, а именно, записать выражение для сил действующих на аномалию в гравитирующей среде.

Введём в рассмотрение декартову систему координат $\mathbf{O}xyz$ (рис. 1). Пусть начало системы координат, точка $\mathbf{O}$, является центром притяжения сферической области $\mathcal{F}$.

Обозначим силу гравитационного взаимодействия аномалии $\mathcal{G}$ с веществом области $\mathcal{F}$ через $\underline{F}^{-}$. Эта сила, вследствие центральной симметрии задачи по геометрии и распределению вещества, направлена к центру притяжения среды $\mathcal{F}$, к точке $\mathbf{O}$. Гравитационное поле вещества области $\mathcal{F}$ обеспечивает центрально-симметричное распределение давления в среде $\mathcal{F}$. Наличие градиента давления в среде, окружающей аномалию $\mathcal{G}$, определяет существование, так называемой, «выталкивающей» силы $\underline{F}^{+}$.

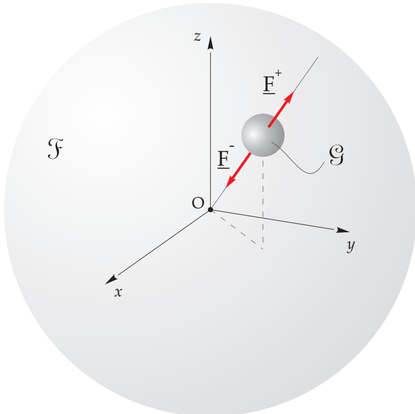


Рис. 1. Гравитирующая среда $\mathcal{F}$ с аномалией в виде сферы $\mathcal{G}$

Таким образом, на аномалию $\mathcal{G}$ действуют две как бы «независимые» силы, противоположно направленные и лежащие на одной прямой. Очевидно, что эта прямая является касательной к силовой линии гравитационного поля области $\mathcal{F}$ в точке приложения, определённых ранее, сил. Запишем сумму этих сил:

$$\underline{F} = \underline{F}^{+} + \underline{F}^{-} \ , \tag{1}$$

где $\underline{F}^{-}$ — сила прямого гравитационного воздействия на аномалию $\mathcal{G}$ со стороны вещества $\mathcal{F}$, действующая в направлении точки $\mathbf{O}$ и $\underline{F}^{+}$ — «выталкивающая» сила, обусловленная наличием градиента давления в среде $\mathcal{F}$.

В качестве аналогии, рассмотренного примера, можно представить каплю жидкости с «дробинкой» внутри в условиях «невесомости»[3]. Для простоты внешними гравитационными воздействиями пренебрегаем. В этих условиях «дробинка» в зависимости от соотношения своей плотности и плотности жидкости может «тонуть» к центру капли или «всплывать» к её поверхности.

[3]область пространства, где гравитационные силы уравновешены цетробежными или иными силами, где соблюдается равновесие в среднем

Несмотря на тривиальность поставленной нами задачи, детально рассмотрим каждую из силовых компонент уравнения (1).

2. Прямое действие гравитирующей среды на аномалию

Пусть точка $\mathbf{O}'$ является геометрическим центром рассматриваемой аномалии $\mathcal{G}$. Так как вследствие центральной симметрии все радиальные направления распределения плотности вещества в сфере $\mathcal{F}$ равноправны, мы поместим точку $\mathbf{O}'$ на ось $\mathbf{O}z$ на расстоянии δ от точки $\mathbf{O}$, геометрического центра области $\mathcal{F}$ (рис. 2).

Вспомогательная прямоугольная система координат $\mathbf{O}'x'y'z$, связанная с аномалией $\mathcal{G}$, ориентирована таким образом, что бы ось $\mathbf{O}'x'$ была параллельна оси $\mathbf{O}x$, а ось $\mathbf{O}'y'$ параллельна оси $\mathbf{O}y$.

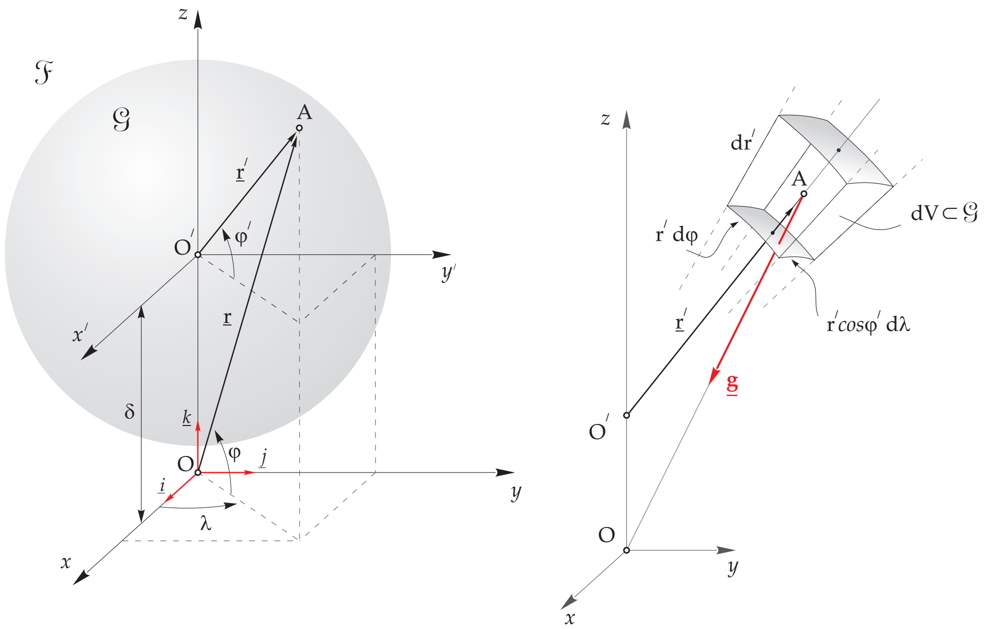


Рис. 2.

В каждой точке, рассматриваемой нами сферической области $\mathcal{F}$, существует градиент гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$:

$$\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} = -\mathbf{G}\frac{4}{3}\pi\rho_{\mathcal{F}}\,\underline{r}\ , \tag{2}$$

где $\underline{r}$ — радиус-вектор произвольной точки $\mathbf{A}$ из области $\mathcal{F}$; $\mathbf{G}$ — гравитационная постоянная. Подробный вывод этой формулы приводится в работах, например — [1, 3]. Как видно из выражения (2), градиент гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$ в точке с радиус-вектором $\underline{r}$ всегда направлен к геометрическому центру области $\mathcal{F}$, в данном случае к точке $\mathbf{O}$.

Теперь, зная градиент гравитационного поля для любой точки области пространства $\mathcal{F}$, мы можем определить гравитационную силу, действующую на аномалию $\mathcal{G}$. Так как гравитационное взаимодействие обладает свойством аддитивности, то каждый элементарный объём dV вещества области $\mathcal{G}$ испытывает не нулевое гравитационное воздействие со стороны вещества среды $\mathcal{F}$. Результирующим вектором гравитационного воздействия со стороны среды $\mathcal{F}$ на аномалию $\mathcal{G}$ является интеграл:

$$\underline{F}^{-} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} d\underline{F}^{-} \ , \quad d\underline{F}^{-} = \rho_{\mathcal{G}} dV \, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} \tag{3}$$

Поскольку наша задача обладает симметрий относительно оси $\mathbf{O}z$, то очевидно, что

$$F_x^{-} = \underline{i} \cdot \underline{F}^{-} = 0, \quad F_y^{-} = \underline{j} \cdot \underline{F}^{-} = 0, \quad F_z^{-} = \underline{k} \cdot \underline{F}^{-} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \underline{k} \cdot d\underline{F}^{-}$$

Подставляем (3) и (2)

$$F_z^{-} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \underline{k} \cdot d\underline{F}^{-} = \rho_{\mathcal{G}} \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \underline{k} \cdot \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} \, dV = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{G}} \rho_{\mathcal{F}} \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \overbrace{\underline{k} \cdot \underline{r}}^{r \sin\varphi} \ dV \tag{4}$$

Запишем выражения для произведения $r \sin\varphi$ и элементарного объёма $dV_{\mathcal{G}}$, построенного около точки $\mathbf{A} \in \mathcal{G}$, исходя из геометрии рис. 2. Положение точки $\mathbf{A}$ в координатной системе $\mathbf{O}'x'y'z$ определяется сферическими координатами (r', φ', λ). Теперь, необходимые нам выражения примут вид:

$$dV_{\mathcal{G}} = r' d\varphi' \cdot r' \cos\varphi' \, d\lambda \cdot dr' = r'^2 \cos\varphi' \, dr' \, d\varphi' \, d\lambda \ . \tag{5}$$

и

$$r \sin\varphi = \delta + r' \sin\varphi' \ . \tag{6}$$

Подставляя (6) в выражение (4) получаем:

$$F_z^{-} = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{G}} \rho_{\mathcal{F}} \left(\delta V_{\mathcal{G}} + \overbrace{\int\limits_{V_{\mathcal{G}}} r' \sin\varphi' \, dV_{\mathcal{G}}}^{\mathbf{I}} \right) , \tag{7}$$

где интеграл $\mathbf{I} = 0$, так как

$$\mathbf{I} = \int\limits_{V_\mathcal{G}} r' \sin\varphi' \overbrace{r' d\varphi' r' \cos\varphi' d\lambda dr'}^{dV_\mathcal{G}} = \int\limits_0^{2\pi} d\lambda \int\limits_0^{R_\mathcal{G}} r'^3 dr' \cancelto{0}{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi'} = 0.$$

Группируя множители в выражении (7), получаем

$$F_z^- = \overbrace{-\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_F \delta}^{\mathbf{g}_\mathcal{F}(\delta)} \; \rho_\mathcal{G} V_\mathcal{G}$$

или в векторной форме записи:

$$\underline{F}^- = \rho_\mathcal{G} V_\mathcal{G} \; \underline{\mathbf{g}}_\mathcal{F}(\delta)\ . \tag{8}$$

Итак, гравитационная сила $\underline{F}^-$, действующая на аномалию $\mathcal{G}$, направлена к центру притяжения области $\mathcal{F}$. Выражение (8) справедливо и для случая, когда центр притяжения среды $\mathcal{F}$ расположен в области аномалии $\mathcal{G}$, то есть при $\delta < R_\mathcal{G}$.

3. Опосредованное действие гравитирующей среды на аномалию

Область $\mathcal{F}$ сферической формы с равномерно распределённой плотностью $\rho_\mathcal{F}$ создаёт центрально-симметричное гравитационное поле с центром притяжения в точке $\mathbf{O}$. Это поле, в свою очередь, порождает, в рассматриваемой среде, центрально симметричное распределение давления с соответствующим радиальным градиентом. Мы не рассматриваем случаи образования градиентов давления иной природы, кроме как гравитационной. Поэтому, поместив аномалию $\mathcal{G}$ в гравитирующую среду $\mathcal{F}$, мы обнаруживаем действие на аномалию «выталкивающей» силы. Так как аномалия $\mathcal{G}$ это объект с не нулевым объёмом то, интегрируя действие давления по её поверхности, получим силу, стремящуюся «вытолкнуть» $\mathcal{G}$ в область наименьшего давления среды $\mathcal{F}$.

Определим как распределено давление в области $\mathcal{F}$. Для этого в ней выделим элементарный объём dV, построенный около точки $\mathbf{A}$ с сферическими координатами r, φ и λ (рис. 3).

$$dV = \overbrace{r d\varphi \cdot r d\lambda \cdot \cos\varphi}^{dS} \cdot dr$$

Выделенный элементарный объём вещества области $\mathcal{F}$ находится в равновесии. На нижнюю грань (площадка dS) элементарного объёма dV действует давление p_2, а на верхнюю — p_1, в нашей задаче $p_2 > p_1$. Так же, на массу элементарного объёма dV действует гравитационная сила в направлении центра притяжения среды $\mathcal{F}$. Мы рассматриваем стационарный случай, следовательно, выделенный элементарный объём вещества области $\mathcal{F}$ находится в равновесии. Принимая во внимание эти факторы, запишем уравнение равновесия элементарного объёма dV (рис. 3)

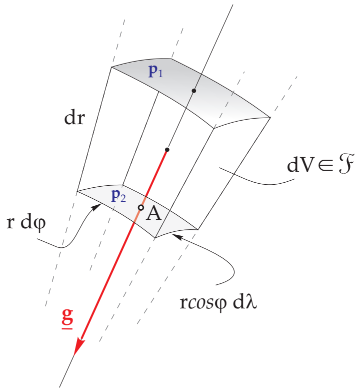


Рис. 3. Элементарный объём dV области $\mathcal{F}$.

$$p_2 dS - (p_1 dS + \rho_{\mathcal{F}} dV\, \mathbf{g}_{\mathcal{F}}) = 0\,, \quad \text{где} \qquad dV = dS dr\,. \tag{9}$$

Отсюда приращение давления dp принимает вид:

$$dp = p_2 - p_1 = \rho_{\mathcal{F}} dr\, \mathbf{g}_{\mathcal{F}}\,.$$

Подставляем сюда выражение (2) для градиента гравитационного поля $\mathbf{g}_{\mathcal{F}}$ и интегрируем по r:

$$p(r) = -\frac{2}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 r^2 + const\,.$$

Константу определим из условия на границе области $\mathcal{F}$:

$$p\Big|_{r=R_{\mathcal{F}}} = p_{\mathcal{F}}\,,$$

где $p_{\mathcal{F}}$ — внешнее давление на границе среды $\mathcal{F}$. Пусть $p_{\mathcal{F}} = 0$, тогда выражение для давления в произвольной точке области $\mathcal{F}$ примет вид:

$$p(r) = -\frac{2}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 \left(r^2 - R_{\mathcal{F}}^2\right)\,. \tag{10}$$

Теперь определим силу «выталкивания» $\underline{F}^{+}$, действующую на аномалию $\mathcal{G}$, обусловленную наличием градиента давления в среде $\mathcal{F}$.

$$\underline{F}^{+} = \int\limits_{S_{\mathcal{G}}} p(\underline{r}) \underline{dS}, \quad \text{где} \qquad \underline{dS} = \underline{n}\, dS\,, \tag{11}$$

здесь $p(\underline{r})$ — давление среды $\mathcal{F}$ на элементарную площадку dS поверхности аномалии $\mathcal{G}$; $\underline{n}$ — нормаль к элементарной площадке dS, нормаль к поверхности аномалии в точке $\mathbf{A}(\underline{r})$. Из рис. 3 следует, что

$$dS = R_{\mathcal{G}} \cos\varphi' d\lambda \, r d\varphi'$$

Вычисляя интеграл (15) мы должны учесть, что в нашей постановке, задача обладает геометрической и силовой симметрией относительно оси $\mathbf{O}z$, следовательно

$$F_x^+ = \underline{i} \cdot \underline{F}^+ = 0 \ , \quad F_y^+ = \underline{j} \cdot \underline{F}^+ = 0 \ , \quad F_z^+ = \underline{k} \cdot \underline{F}^+ = \int\limits_{S_{\mathcal{G}}} p(\underline{r}) \ \overbrace{\underline{k} \cdot \underline{n}}^{\sin\varphi'} \ dS_{\mathcal{G}}$$

отсюда, с учётом выражения для $dS_{\mathcal{G}}$, получаем

$$F_z^+ = \int\limits_{S_{\mathcal{G}}} p(r) \sin\varphi' dS_{\mathcal{G}} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} p(r) \sin\varphi' \ \overbrace{R_{\mathcal{G}} \cos\varphi' d\lambda \, r d\varphi'}^{dS_{\mathcal{G}}} \ =$$

$$= R_{\mathcal{G}} \int\limits_0^{2\pi} d\lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} p(r) r \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi'$$

интегрируя по λ и подставляя выражение (10) для $p(r)$, получаем

$$F_z^+ = \frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^2 \, \pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(r^2 - R_{\mathcal{F}}^2\right) \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi' \ . \tag{12}$$

Выражение для r^2 определяем из геометрии задачи (рис. 2)

$$r^2 = \delta^2 + R_{\mathcal{G}}^2 + 2\delta R_{\mathcal{G}} \sin\varphi' \ , \tag{13}$$

здесь δ — смещение центра аномалии $\mathcal{G}$; r — расстояние между центром притяжения среды $\mathcal{F}$ и точкой на поверхности аномалии $\mathcal{G}$. После подстановки (13) в выражение для F_z^+ мы получаем:

$$F_z^+ = \frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^2 \, \pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\overbrace{\delta^2 + R_{\mathcal{G}}^2 + 2\delta R_{\mathcal{G}} \sin\varphi'}^{r^2} - R_{\mathcal{F}}^2 \right) \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi' \tag{14}$$

Вычислим вспомогательные интегралы:

$$\mathbf{I}_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi' \cos\varphi'\, d\varphi' = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sin^2\varphi' = 0$$

$$\mathbf{I}_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi' \cos\varphi'\, d\varphi' = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sin^3\varphi' = \frac{2}{3}$$

Теперь, с учётом $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$, выражение (14) примет вид:

$$F^{+} = \frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^2\, \pi\mathbf{G}\rho_{\mathcal{F}}^2 2\delta R_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{I}_2 = \overbrace{\frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^3}^{V_{\mathcal{G}}}\ \rho_{\mathcal{F}}\ \overbrace{\frac{4}{3}\pi\mathbf{G}\rho_{\mathcal{F}}\delta}^{-\mathbf{g}_{\mathcal{F}}(\delta)}$$

Итак, аномалия $\mathcal{G}$, помещённая в среду $\mathcal{F}$, где присутствует градиент давления, испытывает действие «выталкивающей» силы F^{+}:

$$\underline{F}^{+} = -\rho_{\mathcal{F}} V_{\mathcal{G}} \cdot \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}(\delta)\ . \tag{15}$$

Сила «выталкивания» — $\underline{F}^{+}$, всегда направлена против градиента гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}$, которое сформировало градиент давления в среде $\mathcal{F}$.

4. Сумма сил действующих на аномалию

Итак, определены две силы: «притяжение» $\underline{F}^{-}$ и «выталкивание» $\underline{F}^{+}$, действующие на аномалию $\mathcal{G}$ в гравитирующей среде $\mathcal{F}$ на расстоянии δ от точки $\mathbf{O}$. Эти две силы всегда лежит на одной прямой, касательной к силовой линии гравитационного поля в заданной точке области $\mathcal{F}$. Они противоположны по направлению и имеют одну и ту же физическую природу — гравитационную. Изложенное выше, даёт основание для утверждения того факта, что на аномалию $\mathcal{G}$, помещённую в статичную гравитирующую среду $\mathcal{F}$, действует не две силы, $\underline{F}^{+}$ и $\underline{F}^{-}$, а одна — их сумма (1)

$$\underline{F} = \underline{F}^{+} + \underline{F}^{-} = -\rho_{\mathcal{F}} V_{\mathcal{G}}\, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} + \rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}}\, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} = \overbrace{\underbrace{\rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}}}_{M_{\mathcal{G}}} \left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right)}^{m_{\mathcal{G}}} \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}\ ,$$

здесь через $M_{\mathcal{G}}$ мы обозначили массу аномалии $\mathcal{G}$ в классическом понимании — произведение плотности вещества аномалии $\rho_{\mathcal{G}}$ на её объём $V_{\mathcal{G}}$, а через $m_{\mathcal{G}}$ введено обозначение той массы аномалии $\mathcal{G}$, которая участвует в гравитационном взаимодействии с гравитирующей средой $\mathcal{F}$.

Исторически, так сложилось, что эти силы были открыты в разные исторические эпохи и всегда рассматривались, как отдельные силовые факторы, воздействующие на объект исследования, обладающий некоторой массой. Итак, установлено, что единственная сила действующая на аномалию $\mathcal{G}$ в гравитирующей среде $\mathcal{F}$, при отсутствии иных внешних воздействиях, это

$$\underline{F} = m_{\mathcal{G}} \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} \ , \quad \text{где} \quad m_{\mathcal{G}} = M_{\mathcal{G}} \left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}} \right) \ , \tag{16}$$

здесь $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$ — градиент гравитационного поля среды $\mathcal{F}$ в области расположения аномалии $\mathcal{G}$. Знак этой силы, или направление действия, зависит только от соотношения плотностей аномалии и среды её окружающей. Из (16) следует, что гравитационное взаимодействие в гравитирующей среде определяется не всей массой аномалии, а только её частью, поэтому мы вводим понятие гравитационной массы[4], обозначая её, как $m_{\mathcal{G}}$. Полную же массу аномалии $\mathcal{G}$, обозначенную выше через $M_{\mathcal{G}}$, назовём инерционной, которая определяется, как произведение объёма аномалии $V_{\mathcal{G}}$ на её плотность $\rho_{\mathcal{G}}$.

Таким образом, установлена функциональная связь между гравитационной m и инерционной M массами аномалии в гравитирующей среде:

$$m = M \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \ . \tag{17}$$

Гравитационная масса аномалии полностью определяется отношением плотностей вещества среды ρ_0 и аномалии ρ. На рис. 4 наглядно показано, что инерционная масса равна гравитационной только при одном условии — условии, при котором плотность окружающей среды $\rho = 0$, что по себе есть чисто теоретический и исключительный случай. При

[4] В литературе, например [4], для гравитационной массы существует много различных определений. Рассмотренные выше, варианты гравитационного взаимодействия материальных тел дали основание сформулировать определение гравитационной массы, по нашему убеждению, в наибольшей степени соответствующее результатам экспериментов, существующим в природе явлениям и охватывающее известные причинно-следственные связи: **гравитационная масса — это аномалия плотности в окружающей среде**. Более утилитарное определение гравитационной массе может выглядеть так: гравитационная масса тела это то, что определяет гравитационное взаимодействие с другими телами и фиксируется инструментально.

всех иных обстоятельствах гравитационная масса m **строго** не равна инерционной M.

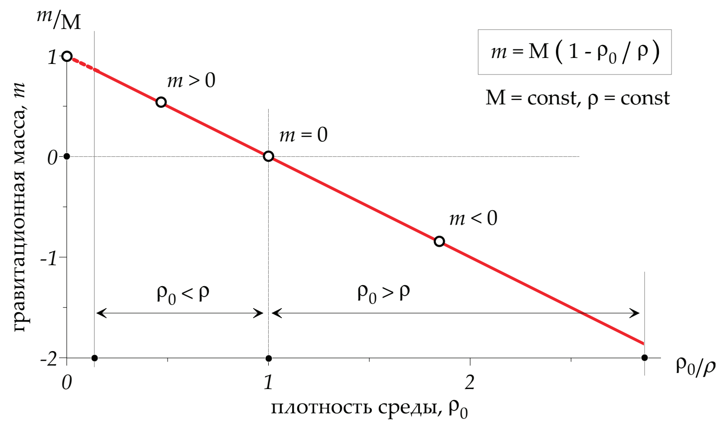


Рис. 4. Соотношение инерционной M и гравитационной массы m, как линейная функция плотности гравитирующей среды ρ_0

Пример 1. Вес тела на поверхности Земли. Вес тела F на поверхности Земли — это сила взаимодействия двух гравитационных масс: Земли, и покоющегося на её поверхности, предмета с инерционной массой M и плотностью ρ

$$F = mg\,, \quad \text{где} \quad m = M\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\,, \quad g = \mathbf{G}\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_\oplus}\right)\,, \tag{18}$$

здесь $\rho_\oplus$ — плотность Земли; $R_\oplus$ — радиус Земли; $M_\oplus$ — инерционная масса Земли; ρ_0 — плотность прилегающей к поверхности Земли атмосферы; $\mathbf{G}$ — гравитационная постоянная.

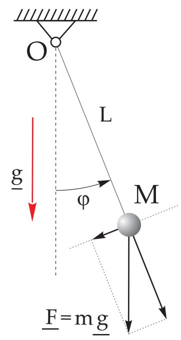


Рис. 5.

Пример 2. Уравнение колебания маятника. Пусть инерционная масса маятника M связана с шарниром **O** невесомым и недеформируемым стержнем длиной L (рис. 5). Запишем уравнения плоских колебаний математического маятника в гравитационном поле Земли с учётом того факта, что гравитационная и инерционная массы не равны, то есть присутствует некая окружающая среда с плотностью $\rho_0 \neq 0$ в которой происходят колебания. Явлениями диссипации, в рассматриваемой системе, пренебрегаем.

$$J\ddot{\varphi} = -F \sin\varphi \, L\,,$$

где $J = ML^2$ — момент инерции массы M относительно точки подвеса $\mathbf{O}$; $F = mg$ — сила гравитационного взаимодействия между гравитационными массами Земли и маятника; m — гравитационная масса маятника. Таким образом, уравнение колебаний маятника, с учётом (17), принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{g}{L}\sin\varphi = 0\ , \tag{19}$$

где ρ — плотность материала маятника.

5. Гравитационное взаимодействие пары тел в гравитирующей среде

Как было показано ранее (17), гравитационная и инерционная массы, связаны соотношением:

$$m = M\left(1 - {}^{\rho_0}/_{\rho}\right)\ ,$$

где M — инерционная масса; ρ_0 — плотность окружающей гравитирующей среды; $\rho = {}^{M}/_{V}$ — плотность инерционной массы занимающей объём V (концентрация вещества на единицу объёма). Следует особо подчеркнуть, что инерционная масса M, рассматриваемого материального тела, тождественна её гравитационной массе m в единственном случае, когда плотность среды, окружающей тело, равна нулю. Условие, когда $\rho_0 = 0$ является чисто теоретическим и физически не реализуемым. С учётом полученных результатов запишем, привычный нам, закон всемирного тяготения применительно к случаю гравитационного взаимодействия двух аномалий $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, расположенных на расстоянии r (рис. 6) и находящихся в гравитирующей однородной среде $\mathcal{F}$ с плотностью ρ_0:

$$F = \mathbf{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{где} \quad m_1 = M_1\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right),\ m_2 = M_2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right), \tag{20}$$

здесь m_1 и m_2 — гравитационные массы аномалий, M_1, ρ_1 и M_2, ρ_2 — инерционная масса и плотность тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, соответственно. Таким образом, само существование гравитационной массы объекта неотъемлемо связано с плотностью окружающей среды, что позволяет видеть условия при которых гравитационная масса может принимать, как положительные, так и отрицательные значения. Это наглядно проявляется в определённой среде в виде «отталкивания» одного тела от другого или «притяжения».

Например, факт погружения или всплытия подводной лодки есть не что иное, как управление величиной и знаком гравитационной массы, посредством регулирования балласта, что приводит, при отсутствии ходовой скорости, к движению судна вдоль силовой линии гравитационного поля Земли. Зависание подводной лодки на заданной глубине означает, что её гравитационная масса равна нулю. Аналогичный принцип работает и в случае воздухоплавательных аппаратов. Дирижабль или воздушный шар поднимается не вследствие разности плотностей газа внутри и снаружи оболочки шара, а по причине наличия градиента давления в атмосфере Земли, обусловленного гравитационным полем Земли. При подъёме дирижабль «отталкивается» от Земли, вследствие своей отрицательной гравитационной массы (средняя плотность дирижабля меньше плотности среды) и наоборот, когда он опускается, его гравитационная масса становится положительной (средняя плотность дирижабля больше плотности окружающего воздуха). Фауна Земли так же предоставляет многочисленные примеры управления гравитационной массой тела. Эти примеры показывают на способность объекта изменять величину и знак своей гравитационной массы при неизменной плотности окружающей среды.

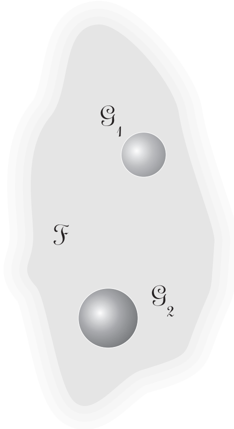
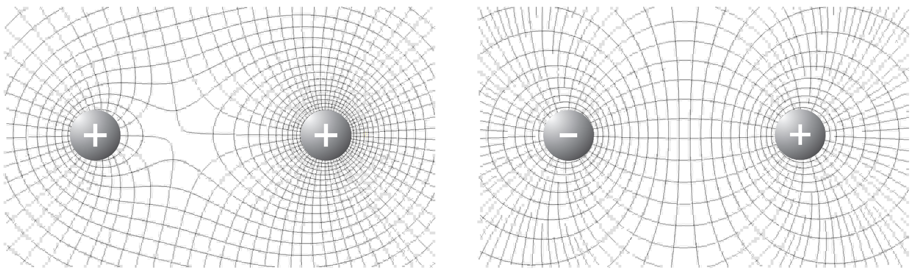


Рис. 6. Гравитирующая среда $\mathcal{F}$ и две аномалии $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$.

Рассмотрим модельную задачу в 3-х мерном пространстве. Пусть в гравитирующей среде $\mathcal{F}$ (плотность ρ_0) находятся два тела $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ с фиксированной плотностью ρ_1 и ρ_2, соответственно. Будем считать, что $\rho_1 > \rho_2$. Переменной величиной у нас является плотность среды ρ_0. Для каждой из трёх областей $\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ мы можем записать систему уравнений Пуассона для потенциала:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathrm{U}_{\mathcal{F}} & = -4\pi \mathbf{G} \rho_0 \ , \\ \Delta \mathrm{U}_{\mathcal{G}_1} & = -4\pi \mathbf{G} \rho_1 \ , \\ \Delta \mathrm{U}_{\mathcal{G}_2} & = -4\pi \mathbf{G} \rho_2 \ . \end{array} \right. \tag{21}$$

На рисунке представлен результат решения системы (21) в виде линий градиента U. Рассмотрены два варианта соотношения плотностей. На рисунке 7(a) показано распределение силовых линий для случая, когда плотность среды ρ_0 превышает плотность включений $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Второй вариант, рисунок 7(b), это когда величина плотности среды находится между плотностями тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$.



(a) $\rho_0 > \rho_1 > \rho_2$ (b) $\rho_1 > \rho_0 > \rho_2$

Рис. 7. Распределение градиента $\mathbf{U}_{\mathcal{F}}$ по области $\mathcal{F}$ в случае, когда пара гравитационных масс имеет один знак a) и различный b)

Численный эксперимент (рис. 7(b)) показывает, что *гравитационный диполь* физически реальный объект.

Определение 1. *Гравитационный диполь образуют два связанных тела произвольного объёма и формы, но с разной плотностью, находящиеся в среде с ненулевой плотностью, при условии, что плотность среды меньше плотности одного из тел и больше плотности другого.*

Тело в равновесии на границе двух сред — гравитационный диполь. Рассмотрим задачу статики — равновесие деревянного кубика плавающего в воде (рис. 8). Определим на какую глубину он погрузился в воду. Нам известно, что плотность воздуха (среда над поверхностью воды) $\rho = 1{,}29\,[\text{кг}/\text{м}^3]$, плотность воды $\rho = 1000\,[\text{кг}/\text{м}^3]$, а плотность деревянного кубика (дуб) $\rho = 800\,[\text{кг}/\text{м}^3]$. Длинна грани кубика $a = 1\,[\text{м}]$. Градиент гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}$ направлен перпендикулярно к поверхности воды.

Задача решается следующим способом: кубик рассматривается, как сумма двух частей. Одна часть является аномалией в воздухе, а другая — аномалией в воде. Каждая из аномалий подвержена гравитационному воздействию со стороны Земли. Так как мы видим, что кубик находится в равновесии, то это означает, что сумма гравитационных сил, действующих на его части, равна нулю и учитывая, что градиент гравитационного поля Земли $\underline{\mathbf{g}}$ для воздушной и водной среды направлен в одну сторону, получаем

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0\ , \quad \text{или} \quad (m_1 + m_2)\underline{\mathbf{g}} = 0\ .$$

Таким образом, получено условие равновесия тела — сумма гравитационных масс надводной и подводной частей кубика должна быть равна

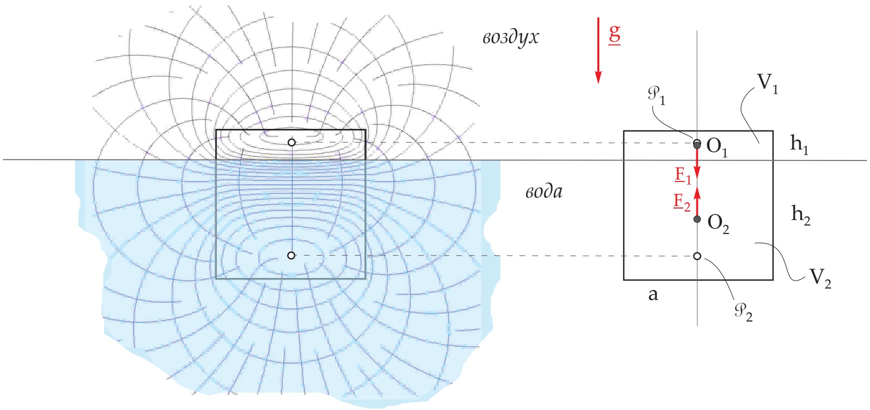


Рис. 8. Равновесие тела на границе двух сред. Проекция на плоскость

нулю:

$$m_1+m_2 = 0 \ ,$$

где

$$m_1 = \overbrace{\rho_{\text{куб}} V_1}^{M_1} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воздух}}}{\rho_{\text{куб}}}\right) \ , \quad m_2 = \overbrace{\rho_{\text{куб}} V_2}^{M_2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{вода}}}{\rho_{\text{куб}}}\right) \ .$$

Подставляем и, учитывая, что $V_1 = a^2 h_1$ и $V_2 = a^2 h_2$, получаем систему уравнений

$$h_1(\rho_{\text{куб}} - \rho_{\text{воздух}}) + h_2(\rho_{\text{куб}} - \rho_{\text{вода}}) = 0 \ , \quad h_1 + h_2 = a$$

откуда

$$h_2 = a \, \frac{\rho_{\text{куб}} - \rho_{\text{воздух}}}{\rho_{\text{вода}} - \rho_{\text{воздух}}}$$

Итак, глубина погружения кубика в воду $h_2 \approx 0{,}8\,[\text{м}]$, а высота надводной части — $h_1 \approx 0{,}2\,[\text{м}]$. Тело находится в равновесии.

Этот пример, с учётом определения 1, позволяет сформулировать аксиому:

> **Аксиома 1.** *Всякое материальное тело, находящееся в равновесии на границе двух сред, является гравитационным диполем.*

6. Гравитационный полюс, как функция плотности среды

Вернёмся к задаче (21) о взаимодействии двух однородных сфер $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ в неподвижной гравитирующей среде $\mathcal{F}$. Задачу дополним поиском точек равновесия и рассмотрим в трёхмерном пространстве, достаточно большом, что бы исключить влияние краевых эффектов. Тела неподвижны. Для решения задачи используеся метод конечных элементов.

Из рассмотрения характера гравитационного поля двух тел, видно, что силовые линии (линии градиента) сходятся или исходят из особых точек, не совпадающих с центрами масс каждого из тел. Это точки равновесия, в этих точках сумма всех сил равна нулю.

Расстояние между центрами масс однородных сфер $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ обозначим через L и пусть $L = 0{,}030\,[\text{м}]$. Остальные характеристики тел приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры гравитационной пары на рис. 9

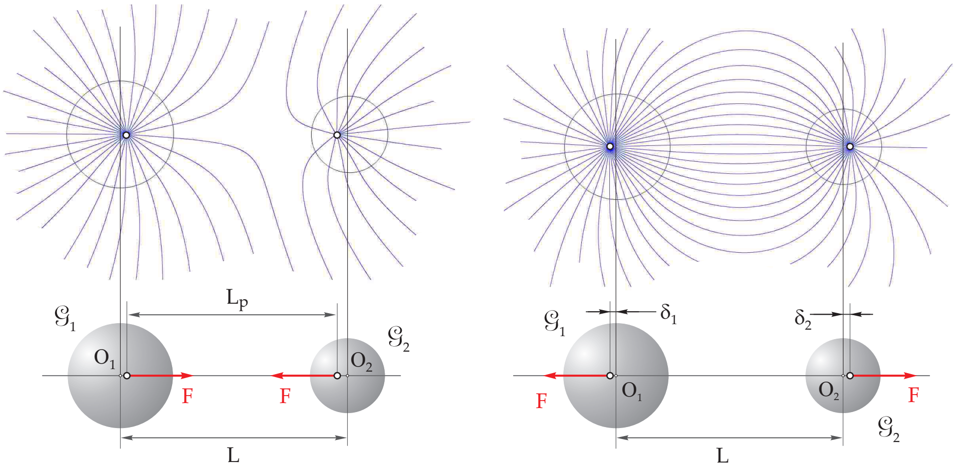
	плотность	радиус
$\mathcal{G}_1$	$\rho_1 = 7200\,[\text{кг}/\text{м}^3]$	$R_1 = 0{,}007\,[\text{м}]$
$\mathcal{G}_2$	$\rho_2 = 6700\,[\text{кг}/\text{м}^3]$	$R_2 = 0{,}005\,[\text{м}]$

Решение, в виде линий градиента скалярного поля $\mathbf{U}$, построено для двух случаев, а именно, когда плотность среды $\mathcal{F} - \rho_0 = 0$ и $\rho_0 = 7000\,[\text{кг}/\text{м}^3]$. Эти два решения представлены на рисунках 9. Через L_p введено обозначение расстояния между точками гравитационного равновесия или гравитационными полюсами. Особенность этих точек, как видно из рисунков, заключается в том, что линии градиента замкнуты двумя концами на эти полюса в случае гравитационного диполя (гравитационные массы разного знака) или являются «стоком» когда гравитационные массы одного знака.

Таблица 2. Смещение гравитационных полюсов относительно положения центров масс для случая одноимённых и разноимённых гравитационных масс $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_1$, помещённых в различные среды и разнесённых на расстояние $L = 0{,}03\,[\text{м}]$

ρ_0, $[\text{кг}/\text{м}^3]$	δ_1, [мм]	δ_2, [мм]
0	0,126	0,493
7000	-0,198	-0,250

Положение гравитационных полюсов в каждом из тел, рассматриваемой пары, зависит от их геометрических и физических (плотность) параметров, а так же и от расстояния между телами (например, центрами масс).



(a) $\rho_0 = 0$ — притяжение (b) $\rho_0 = 7200\,[\text{кг}/\text{м}^3]$ — отталкивание

Рис. 9. Смещение гравитационных полюсов δ_1 и δ_2 как функция плотности ρ_0 среды $\mathcal{F}$. Рисунок представляет решение для случая, когда гравитационные массы одного знака. Точки расположены между центрами масс тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Второй рисунок демонстрирует сосуществование разноимённых гравитационных масс. Фактически мы наблюдаем гравитационный диполь.

7. Выводы

1. Предложен вариант обобщения закона всемирного тяготения, что позволяет распространить закон на взаимодействие тел в гравитирующей среде, то есть расширить область его применения. Полученное обобщение включает в себя классический закон всемирного тяготения и древний, как сам МІР, закон Архимеда. По сути, Архимед первым сформулировал закон гравитационного взаимодействия в гравитирующих средах, дав определение «выталкивающей» силы, выражение (15).

2. Показано, что инерционная масса равна гравитационной только при сопоставлении их в отсутствии окружающей гравитирующей среды, то есть плотность среды должны быть **строго** равна нулю. Равенство гравитационной и инерционной масс есть случай чисто теоретический.

3. Показано присутствие, в окружающей нас Природе, таких объектов, как гравитационные диполи, тела с отрицательной и положительной гравитирующей массой.

4. Сопоставление характера силового взаимодействия тел, несущих электростатический заряд, с силовым взаимодействием тел, гравитационной природы, можно констатировать существование принципиального различия, которое не позволит объединить эти взаимодействия в одну теорию: тела с электрическим зарядом одного знака — отталкиваются, а тела, имеющие гравитационную массу одного знака — притягиваются.

Список литературы

[1] *Миронов, В. С.* Курс гравиразведки / В. С. Миронов. — Ленинград: Недра, 1980. — С. 543.

[2] *Торг, Вольфганг.* Гравиметрия / Вольфганг Торг. — Москва: «Мир», 1999. — С. 429.

[3] *Грушинский, Н. П.* Основы гравиметрии / Н. П. Грушинский. — Москва: «НАУКА», 1983. — С. 352.

[4] *Джеммер, М.* Понятие массы в классической и современной физике / М. Джеммер. — Москва: «Прогресс», 1967. — С. 246.