# UNA DEMOSTRACIÓN SIMPLE E INTUITIVA DEL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

## *A SIMPLE AND INTUITIVE PROOF OF FERMAT'S LAST THEOREM*

Miguel Ángel Rodríguez-Roselló (*)

| **Resumen** | ***Abstract*** |
| --- | --- |
| En este artículo se demuestra el denominado "Último Teorema de Fermat" mediante la aplicación de tres principios generales: el teorema de Pitágoras inverso, el Análisis Dimensional y la conexión álgebra-geometría. Estos tres simples conceptos estaban al alcance de Fermat, por lo que los podría haber utilizado en "la demostración maravillosa" que afirmaba tener. | *In this paper it is shown a proof of Fermat's Last Theorem by means of application of three general principles: the converse of Pythagoras' Theorem, Dimensional Analysis and the connection algebra-geometry. These three simple concepts were within the reach of Fermat himself, what allows us to infer that he could have used them for the "marvelous proof" that he claimed to have.* |

## El Último Teorema de Fermat

El denominado "Último Teorema de Fermat" (UTF) afirma que no existe ninguna terna de números enteros positivos $a, b, c$ tal que $a^n+b^n = c^n$ para todo entero $n>2$. Se trata de una ecuación "diofántica" –llamada así por Diofanto de Alejandría, un matemático del siglo III– de grado $n$, es decir, solo se consideran soluciones de números enteros. Es una generalización del teorema de Pitágoras cuando $n>2$. Cuando $n=2$ hay infinitas soluciones: las denominadas "ternas pitagóricas", como $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(13, 84, 85)$, etc. El calificativo de "último" al teorema no es debido a que fuera el último trabajo de Fermat en sentido cronológico, sino porque ha permanecido durante más de 350 años sin resolver.

Pierre de Fermat –abogado de profesión y matemático de vocación– escribió en 1637 una nota en latín en el margen de un ejemplar de la edición de 1621 de la Aritmética de Diofanto de Alejandría (traducido del griego al latín por Claude Gaspar Bachet). La nota fue descubierta póstumamente, pero el original se perdió. Una transcripción apareció en un libro publicado en 1670 por su hijo Clement-Samuel. La nota de Fermat decía así:

| | |
| --- | --- |
| *Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* | Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración maravillosa, pero no me cabe en un margen tan estrecho. |

(*) Doctor en Informática, Licenciado en Física, Master en Ingeniería del Conocimiento.
Email: marosello@telefonica.net

Desde que se enunció el teorema, ha desconcertado a los matemáticos durante más de 350 años, convirtiéndose en uno de los más famosos problemas matemáticos no resueltos. Muchos han sido los intentos para demostrarlo por parte de matemáticos profesionales y aficionados de todo el mundo. Se considera el mayor problema matemático del mundo, y tiene el dudoso honor de ser el teorema con el mayor número de demostraciones erróneas publicadas. Realmente no era un teorema, sino una conjetura, es decir, es algo que se cree que es verdadero pero que todavía no se ha demostrado.

Finalmente, el teorema fue demostrado en 1995 por el inglés Andrew Wiles [1995], 358 años después de que lo enunciara Fermat. La demostración –que ocupa 109 páginas– es compleja, nada intuitiva, difícil de entender –incluso para los matemáticos profesionales, porque se basa en una matemática avanzada y sofisticada– e indirecta (el UTF es un corolario de un teorema general). Es por ello que se ha planteado la posibilidad de demostrar el teorema de manera simple y utilizando matemática elemental, al alcance de cualquier persona con conocimientos matemáticos básicos. Si se lograra, se daría la razón a Fermat, de que efectivamente había descubierto un método de demostración sencillo y directo.

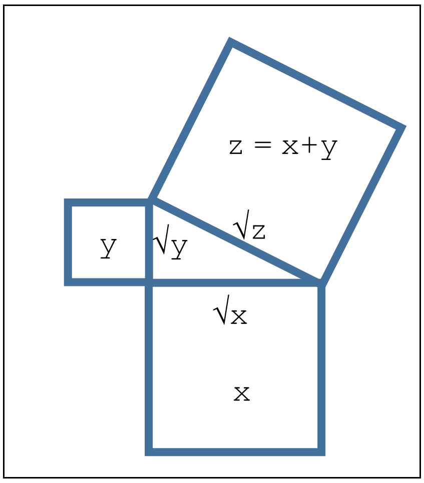
Según Hilbert, "Una teoría matemática no puede ser considerada como completa hasta que se ha clarificado al punto que podemos explicarla a la primera persona que encontremos en la calle" y "Una demostración tiene que ser alcanzada, no por cálculos, sino más bien por 'ideas puras' donde sea posible". Según Minkowski, "Los grandes problemas deben solucionarse con un mínimo de cálculos ciegos y con un máximo de pensamiento planteado de antemano". Es famosa también la frase de Einstein: "No entiendes realmente algo a menos que seas capaz de explicárselo a tu abuela".

Por lo tanto, la estrategia para intentar simplificar la demostración y hacerla más intuitiva es utilizar conceptos o principios generales. Desde esa perspectiva superior todo se hace más fácil.

Los principios generales que vamos a utilizar en la demostración del UTF son: el teorema de Pitágoras inverso, el Análisis Dimensional y la conexión álgebra-geometría.

## El Teorema de Pitágoras Inverso

El teorema de Pitágoras establece una propiedad geométrica que cumplen todos los triángulos rectángulos: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Algebraicamente, esto se expresa mediante la expresión $x^2+y^2 = z^2$, en donde $x$, $y$ son los catetos y $z$ la hipotenusa.




El teorema de Pitágoras inverso puede interpretarse de dos maneras:

- Interpretación algebraica.
  Si tenemos la expresión $x+y = z$, entonces existe un triángulo rectángulo de catetos $x^{1/2}$, $y^{1/2}$ e

hipotenusa $z^{1/2}$ (ver figura).

Es decir, que en la suma –la operación más fundamental de la matemática– está implícito el teorema de Pitágoras. De ahí su enorme importancia como conector universal entre álgebra y geometría:

– De la geometría se pasa al álgebra elevando al cuadrado los números que representan las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.
– Del álgebra se pasa a la geometría transformando los números de una suma en raíces cuadradas.

Este teorema es universal para toda expresión del tipo $x+y = z$ y conecta el álgebra con la geometría.

- Interpretación geométrica.
  Corresponde al teorema de Pitágoras inverso incluido en la proposición I.48 de los Elementos de Euclides –la proposición I.47 es el teorema de Pitágoras–, que afirma: "Un triángulo es rectángulo si y solo si el cuadrado construido sobre su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos".

  Este teorema es exclusivamente de tipo geométrico: conecta geometría con geometría.

Aquí vamos a utilizar la interpretación algebraica del teorema de Pitágoras inverso.

## El Análisis Dimensional

El Análisis Dimensional es el estudio de las dimensiones físicas que intervienen en las ecuaciones que modelizan un fenómeno físico. Aunque ciertas ideas del Análisis Dimensional estaban presentes de forma implícita en los trabajos de Galileo, Kepler y Newton, se considera que el Análisis Dimensional nació formalmente con Fourier en su obra "Teoría Analítica del Calor" (1822).

Los dos conceptos clave del Análisis Dimensional son:

1. Magnitud física.
   En matemática los números se consideran "puros", sin atributos. En física, sin embargo, se consideran magnitudes, que constan de un número puro (o cantidad) y una unidad, que puede ser simple o compuesta. Hay magnitudes primarias (longitud, tiempo y masa) y secundarias o compuestas (velocidad, fuerza, energía, etc.).

   Una magnitud física es una expresión de la forma "cantidad*unidad", que expresa el número de veces que se repite una unidad. La unidad puede ser simple (para las magnitudes primarias, p.e. `5*m`) o compuesta (para las magnitudes secundarias, p.e. `3*m/seg`). Una misma magnitud física puede expresarse mediante diferentes unidades y, por lo tanto, mediante diferentes cantidades, por ejemplo, `5*m ≡ 500*cm`. Existe una analogía entre magnitud y vector, en donde la unidad juega el papel de base vectorial.

Las cantidades y las unidades se manipulan usando las leyes del álgebra. Por ejemplo, si un objeto recorre 10 metros en 5 segundos, su velocidad es (10*m)/(5*seg) = (10/5)*m/seg = 2*m/seg.

2. Dimensión física.
Cada magnitud física primaria tiene asociada una dimensión, que se simboliza por una letra (L: longitud, T: tiempo, M: masa). Las magnitudes compuestas (o secundarias) tienen asociada una expresión dimensional, que es un monomio, es decir, un producto de potencias de las dimensiones primarias. Por ejemplo, utilizando la notación de Maxwell [x] para referirse a las dimensiones de una magnitud física x:

   Velocidad: $[v] = LT^{-1}$
   Fuerza: $[f] = [m][a] = MLT^{-2}$
   Energía: $[e] = L^2MT^{-2}$

En general, la expresión dimensional de una magnitud física es $L^{n1} \cdot T^{n2} \cdot M^{n3}$, siendo n1, n2, n3 números enteros (positivos, cero o negativos).

Las constantes y los ángulos son adimensionales y tienen dimensión 1, así como los argumentos y los resultados de las funciones trigonométricas, la función logaritmo y la función exponencial.

El Análisis Dimensional también cumple las reglas del álgebra, a excepción de la suma y la resta: $M+M = M$, $L+L = L$, $T+T = T$, $M-M = M$, $L-L = L$, $T-T = T$

## Principios del Análisis Dimensional

El Análisis Dimensional se basa en los dos principios siguientes:

1. Principio de homogeneidad (o consistencia) dimensional.
En toda ecuación que relacione variables de magnitudes físicas, las expresiones dimensionales a cada lado de la ecuación deben ser las mismas. Es la llamada “ley de conservación de las dimensiones”. Por ejemplo, la ecuación $s = v_0t + at^2/2$ tiene homogeneidad dimensional, como puede comprobarse fácilmente, teniendo en cuenta:

   $[s] = L$ $[v_0] = LT^{-1}$ $[t] = T$ $[½] = 1$ $[a] = LT^{-2}$

2. Principio de semejanza o de homogeneidad matemática.
El principio de semejanza afirma que “Todas las leyes físicas son invariantes ante cambios de las medidas en los diferentes sistemas de unidades.”. Este principio es muy importante cuando se trata de modelar fenómenos físicos mediante prototipos o maquetas a escala reducida.

## El Análisis Dimensional y la geometría

Aunque el Análisis Dimensional nació para modelar los fenómenos físicos, también es aplicable a la geometría:

- Hay una sola magnitud primaria: la longitud, cuya dimensión es $L$. Las magnitudes secundarias tienen como expresión dimensional $L^n$, siendo $n$ un número entero positivo. Por ejemplo:

  [Longitud de la circunferencia] = [$2\pi$·radio] = $L$
  [Superficie del círculo] = [$\pi$·radio$^2$] = $L^2$
  [Superficie del cuadrado] = [lado$^2$] = $L^2$
  [Volumen del cubo] = [lado$^3$] = $L^3$

  Las constantes geométricas $\pi$ (relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro) y $\phi$ (proporción áurea) son adimensionales. Son constantes universales en el sentido de que son independientes de la escala.

  Los ángulos se miden en radianes porque el radián (la relación entre dos longitudes) es adimensional y simplifica las fórmulas, como por ejemplo el desarrollo en serie de `sen(x)`, `cos(x)` y sus derivadas.

- Las magnitudes geométricas tienen la forma "cantidad·$u^n$", siendo $u$ una unidad de longitud y $n$ la dimensión del objeto geométrico. Por ejemplo,

  Superficie del cuadrado = (lado·$u$)$^2$ = lado$^2$·$u^2$
  Volumen del cubo = (lado·$u$)$^3$ = lado$^3$·$u^3$

  Al especificar la unidad se le da un mayor contenido semántico a las expresiones, más allá del puro formalismo algebraico.

- El principio de homogeneidad o consistencia dimensional hace referencia a la propia estructura de una fórmula de un objeto geométrico. Por ejemplo,

  [Superficie del triángulo] = [base·altura/2] = [base]·[altura]·[1/2] = $L \cdot L \cdot 1 = L^2$

- El principio de semejanza es la verdadera esencia de la geometría. Por ejemplo, $\pi$ es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, independientemente de su tamaño físico o escala.

## Ventajas del Análisis Dimensional

El Análisis Dimensional es una herramienta conceptual simple, potente, genérica y de tipo cualitativo. Es muy utilizado en ciencia pura y aplicada para:

- Ayuda en la modelización de forma simple de los fenómenos físicos. Permite ganar comprensión expresando las relaciones entre las dimensiones de las magnitudes que intervienen en dichos fenómenos. El primer paso de la modelización es la identificación de las variables que intervienen. A partir de consideraciones puramente dimensionales de las variables, muchas veces puede establecerse directamente la ecuación que relaciona las variables.

- Chequeo de los modelos físicos mediante la detección de posibles errores en las ecuaciones para que tengan sentido.

- Resolución de problemas a nivel cualitativo, cuya solución directa o cuantitativa conlleva grandes dificultades de tipo matemático. Una vez obtenida una solución cualitativa, es más fácil lograr una solución detallada y cuantitativa. A veces, la solución cualitativa coincide con la cuantitativa. La estrategia general es avanzar siempre desde lo cualitativo hacia lo cuantitativo.

En geometría, el Análisis Dimensional es especialmente útil para:

- Obtener fórmulas de entidades geométricas. A veces, la fórmula obtenida de forma cualitativa coincide con la cuantitativa. Otras veces la fórmula cualitativa requiere un ajuste para obtener la formula cuantitativa. Por ejemplo, la longitud de una circunferencia debe ser proporcional al radio $r$. Por lo tanto su longitud debe ser $k \cdot r$. El ajuste consiste en obtener el valor de $k$ (en este caso, $2\pi$). Otro ejemplo es la superficie de un rectángulo de lados $a$ y $b$. Su superficie $S$ es proporcional a $a$ y $b$: $S = a \cdot b$. En este caso, la fórmula no requiere ningún ajuste.

- Realizar demostraciones de teoremas geométricos, pues se simplifican notablemente. Un ejemplo es el siguiente teorema. Un triángulo de lados $a^n, b^n, c^n$ no puede ser una terna pitagórica con $a, b, c, n$ enteros positivos y $n>1$. La demostración cuantitativa es muy compleja y laboriosa, pero la demostración cualitativa es inmediata: por razones puramente dimensionales, $n$ debe ser $1$.

  La propia demostración del UTF se simplifica (como veremos), hasta el punto de ser casi inmediata.

## La Conexión Álgebra-Geometría

### Los dos modos de conciencia

Como es sabido, existen dos modos de conciencia:

- La conciencia intuitiva, profunda, conceptual, sintética, creativa, general, global, imaginativa, cualitativa, paralela, continua, etc. Se suele asociar al hemisferio derecho del cerebro. La denominaremos, para simplificar, "conciencia HD".

- La conciencia racional, superficial, formal, analítica, particular, cuantitativa, secuencial, discreta, etc. Se suele asociar con el hemisferio izquierdo del cerebro. La denominaremos, para simplificar, “conciencia HI”.

La conciencia completa surge cuando ambos modos de conciencia están conectados. Esta conexión es tal que lo particular es una manifestación de lo general. En este sentido, la conciencia HD es superior a la conciencia HI. Lo particular nunca puede estar aislado. Debe estar siempre ligado a algo general o universal. Esta conexión es precisamente la semántica de lo particular, lo que le confiere significado.

## Álgebra vs. Geometría

En matemática, los dos modos de conciencia se reflejan en la dualidad álgebra-geometría, en donde el álgebra corresponde a la conciencia HI y la geometría a la conciencia HD. La que podemos denominar “conciencia matemática” surge cuando álgebra y geometría están conectadas.

El teorema de Pitágoras (en sus versiones directa e inversa), desempeña un papel fundamental en la conexión entre álgebra y geometría, es decir, en la unión de los dos modos de conciencia. El teorema de Pitágoras es el paradigma de la unión entre álgebra y geometría. El teorema de Pitágoras es un teorema de la conciencia.

Como la conciencia HD es superior a la conciencia HI, y como la geometría es conciencia HD y el álgebra es conciencia HI, la geometría se sitúa en un nivel superior al álgebra, por lo que el álgebra debería ser una particularización o manifestación de la geometría. En este sentido:

- Una ecuación como $ax+by+c = 0$ es la manifestación, representación o formalización de una recta. Y una ecuación como $x^2+y^2 = z^2$ es la manifestación, representación o formalización de un círculo.

- El teorema de Pitágoras se formalizo de manera descendente: de la geometría al álgebra. El teorema de Pitágoras inverso implica elevar el nivel semántico: desde el álgebra a la geometría.

- El UTF es un teorema algebraico, pero también tiene que ser la manifestación de una propiedad geométrica.

- Como la geometría es más general e intuitiva que el álgebra, razonar sobre figuras geométricas mejora la comprensión, por lo que facilita las demostraciones y el descubrimiento de propiedades. El paradigma de este enfoque es precisamente el teorema de Pitágoras.

## Números vs. segmentos

La dualidad álgebra-geometría se refleja en la dualidad números-segmentos. Las variables (no exponenciales) de las ecuaciones algebraicas –como las variables $a$, $b$, $c$ de la ecuación de Fermat $a^n+b^n = c^n$– se pueden interpretar como números o como segmentos de recta, en donde los números corresponden a la conciencia HI y los segmentos a la conciencia HD. Considerar las variables como segmentos presenta grandes ventajas:

- Los segmentos conectan con la geometría, con lo superior, con la conciencia HD. Esto supone considerar el mayor nivel semántico posible. En cambio, los números son conciencia HI, la conciencia inferior.

- Generalizan las ecuaciones y las hacen independientes de los sistemas de coordenadas y de unidades.

- Es la interpretación más natural e intuitiva, que es de tipo descendente: desde la conciencia HD a la conciencia HI, desde lo general a lo particular, desde lo cualitativo a lo cuantitativo.

  Los antiguos griegos trabajaban con segmentos y áreas en vez de con números. El cuadrado de un número no se interpretaba como un número multiplicado por sí mismo, sino como un cuadrado geométrico. El teorema de Pitágoras lo expresaban verbalmente haciendo referencia solo a la geometría, como igualdad de áreas. No lo expresaron como una ecuación en el sentido simbólico moderno. Eso se hizo posteriormente, con el desarrollo del álgebra.

- Evitan tratar con números irracionales, que son números inexpresables. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es inexpresable numéricamente. En cambio, como la diagonal de un cuadrado de lado unitario se capta y se describe sin dificultad.

- Los segmentos son magnitudes (cantidad*unidad) y su dimensión es L. En cambio, los números no tienen dimensión (su dimensión es 1).

- Al estar en un nivel superior, los segmentos se pueden manifestar de infinitas maneras, dependiendo de la unidad utilizada. Un número es la manifestación de un segmento de recta de acuerdo con una cierta unidad. Cuando se cambia la unidad, su manifestación es diferente. Es decir, un segmento tiene infinitas manifestaciones (numéricas) posibles. Los números son fijos. Las longitudes de los segmentos son variables, dependiendo de la unidad utilizada.

## Pitágoras vs. Platón

Pitágoras y su escuela (los pitagóricos) daban más importancia a la aritmética que a la geometría. Pusieron énfasis en los números, a los que consideraban la esencia de todas las cosas y el fundamento de nuestra comprensión del mundo. “Los números gobiernan el mundo”. Los pitagóricos creían que todos los problemas matemáticos se podían resolver mediante números enteros y sus fracciones. Por eso supuso un trauma el descubrir que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable respecto a su lado, una consecuencia del propio teorema de Pitágoras.

Platón consideraba que la geometría pertenecía al reino de la Ideas o de las Formas, la perfecta, verdadera, inmutable y eterna realidad. Y que estas Ideas se manifiestaban (a nivel superficial) en múltiples formas concretas y singulares de naturaleza imperfecta.

Platón consideraba que la geometría era una disciplina superior a la aritmética. En el frontispicio del pórtico de su Academia había una leyenda que decía "Que no entre nadie que no sepa geometría". En el Timeo afirma que "La geometría es la llave para desentrañar los misterios del universo". Y también sostenía que la geometría enlazaba con lo divino. Se atribuye a Platón la frase "Dios utiliza siempre procedimientos geométricos". Para Platón los números no gobiernan el mundo, sino la geometría. Platón resaltó el carácter catastrófico de los irracionales.

## La geometría analítica

Descartes y Fermat (contemporáneos entre sí) fueron los creadores de la unión del álgebra y geometría mediante la denominada "geometría analítica", nombre muy adecuado que expresa ese proceso descendente desde lo genérico (geometría) a lo específico (álgebra). Lo que hoy denominamos "sistema cartesiano" es un plano con dos ejes perpendiculares que permiten representar puntos (mediante pares ordenados de números reales) y lugares geométricos de puntos (mediante ecuaciones).

- Descartes describió la geometría analítica en un apéndice del "Discurso del Método", publicado en 1637 (el mismo año que la famosa nota de Fermat). Descartes estaba interesado en la formalización algebraica de las figuras geométricas (como las cónicas), en un proceso "descendente": de la geometría al álgebra.

  Para Descartes, la geometría analítica era un paso hacia la ciencia universal, hacia las verdades fundamentales que conectan todas las ciencias. Descartes quería aplicar el método matemático (basado en la razón) a la filosofía.

- Fermat describió la geometría analítica en un manuscrito titulado "Introducción a los Lugares Planos y Sólidos" –en donde "los lugares" (*locis*) se traduce como "lugar geométrico"–, elaborado en 1636 (un año antes que Descartes). Fermat lo difundió entre su red de contactos epistolares, por lo que se cree que Descartes tuvo acceso al manuscrito de Fermat y que le sirvió de inspiración. Finalmente el manuscrito fue publicado póstumamente en 1679. Por eso hoy hablamos de la "geometría cartesiana", en lugar de "geometría fermatiana". Fermat –al contrario que Descartes– estaba interesado en las propiedades geométricas de las ecuaciones algebraicas (como las ecuaciones diofánticas), en un proceso "ascendente": del álgebra a la geometría.

Para Descartes y Fermat, las variables de una ecuación representaban segmentos lineales, más que números.

El teorema de Pitágoras fue fundamental para la invención de la geometría analítica. Está presente en dos temas fundamentales. Uno es la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2 = r^2$. El otro es el cálculo de la distancia entre dos puntos, dadas sus coordenadas.
A su vez, la geometría analítica fue una herramienta fundamental para el desarrollo del cálculo por parte de Newton y Leibniz.

## Álgebra vectorial y multivectorial

Son álgebras que operan con vectores y multivectores, respectivamente.

Un vector es la generalización de un segmento. Es un segmento de recta que tiene longitud (su módulo) y una orientación que consta de una dirección en el espacio y un sentido. Los vectores se utilizan para representar magnitudes físicas (vectoriales) como velocidad, fuerza, campo eléctrico, etc., que dependen del sistema de coordenadas utilizado. Las otras magnitudes físicas son las escalares, como temperatura, masa, densidad, etc., que son independientes del sistema de coordenadas. Las magnitudes escalares se representan mediante un número (con su correspondiente unidad). Los vectores en general se pueden representar mediante $n$ números, que son las proyecciones sobre los ejes ortogonales de un espacio de $n$ dimensiones. Los vectores se pueden considerar "números multidimensionales".

Un multivector (o n-vector), a su vez, generaliza el concepto de vector. Es la generalización del concepto de segmento en un espacio de $n$ dimensiones, es decir, un segmento multidimensional orientado. Un 0-vector es un escalar, un 1-vector es un vector tradicional, un 2-vector (o bivector) es un segmento de plano orientado, un 3-vector (o trivector) es un segmento de volumen orientado, etc.

## Álgebra geométrica

Hoy día, el álgebra geométrica (o álgebra de Clifford) se considera la culminación de la síntesis entre álgebra y geometría, hasta tal punto que algunos autores la consideran como "la matemática de la conciencia". Aunque es un álgebra, sus grandes principios inspiradores son de tipo geométrico.

El álgebra geométrica contempla multivectores (n-vectores) y están definidas las operaciones de suma y producto de n-vectores. El producto se denomina "producto geométrico". Todo n-vector tiene su opuesto y su inverso.

El álgebra geométrica no cumple el principio de homogeneidad dimensional porque (entre otras cosas) permite la suma de vectores y escalares. Esto se considera no más inusual que los números complejos, que son la suma de un componente real y otro imaginario.

Debido a su carácter genérico, el álgebra geométrica tiene aplicación en un gran número de campos: teoría de números, topología, geometría diferencial, física teórica (clásica y moderna), informática gráfica, robótica, etc. Es una herramienta que permite resolver muchos problemas matemáticos de una manera más simple y directa. Además generaliza los números (reales, complejos, cuaterniones, hipercomplejos, etc.).

Según David Hestenes –uno de los grandes impulsores del álgebra geométrica– el álgebra geométrica es un lenguaje unificado para la matemática y la física.

**Conclusiones**

- Álgebra y geometría son manifestaciones (a nivel matemático) de los dos modos de conciencia. La geometría es superior al álgebra. Y los segmentos están en un nivel superior al de los números.

- Álgebra y geometría se necesitan mutuamente para lograr la "conciencia matemática". El álgebra necesita de la geometría para interpretarse, para que los símbolos adquieran semántica. Y la geometría necesita del álgebra para expresarse. "La geometría sin álgebra es muda. El álgebra sin geometría es ciega" (David Hestenes).

- Las variables (no exponenciales) de una expresión algebraica deben interpretarse en primer lugar como segmentos y en segundo lugar como números.

- La geometría es el gran principio inspirador de la matemática. Los conceptos geométricos generalizan, unifican y simplifican la matemática. Los problemas algebraicos se simplifican cuando se abordan desde el punto de vista geométrico.

- La geometría es el fundamento de la física moderna. Muchas ecuaciones de la física tienen una sencilla interpretación geométrica, aportando modelos conceptuales más claros y comprensibles. Desde las ideas de Platón hasta la física moderna (cuántica y relativista), la geometría describe la realidad última del universo.

## Demostración del Teorema

La demostración del teorema consta de tres pasos, en donde en cada paso se aplica uno de los principios mencionados.

1. Aplicación del principio de conexión álgebra-geometría.
   Este principio se refleja en la conexión números-segmentos. Las variables $a, b, c$ de la ecuación de Fermat se pueden interpretar:

   a) Como números.
   Si interpretamos $a, b, c$ como números puros, dados $a, b, n$ enteros positivos, siempre es posible calcular $c = (a^n+b^n)^{1/2}$. La cuestión es si es posible o no que $c$ sea entero. Es la interpretación algebraica pura. Desde este punto de vista es muy difícil demostrar el teorema.

   b) Como segmentos.
   En el teorema de Pitágoras, las variables $a, b, c$ de la expresión $a^2+b^2 = c^2$ deben interpretarse como segmentos en general (los lados del triángulo rectángulo) y como variables numéricas en particular. Y puesto que la ecuación de Fermat $a^n+b^n = c^n$ es una generalización del teorema de Pitágoras, es natural interpretar también las variables $a, b, c$ de la misma forma. Ambas visiones (segmentos y números) deben ser compatibles, es decir, deben ser consistentes entre sí. Desde este punto de vista, todo se simplifica.

2. Aplicación del teorema de Pitágoras inverso (a nivel algebraico).
   Según este teorema, si se cumple la ecuación de Fermat $a^n+b^n=c^n$, entonces $A = a^{n/2}$, $B = b^{n/2}$ y $C = c^{n/2}$ tienen que ser los lados de un triángulo rectángulo $T$, donde $A$ y $B$ son los catetos y $C$ es la hipotenusa. Los cuadrados desplegados correspondientes son $A^2 = a^n$, $B^2 = b^n$ y $C^2 = c^n$, y donde se tiene que cumplir la ecuación pitagórica $A^2+B^2 = C^2$. Esto supone elevar el nivel semántico: desde el álgebra a la geometría.

3. Aplicación del Análisis Dimensional.
   Una vez instalados en la geometría, interpretamos las variables $a, b, c$ como longitudes de segmentos lineales:

   $$[a] = [b] = [c] = L$$

   Las expresiones $a^n$, $b^n$ y $c^n$ tienen dimensión $L^n$:

   $$[a^n] = [b^n] = [b^n] = L^n$$

   Los valores $A, B, C$ son longitudes (las de los lados del triángulo rectángulo):

   $$[A] = [B] = [C] = L$$

   Las expresiones $A^2, B^2, C^2$ son superficies (las de los cuadrados desplegados):

   $$[A^2] = [B^2] = [C^2] = L^2$$

   Las expresiones $A^2=a^n$, $B^2=b^n$, $C^2=c^n$ son relaciones entre magnitudes geométricas. Estas expresiones no tienen homogeneidad dimensional. Para que exista consistencia dimensional debe verificarse que $n=2$ y, por consiguiente, $A=a$, $B=b$ y $C=c$.

   Este razonamiento es válido independientemente de que $a, b, c$ sean enteros o reales. Pero puesto que $a, b, c$ son enteros, y como se cumple que $a^2+b^2 = c^2$, entonces $(a, b, c)$ debe ser una terna pitagórica.

   Otra forma de verlo es aplicando el Análisis Dimensional al área del triángulo rectángulo $T$. Su área es $(a·b)^{n/2}/2$, que tiene de dimensión $L^n$ y debería ser $L^2$. Por lo tanto, debe ser $n=2$.

En resumen, la demostración se basa en:

1. Aplicar el teorema de Pitágoras inverso (a nivel algebraico) a la ecuación de Fermat, considerando $a, b, c$ como variables numéricas, es decir, se "asciende" del álgebra a la geometría.
2. Una vez instalados en la geometría, se interpretan las variables $a, b, c$ como segmentos y se aplica el Análisis Dimensional para deducir que forzosamente $n=2$.

El UTF puede demostrarse en pocas palabras:

La expresión $a^n+b^n = c^n$ no se cumple para $a, b, c, n$ enteros positivos y $n>2$ porque, según el teorema de Pitágoras inverso (versión algebraica), existe un triángulo rectángulo $T$ de lados $a^{n/2}, b^{n/2}, c^{n/2}$ que son longitudes (dimensión $L$), cuyos cuadrados desplegados correspondientes $(a^n, b^n, c^n)$ son superficies (dimensión $L^2$), y cuya superficie es $(ab)^{n/2}/2$ (también dimensión $L^2$). Para que exista consistencia dimensional, $n$ debe ser forzosamente $2$. Y puesto que $a, b, c$ son enteros positivos, y como se cumple que $a^2+b^2 = c^2$, entonces $(a, b, c)$ debe ser una terna pitagórica.

## Reflexiones sobre el UTF

### El UTF, un teorema paradójico

El UTF se puede considerar un problema paradójico pues en él confluyen opuestos aparentemente contradictorios: la complejidad y la simplicidad. En primer lugar porque el teorema es muy fácil de enunciar y aparentemente muy difícil de demostrar. En segundo lugar porque la demostración de Wiles es enormemente compleja, que requiere unas herramientas matemáticas sofisticadas. Sin embargo, puede demostrarse también fácilmente, usando solo conceptos matemáticos elementales.

La paradoja de la simplicidad-complejidad corresponde a dos formas diferentes de ver el mismo problema. Es lo que Max Tegmark denomina “las perspectivas de la rana y del pájaro”. Para la rana, todo es muy difícil y complejo porque se mueve en la superficie, horizontalmente, en lo particular, en el detalle. Para el pájaro, desde una perspectiva superior, todo es mucho más fácil porque ve relaciones y conexiones evidentes, que no es posible percibir desde tierra desde la perspectiva de la rana. Es el viejo proverbio de que los árboles no dejan ver el bosque. Realmente, la perspectiva de la rana corresponde al modo de conciencia HI (la vía analítica), y la perspectiva del pájaro corresponde al modo de conciencia HD (la vía sintética).

La estrategia a utilizar debe ser siempre la del pájaro, avanzando (o descendiendo) siempre desde lo universal o general hacia lo particular, derivando siempre las verdades particulares a partir de principios generales o universales.

Wiles utilizó la perspectiva de la rana, buscando relaciones horizontales. La demostración presentada aquí es la del pájaro, pues se fundamenta en tres principios de tipo general para luego descender a lo analítico. Por lo tanto, el considerado “problema matemático más difícil del mundo” (desde la perspectiva de la rana) se convierte en “uno de los problemas más fáciles del mundo” (desde el punto de vista del pájaro). El UTF es quizás el ejemplo más representativo de estos dos puntos de vista extremos, de la dualidad simplicidad-complejidad.

### El UTF, un teorema de la conciencia

Así como el teorema de Pitágoras es un teorema de la conciencia porque conecta álgebra y geometría, el UTF es también un teorema de la conciencia porque en su demostración se unen varios opuestos:

- Lo racional y lo intuitivo. Intuitivamente, casi sin escribir o detallar la demostración, se intuye que el teorema es verdadero. Pero también se puede racionalizar la demostración.

- Números y segmentos. Hace uso de la conexión álgebra-geometría en su aspecto más fundamental: la conexión entre números y segmentos.

Y el teorema se establece como frontera entre lo real o manifestado (las infinitas ternas pitagóricas para $n=2$) y lo imaginario o no manifestado (la ausencia de soluciones de la ecuación de Fermat para $n>2$). En definitiva, entre el cero y el infinito.

## La posible "demostración maravillosa" de Fermat

Existen serias dudas sobre si Fermat realmente tenía una "demostración maravillosa", dada la extensión y complejidad de la demostración de Wiles, quien utilizó elementos del álgebra moderna que Fermat no podía conocer. Es por esto que la mayoría de los matemáticos creen que Fermat se equivocó, que no podía tener una verdadera y completa demostración. Solo unos pocos no están de acuerdo con esta opinión general y piensan que Fermat tenía esa demostración de una manera formal o al menos de forma intuitiva.

Pero es perfectamente posible que Fermat tuviera una demostración simple como la incluida aquí. Los tres principios generales aplicados son muy simples y estaban al alcance de Fermat. Esto nos permite inferir que podría haberlos utilizado para su "maravillosa demostración" que afirmaba tener.

## El UTF Generalizado

El UTF es un intento de generalización "vertical" del teorema de Pitágoras, es decir, cuando $n>2$, pero hay dos más generalizaciones posibles:

1. La generalización "horizontal" del teorema de Pitágoras es cuando hay $m>2$ sumandos: $a_1^2 + \dots + a_m^2 = b^2$. Por ejemplo, para $m=3$, tenemos muchas cuádruplas: $(1, 2, 2, 3)$, $(2, 3, 6, 7)$, $(1, 4, 8, 9)$, $(4, 4, 7, 9)$, $(12, 16, 21, 29)$, etc., una variedad mucho mayor que la de las ternas pitagóricas.

2. La generalización "horizontal-vertical" o completa es cuando hay $m>2$ sumandos y $n>2$: $a_1^n + \dots + a_m^n = b^n$, que es la expresión de Fermat generalizada.

La cuestión es: ¿Cuál es el límite $m$ mínimo para que se cumpla esta expresión? Según el UTF, para $n=2$, el límite mínimo es $m=2$. Para $n=3$ y $m=3$, tenemos muchos ejemplos de expresiones:

$$3^3+4^3+5^3 = 6^3 \qquad 1^3+6^3+8^3 = 9^3 \qquad 7^3+14^3+17^3 = 20^3 \qquad 3^3+36^3+37^3 = 46^3$$

La primera expresión es una generalización de la expresión pitagórica arquetípica $3^2+4^2 = 5^2$.

La conjetura sería: se necesitan $n$ sumandos como mínimo para que se cumpla la expresión de Fermat generalizada. Y el teorema de Fermat generalizado sería: no existe un entero $m<n$ tal que se cumpla la expresión $a_1^n + \dots + a_m^n = b^n$.

---

## Agradecimientos

Estoy en deuda con José Ignacio Sánchez Andrés y Pablo Rubio Pérez por su paciencia en la revisión de los del diferentes borradores de este artículo y por sus valiosos comentarios y sugerencias.

## Bibliografía


- Azcel, Amir D. Fermat's Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem. Basic Books, 2007.
- Edwards, Harold M. Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. Springer, 2000.
- Mahoney, Michael Sean. The Mathematical Career of Pierre de Fermat. Princeton University Press, 1994.
- Mozzochi, C.J. The Fermat Proof. Trafford Publishing, 2006.
- Palacios, Julio. Análisis Dimensional. Espasa-Calpe, 1964.
- Ribenboim, Paulo. Fermat's Last Theorem for Amateurs. Springer, 1999.
- Ribenboim, Paulo. 13 Lectures on Fermat´s Last Theorem. Springer, 1979.
- Savant, Marilyn vos. The World's Most Famous Math Problem: The Proof of Fermat's Last Theorem and Other Mathematical Mysteries. St. Martin’s Press, 1993.
- Singh, Simon. El enigma de Fermat. Editorial Planeta, 2006.
- Wiles, Andrew. Modular eliptic curves and Fermat Last Theorem. Annals of Mathematics, 141(3), 443-551, 1995.