La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (III)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (III)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. En el año 1943 Erwin Schrödinger inició una serie de publicaciones de lo que llamó Teoría Unitaria de Campo, con la que pretendía unificar los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico sobre una base geométrica. En este artículo que, es continuación de [36] y [37], analizamos la tercera de las teorías puramente afín de Schrödinger (Schrödinger-III), que basó en una conexión asimétrica sin ningún condicionamiento y capaz de acomodar los citados tres campos que quería unificar.

Abstract. In 1943 Erwin Schrödinger began a series of publications on Unitary Field Theory, with which wanted to unify the gravitational, electromagnetic and mesonics fields on a geometric basis. In this article, which is a continuation of [36] and [37], we analyze the third of the purely affine theories Schrödinger (Schrödinger-III), where he used a connection asymmetric capable of accommodating the unification of the three fields.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (III)» fue publicada el día 18 de febrero de 2015.

La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (III)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (III)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

1.- Introducción

Durante los años cuarenta del siglo pasado Erwin Schrödinger desarrolló una amplia investigación sobre lo que hoy llamamos teoría puramente afín, un proyecto que tiene sus antecesores en Weyl, Eddington y principalmente Einstein a quien hay que considerar como el primero que desarrolló una teoría de estas características en varios trabajos publicados en el año 1923. Schrödinger, al igual que antes Einstein, consideró como el principal elemento geométrico la conexión, cuyas componentes son los únicos potenciales de los campos, debiendo la densidad lagrangiana depender de esta conexión y de sus derivadas primeras. El tensor métrico aparece como magnitud derivada y por tanto en un segundo nivel con relación a la conexión.

El primer trabajo de Schrödinger sobre este asunto data del año 1943, posteriormente fue formulando distintas teorías cada vez más generales. La teoría que denominamos Schrödinger-I la examinamos en [36] y considera una conexión simétrica. Si bien en esta investigación Schrödinger pudo formular las ecuaciones de campo sólo logró la unificación de la gravitación y del electromagnetismo. El proyecto de Schrödinger era incluir en esta unificación el campo mesónico, en la época entendido como el responsable de las fuerzas de cohesión de las partículas nucleares. Por esta razón Schrödinger se vio en la necesidad de generalizar Schrödinger-I.

En esta investigación sobre teoría unitaria de campo Schrödinger quería obtener tres conjuntos de intensidades de campo que sirvieran para la descripción de los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico. Mientras que el primero tiene que venir descrito (tal como ocurre en Relatividad General) por un tensor de segundo orden simétrico, los dos restantes que corresponden a campos vectoriales, vienen descritos por sendos tensores de segundo orden antisimétricos.

En su primera teoría puramente afín formulada en 1943 Schrödinger partió de una densidad lagrangiana que dependía de las componentes simétricas y antisimétricas del tensor de Ricci, que se derivan de una conexión simétrica. De esta densidad lagrangiana se obtienen los tensores de las intensidades de campo gravitatorio y electromagnético por las ecuaciones

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}$$

pero no era posible obtener las intensidades del campo mesónico. (Las densidades escalares y tensoriales son representadas con letras negritas).

La primera sugerencia de Schrödinger se inclinó en suponer la existencia de dos conexiones ambas simétricas de las que se derivarían dos tensores de Ricci R_{ik} y R'_{ik}, que serían los argumentos de la densidad lagrangiana. De esta manera se derivarían dos tensores antisimétricos de segundo orden: los asociados a $R_{[ik]}$ y a $R'_{[ik]}$, pero, a su vez, aparecerían dos tensores métricos, lo que no puede ser. Para evitar esta situación es necesaria condicionar la dependencia funcional de la densidad lagrangina. Schrödinger supuso

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left\{ R_{(ik)} + R'_{(ik)}; R_{[ik]} + R'_{[ik]}; R_{[ik]} - R'_{[ik]} \right\}$$

entonces como

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R'_{(ik)}}$$

el tensor métrico es único, existiendo a su vez dos tensores antisimétricos diferentes

$$\boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}; \qquad \boldsymbol{m}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R'_{[ik]}}$$

los cuales representarían al campo electromagnético y al mesónico.

Al final del artículo de 1943 [16] el mismo Schrödinger decía que había sido advertido por A. J. McConnell que no era necesario duplicar la conexión afín porque la idea «aunque admisible era después de todo extraña» y que si se partía de una conexión asimétrica, además de la parte simétrica de la conexión, existiría su parte antisimétrica, las cuales podrían servir para acomodar los tres campos.

En la generalización que llamamos teoría Schrödinger-II publicada en 1944 bajo el título «La unión de los tres campos fundamentales (gravitación, mesón, electromagnetismo)», Schrödinger consideró una conexión no simétrica, lo que permitía acomodar además del campo tensorial de la gravitación, dos campos vectoriales. No obstante, y probablemente por razones simplificadoras, Schrödinger impuso la condición semisimétrica (ver [37]) por la cual reducía a sólo cuatro las componetes de la parte antisimétrica de la conexión.

Si la conexión no es simétrica entonces surge un nuevo vector dependiente de las derivadas de la conexión. Se trata de la curvatura homotética V_{ik}, que en el caso especial de conexión simétrica coincide con la parte antisimétrica del tensor de Ricci. Por tanto, Schrödinger-II considera una densidad lagrangiana con la dependencia funcional

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left[R_{(ik)}, R_{[ik],} V_{ik} \right]$$

de la cual se derivan los tres campos (uno tensorial y dos vectoriales).

El siguiente intento de Schrödinger se publicó en el año 1946 con el título «The general affine field laws». En esta teoría que llamaremos Schrödinger-III [20] avanza en la generalización pues considera una conexión asimétrica sin ninguna limitación. Al igual que en las teorías anteriores, también ésta es puramente afín en el sentido de que el tensor métrico aparece como un elemento derivado, tomándose como potenciales de campo las componentes de la conexión.

Schröndiger abordó esta tercera teoría descomponiendo la conexión en tres campos: las componentes simétricas de la conexión, las componentes sin traza de la parte antisimétrica y un vector. Esta descomposición no significa ninguna limitación de la conexión, pero nos permite simplificar los cálculos matemáticos.

Con esta teoría que a continuación analizamos, Schrödinger pretendía la unificación de los campos: gravitatorio, electromagnético y mesónico. No obstante, en esta tercera teoría encuentra que los dos campos antisimétricos que deben representar a los campos electromagnético y mesónico eran únicos y su identificación inequívoca, en el sentido de que uno de los campos era estrictamente lineal como corresponde a las ecuaciones de Maxwell, mientras que el otro campo antisimétrico no lo era y por tanto debía ser entendido como el campo de los mesones.

Señalar, por último, que en Schröginder-III no se elige ninguna densidad lagrangiana, es decir sólo se tienen en consideración la dependencia funcional de la densidad lagrangiana pero sin proponer ninguna función específica para ella. Esto significa que Schrödinger pudo encontrar las relaciones auxiliares que surgen en la teoría puramente afín, o sea, expresiones que nos permiten relacionar la conexión con las intensidades secundarias de campo y sus primeras derivadas.

Entiéndase que este trabajo es continuación de [36] y [37] por lo que se aconseja previamente su lectura. En lo referente la matemática empleada seguimos la notación y las definiciones de [33].

2.- Las variables de campo

La teoría Schrödinger-III es una teoría puramente afín basada en una conexión asimétrica sobre la que no se impone ninguna limitación. La conexión se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\Gamma_{pq}{}^{r} = \Gamma_{(pq)}{}^{r} + \Gamma_{[pq]}{}^{r}$$

donde la parte antisimétrica $\Gamma_{[pq]}{}^{r}$ es un tensor de tercer orden. Si hacemos la definición

$$\Gamma_{[rq]}{}^{r} = 3V_q$$

podemos descomponer $\Gamma_{[pq]}^{\ \ r}$ en dos partes, una de ellas libre de traza $W_{pq}^{\ \ r}$ y la otra dependiente del vector V_q

$$\Gamma_{[pq]}^{\ \ r} = W_{pq}^{\ \ r} + \delta_p^r V_q - \delta_q^r V_p$$

donde comprobamos que $W_{rq}^{\ \ r} = 0$ y $W_{qr}^{\ \ r} = 0$. Notemos que V_q es igual a un tercio del vector de torsión.

Ahora es necesario expresar el tensor de Ricci y la curvatura homotética en función de estas nuevas variables: $\Gamma_{(pq)}^{\ \ r}$, $W_{pq}^{\ \ r}$ y V_p para posteriormente hacer la variación de la acción respecto a estas variables y aplicar el principio de mínima acción.

Definiendo el tensor de Ricci y la curvatura homotética por la siguientes relaciones

$$R_{ik} = \Gamma_{is,k}^{\ \ s} - \Gamma_{ik,s}^{\ \ s} + \Gamma_{is}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ s} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{ts}^{\ \ s}$$
$$V_{ik} = \Gamma_{sk,i}^{\ \ s} - \Gamma_{si,k}^{\ \ s}$$

se obtiene

$$R_{ik} = R_{ik}^* - D_i^* V_k - 2D_k^* V_i - 3V_i V_k - D_s^* W_{ik}^{\ \ s} + W_{is}^{\ \ t} W_{tk}^{\ \ s} + 3V_s W_{ik}^{\ \ s}$$
$$V_{ik} = V_{ik}^* + 3\left(V_{k,i} - V_{i,k}\right) \tag{1}$$

el asterisco significa que el cálculo se realiza exclusivamente con la parte simétrica de la conexión.

Debemos notar que tenemos 68 variables de campo: 40 de $\Gamma_{(pq)}^{\ \ r}$, 24 de $W_{pq}^{\ \ r}$ y 4 de V_q. No obstante existen las 4 restricciones $W_{rq}^{\ \ r} = 0$.

La densidad lagrangiana del campo tiene la dependencia funcional

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left(R_{si}, V_{si}\right) = \boldsymbol{L}\left[R_{(si)}, R_{[si]}, V_{si}\right]$$

lo que significa que depende de los anteriores potenciales de campo y de sus primeras derivadas. Las correspondientes ecuaciones de campo se obtienen por el principio de mínima acción

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{L}\, d\Omega = 0.$$

Entendemos como intensidades de campo unas cantidades tensoriales que se derivan de los potenciales (componentes de la conexión) y de sus derivadas, como son $R_{(si)}, R_{[si]}, V_{si}$ a las que denominamos intensidades de campo primarias. Definimos las intensidades de campo secundarias por

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}; \qquad \boldsymbol{v}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial V_{ik}}$$

siendo $\boldsymbol{g}^{ik}$ una densidad tensorial simétrica; $\boldsymbol{f}^{ik}$ y $\boldsymbol{v}^{ik}$ son densidades tensoriales ambas antisimétricas. La aplicación del principio de mínima acción exige el uso de los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{p}^i$ (con lo que se tiene en consideración la restricción $W_{rq}^{\ \ r} = 0$) de tal forma que tenemos

$$\delta I = \int \left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)} + \boldsymbol{f}^{ik}\delta R_{[ik]} + \boldsymbol{v}^{ik}\delta V_{ik} - \boldsymbol{p}^i \delta W_{ki}^{\ \ k}\right) = 0. (2) \tag{2}$$

3.- Variación respecto a $\Gamma_{(pq)}^{\ \ r}$

Vamos a calcular la variación (2) realizada respecto al primer conjunto de variables de campo $\Gamma_{(pq)}^{\ \ r}$. Para ello usamos las siguientes identidades de Palatini

$$\delta R_{(ik)}^* = \frac{1}{2} D_i^* \delta \Gamma_{(ks)}^{\ \ s} + \frac{1}{2} D_k^* \delta \Gamma_{(is)}^{\ \ s} - D_s^* \delta \Gamma_{(ik)}^{\ \ s}$$
$$\delta R_{[ik]}^* = \frac{1}{2} D_k^* \delta \Gamma_{(is)}^{\ \ s} - \frac{1}{2} D_i^* \delta \Gamma_{(ks)}^{\ \ s}.$$

De (1) se deduce que las partes simétrica y antisimétrica del tensor de Ricci son

$$R_{(ik)} = R_{(ik)}^* - \frac{3}{2} D_k^* V_i - \frac{3}{2} D_i^* V_k - 3V_i V_k + W_{is}^{\ \ t} W_{tk}^{\ \ s}$$
$$R_{[ik]} = R_{[ik]}^* + \frac{1}{2}\left(D_i^* V_k - D_k^* V_i\right) - D_s^* W_{ik}^{\ \ s} + 3V_s W_{ik}^{\ \ s}$$

de donde se deduce

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)} = \boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)}^* + 3\boldsymbol{g}^{ik} V_s \delta \Gamma_{(ik)}^{\ \ s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik} D_i^* \delta \Gamma_{(ks)}^{\ \ s} + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik} D_k^* \delta \Gamma_{(is)}^{\ \ s} - \boldsymbol{g}^{ik} D_s^* \delta \Gamma_{(ik)}^{\ \ s} + 3\boldsymbol{g}^{ik} V_s \delta \Gamma_{(ik)}^{\ \ s} =$$
$$= \boldsymbol{g}^{ik} D_i^* \delta \Gamma_{(ks)}^{\ \ s} - \boldsymbol{g}^{ik} D_s^* \delta \Gamma_{(ik)}^{\ \ s} + 3\boldsymbol{g}^{ik} V_s \delta \Gamma_{(ik)}^{\ \ s} \tag{3}$$

y también calculamos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^{ik}\delta R_{[ik]} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{ik}D_k^*\delta\Gamma_{(is)}^{\ \ s} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{ik}D_i^*\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ s} - \boldsymbol{f}^{ik}W_{ik}^{\ \ t}\delta\Gamma_{(ts)}^{\ \ s} + \boldsymbol{f}^{ik}W_{tk}^{\ \ s}\delta\Gamma_{(is)}^{\ \ t} + \boldsymbol{f}^{ik}W_{it}^{\ \ s}\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ t} \\ \boldsymbol{v}^{ik}\delta V_{ik} &= \boldsymbol{v}^{ik}D_i^*\delta\Gamma_{(sk)}^{\ \ s} - \boldsymbol{v}^{ik}D_k^*\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ s} = 2\boldsymbol{v}^{ik}D_i^*\delta\Gamma_{(sk)}^{\ \ s}. \end{aligned} \tag{4}$$

La expresión resultante de sumar (3) y (4) se llevan a (2) y luego se aplica el teorema de Gauss, así por ejemplo, integrando por partes el primer sumando de (3)

$$\int \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}D_i^*\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ s}\,d\Omega = \frac{1}{2}\int D_i^*\left[\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ s}\right]d\Omega - \frac{1}{2}\int D_i^* g^{ik}\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ s}\,d\Omega$$

y ahora se aplica el teorema de Gauss a la primera integral del segundo miembro

$$\int D_i^*\left[\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ s}\right]d\Omega = \int g^{ik}\delta\Gamma_{(ks)}^{\ \ s}\,dS_i$$

que es nulo si suponemos que la variación arbitraria de la conexión se anula en los límites de la integral de superficie. Nótese que definimos un tensor de segundo orden g^{ik} tal que cumpla $\boldsymbol{g}^{ik} = \sqrt{g}g^{ik}$ donde g es el determimante de g_{ik} componentes que son a su vez son definidas por la relación $g_{ik}g^{rk} = \delta_i^k$.

Aplicando el teorema de Gauss con los restantes sumandos de (3) y (4)

$$\int \left[\begin{matrix} D_s^*\boldsymbol{g}^{ik} - \delta_s^i D_t^*\boldsymbol{g}^{tk} + 3\boldsymbol{g}^{ik}V_s - \frac{1}{2}\delta_s^k D_t^*\boldsymbol{f}^{it} + \frac{1}{2}\delta_s^i D_t^*\boldsymbol{f}^{tk} - \\ -\delta_s^i\boldsymbol{f}^{rt}W_{rt}^{\ \ k} + \boldsymbol{f}^{it}W_{st}^{\ \ k} + \boldsymbol{f}^{tk}W_{ts}^{\ \ i} - 2\delta_s^i D_t^*\boldsymbol{v}^{tk} \end{matrix}\right]\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ s}\,d\Omega = 0$$

antes de tener en cuenta la arbitrareidad de la variación de la conexión, hay que advertir que como es simétrica encontramos que si $i \neq k$

$$b^{ik}\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ s} = \left(b^{ik} + b^{ki}\right)\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ s}\left(i > k\right) \Rightarrow\ b^{ik} + b^{ki} = 0$$

porque si $i \geq k$ entonces todas las $\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ s}$ son independientes. Si embargo si $i = k$ entonces

$$b^{ii}\delta\Gamma_{(ii)}^{\ \ s} \Rightarrow\ b^{ii} = 0 \Rightarrow\ b^{ii} + b^{ii} = 0$$

en resumen

$$b^{ik}\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ s} = \left(b^{ik} + b^{ki}\right)\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ s}\left(i \geq k\right) \Rightarrow\ b^{ik} + b^{ki} = 0.$$

Aplicando esta última propiedad encontramos que del principio de mínima acción se obtiene

$$\begin{aligned} &2D_s^*\boldsymbol{g}^{ik} - \delta_s^i D_t^*\boldsymbol{g}^{tk} - \delta_s^k D_t^*\boldsymbol{g}^{ti} + 6\boldsymbol{g}^{ik}V_s - \delta_s^k D_t^*\boldsymbol{f}^{it} - \delta_s^i D_t^*\boldsymbol{f}^{kt} - \\ &-\delta_s^i\boldsymbol{f}^{rt}W_{rt}^{\ \ k} - \delta_s^k\boldsymbol{f}^{rt}W_{rt}^{\ \ i} + 2\boldsymbol{f}^{it}W_{st}^{\ \ k} + 2\boldsymbol{f}^{kt}W_{st}^{\ \ i} - 2\delta_s^i D_t^*\boldsymbol{v}^{tk} - 2\delta_s^k D_t^*\boldsymbol{v}^{ti} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Al contraer (5) respecto a los índices *s, i*

$$D_s^* g^{ks} = 2\boldsymbol{g}^{sk}V_s - 5/3\,D_t^*\boldsymbol{f}^{kt} - \boldsymbol{f}^{rt}W_{rt}^{\ \ k} - 10/3\,D_t^*\boldsymbol{v}^{tk} \tag{6}$$

al sustituir en (5) se obtiene

$$D_s^*\boldsymbol{g}^{ik} + \delta_s^i\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}^k - \frac{2}{3}\boldsymbol{r}^k - \boldsymbol{g}^{rk}V_r\right) + \delta_s^k\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}^i - \frac{2}{3}\boldsymbol{r}^i - \boldsymbol{g}^{ri}V_r\right) + 3\boldsymbol{g}^{ik}V_s + \boldsymbol{f}^{it}W_{st}^{\ \ k} + \boldsymbol{f}^{kt}W_{st}^{\ \ i} = 0, \tag{7}$$

donde hemos hecho las definiciones

$$\boldsymbol{i}^k = D_t^*\boldsymbol{f}^{kt}; \quad \boldsymbol{r}^k = D_t^*\boldsymbol{v}^{kt}.$$

Como $\boldsymbol{f}^{kt}$ y $\boldsymbol{v}^{kt}$ son antisimétricos las fórmulas anteriores son equivalentes a

$$\boldsymbol{i}^k = \frac{\partial\boldsymbol{f}^{kt}}{\partial x^t}; \quad \boldsymbol{r}^k = \frac{\partial\boldsymbol{v}^{kt}}{\partial x^t}.$$

Indiquemos por últimos que (7) es la primera de las tres ecuaciones auxiliares, que son aquellas que nos relacionan las componentes de la conexión con $\boldsymbol{g}^{ik}$, $\boldsymbol{f}^{kt}$ y $\boldsymbol{v}^{kt}$ y sus derivadas primeras.

4.- Variación respecto a $W_{pq}^{\ \ r}$

De nuevo volvemos a (2) y variamos respecto a $W_{pq}^{\ \ r}$ que es la componente sin traza de la parte antisimétrica de la conexión. Analizando los distintos términos de (2) que intervienen en el cálculo se encuentra

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)} &= \boldsymbol{g}^{ik}W_{is}^{\ \ t}\,\delta W_{tk}^{\ \ s} + \boldsymbol{g}^{ik}W_{tk}^{\ \ s}\delta W_{is}^{\ \ t} = \left(\boldsymbol{g}^{ik}W_{is}^{\ \ t} + \boldsymbol{g}^{tr}W_{sr}^{\ \ k}\right)\delta W_{tk}^{\ \ s} \\ \boldsymbol{f}^{ik}\delta R_{[ik]} &= -D_s^*\left(\boldsymbol{f}^{ik}\delta W_{ik}^{\ \ s}\right) + D_s^*\boldsymbol{f}^{ik}\delta W_{ik}^{\ \ s} + 3\boldsymbol{f}^{ik}V_s\delta W_{ik}^{\ \ s} = -D_s^*\left(\boldsymbol{f}^{ik}\delta W_{ik}^{\ \ s}\right) + \left(D_s^*\boldsymbol{f}^{tk} + 3\boldsymbol{f}^{tk}V_s\right)\delta W_{tk}^{\ \ s} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{p}^{i}\delta W_{ki}^{\ \ k}=\delta_{s}^{t}\mathfrak{p}^{k}\delta W_{tk}^{\ \ s}$$

ahora debemos de calcular la acción, tener en cuenta el teorema de Gauss y aplicar el principio de mínima acción. Como $\delta W_{tk}^{\ \ s}$ es antisimétrico tendremos que

$$b^{ik}\delta W_{tk}^{\ \ s}=\left(b^{ik}-b^{ki}\right)\delta W_{tk}^{\ \ s}\left(i\geq k\right)\Rightarrow b^{ik}-b^{ki}=0$$

entonces

$$-\mathfrak{g}^{rk}W_{sr}^{\ \ t}+\mathfrak{g}^{tr}W_{sr}^{\ \ k}+\mathfrak{g}^{rt}W_{sr}^{\ \ k}-\mathfrak{g}^{kr}W_{sr}^{\ \ t}+2D_{s}^{*}\mathfrak{f}^{tk}+6\mathfrak{f}^{tk}V_{s}+\delta_{s}^{t}\mathfrak{p}^{k}-\delta_{s}^{k}\mathfrak{p}^{t}=0 \tag{8}$$

para determinar el multiplicador de Lagrange, contraemos (8) respecto a t y s

$$\mathfrak{p}^{k}=-\frac{2}{3}D_{s}^{*}\mathfrak{f}^{sk}-2\mathfrak{f}^{sk}V_{s}$$

resultado que sustituimos en (8) obteniendo

$$D_{s}^{*}\mathfrak{f}^{tk}-\delta_{s}^{t}\left(\frac{1}{3}\mathfrak{i}^{k}+\mathfrak{f}^{sk}V_{s}\right)+\delta_{s}^{k}\left(\frac{1}{3}\mathfrak{i}^{t}+\mathfrak{f}^{st}V_{s}\right)+\mathfrak{g}^{rk}W_{rs}^{\ \ t}+\mathfrak{g}^{tr}W_{sr}^{\ \ k}+3\mathfrak{f}^{tk}V_{s}=0 \tag{9}$$

que es el segundo conjunto de las ecuaciones auxiliares.

5.- Variación respecto a V_s

Finalmente obtenemos de (2) la ecuación correspondiente a la variación de los vectores V_q

$$\mathfrak{g}^{ik}\delta R_{(ik)}=-\frac{3}{2}D_{k}^{*}\left(\mathfrak{g}^{ik}\delta V_{i}\right)+\frac{3}{2}D_{k}^{*}\mathfrak{g}^{ik}\delta V_{i}-\frac{3}{2}D_{i}^{*}\left(\mathfrak{g}^{ik}\delta V_{k}\right)+\frac{3}{2}D_{i}^{*}\mathfrak{g}^{ik}\delta V_{k}-3\mathfrak{g}^{ik}V_{i}\delta V_{k}-3\mathfrak{g}^{ik}V_{k}\delta V_{i}=$$

$$=-\frac{3}{2}D_{k}^{*}\left(\mathfrak{g}^{ik}\delta V_{i}\right)-\frac{3}{2}D_{i}^{*}\left(\mathfrak{g}^{ik}\delta V_{k}\right)+\left(3D_{k}^{*}\mathfrak{g}^{ik}-6\mathfrak{g}^{ik}V_{k}\right)\delta V_{i}$$

$$\mathfrak{f}^{ik}\delta R_{[ik]}=-\frac{1}{2}D_{k}^{*}\left(\mathfrak{f}^{ik}\delta V_{i}\right)+\frac{1}{2}D_{k}^{*}\mathfrak{f}^{ik}\delta V_{i}+\frac{1}{2}D_{i}^{*}\left(\mathfrak{f}^{ik}\delta V_{k}\right)-\frac{1}{2}D_{i}^{*}\mathfrak{f}^{ik}\delta V_{k}+3\mathfrak{f}^{ik}W_{ik}^{\ \ s}\delta V_{s}=$$

$$=\frac{1}{2}D_{k}^{*}\left(\mathfrak{f}^{ik}\delta V_{i}\right)-\frac{1}{2}D_{i}^{*}\left(\mathfrak{f}^{ik}\delta V_{k}\right)+\left(D_{k}^{*}\mathfrak{f}^{ik}+3\mathfrak{f}^{sk}W_{sk}^{\ \ i}\right)\delta V_{i}$$

$$\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{ik}=3D_{i}^{*}\left(\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{k}\right)-3D_{i}^{*}\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{k}-3D_{k}^{*}\left(\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{i}\right)+3D_{k}^{*}\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{i}=$$

$$=3D_{i}^{*}\left(\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{k}\right)-3D_{k}^{*}\left(\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{i}\right)+6D_{k}^{*}\mathfrak{v}^{ik}\delta V_{i}$$

ahora se aplica el principio de mínima acción y teniendo presente el teorema de Gauss

$$3D_{k}^{*}\mathfrak{g}^{ik}-6\mathfrak{g}^{ik}V_{k}+D_{k}^{*}\mathfrak{f}^{ik}+3\mathfrak{f}^{sk}W_{sk}^{\ \ i}+6D_{k}^{*}\mathfrak{v}^{ik}=0$$

que se simplifica con (6) quedando finalmente

$$D_{k}^{*}\mathfrak{f}^{ik}-4D_{t}^{*}\mathfrak{v}^{it}=0\ \Rightarrow\ \mathfrak{i}^{i}-4\mathfrak{v}^{i}=0.$$

al sustituir esta expresión en la anterior se obtiene

$$3D_{k}^{*}\mathfrak{g}^{ik}-6\mathfrak{g}^{ik}V_{k}+D_{k}^{*}\mathfrak{f}^{ik}+3\mathfrak{f}^{sk}W_{sk}^{\ \ i}+\frac{3}{2}D_{k}^{*}\mathfrak{v}^{ik}=0. \tag{10}$$

Notemos que las ecuaciones (7), (9) y (10) han sido halladas sin necesidad de conocer explícitamente la densidad lagrangiana del campo, sólo hemos necesitado la dependencia funcional de la densidad lagrangiana. Naturalmente las ecuaciones (7), (9) y (10) no son las ecuaciones de campo, son unas relaciones complementarias que nos permite relacionar la conexión con los tensores $\mathfrak{g}^{ik}$, $\mathfrak{v}^{ik}$ y $\mathfrak{f}^{ik}$ y sus derivadas primeras.

6.- Ecuaciones de campo

Llamamos intensidades de campo primarias a los tensores

$$\gamma_{ik}=R_{(ik)};\quad \phi_{ik}=R_{[ik]};\quad V_{ik}$$

entonces las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned}\gamma_{ik}&=R_{(ik)}^{*}-\frac{3}{2}D_{k}^{*}V_{i}-\frac{3}{2}D_{i}^{*}V_{k}-3V_{i}V_{k}+W_{is}^{\ \ t}W_{tk}^{\ \ s}\\ \phi_{ik}&=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma_{(sk)}^{\ \ s}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial\Gamma_{(si)}^{\ \ s}}{\partial x^{k}}\right]+\frac{1}{2}\left(V_{k,i}-V_{i,k}\right)-D_{s}^{*}W_{ik}^{\ \ s}+3V_{s}W_{ik}^{\ \ s}\end{aligned} \tag{11}$$

$$V_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{(sk)}^{\ \ s}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{(si)}^{\ \ s}}{\partial x^k} + 3\left(V_{k,i} - V_{i,k}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\Gamma_{(sk)}^{\ \ s} - 3V_{i,k}\right] - \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\Gamma_{(si)}^{\ \ s} - 3V_{k,i}\right] \tag{11}$$

a las que hay que añadir las ecuaciones complementarias (7), (9) y (10). Ciertamente para cada campo existen dos conjuntos de intensidades de campo. Así la gravedad viene descrita por $\mathbf{g}^{ik}$ y γ_{ik}; y los otros dos campos antisimétricos por $\mathbf{f}^{ik}$ y ϕ_{ik}, y por $\mathbf{v}^{ik}$ y V_{ik}. Los dos conjuntos de intensidades de campo se encuentran relacionada por

$$\mathbf{g}^{ik} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \gamma_{ik}}; \quad \mathbf{f}^{ik} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi_{ik}}; \quad \mathbf{v}^{ik} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial V_{ik}}$$

que podrán ser resueltas cuando se conozca la expresión de la densidad lagrangiana. Notemos que consideramos como intensidades de campo primitivas a γ_{ik}, ϕ_{ik} y V_{ik}, es decir la densidad lagrangiana es $\mathbf{L} = \mathbf{L}\left(\gamma_{ik}, \phi_{ik}, V_{ik}\right)$. También es posible encontrar la relación inversa, para ella calculamos la densidad lagrangiana transformada de Legendre

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{g}^{ik}\gamma_{ik} + \mathbf{f}^{ik}\phi_{ik} + \mathbf{v}^{ik}V_{ik} - \mathbf{L}$$

y entonces

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial \bar{\mathbf{L}}}{\partial \mathbf{g}^{ik}}; \quad \phi_{ik} = \frac{\partial \bar{\mathbf{L}}}{\partial \mathbf{f}^{ik}}; \quad V_{ik} = \frac{\partial \bar{\mathbf{L}}}{\partial \mathbf{v}^{ik}}.$$

Es fácil ver el paralelismo de este razonamiento con el utilizado en la mecánica clásica. Si *q, p* representan genéricamente las coordenadas y los momentos de una partícula entonces la equivalencia con nuestro razonamiento es

$$q \equiv \Gamma_{ik}^{\ \ r}; \quad \dot{q} \equiv \gamma_{ik}, \phi_{ik}, V_{ik}; \quad p \equiv \mathbf{g}^{ik}; \mathbf{f}^{ik}; \mathbf{v}^{ik}.$$

7.- Las nuevas intensidades de campo

Como hemos señalado, Schrödinger buscaba una teoría que describiera tres campos. Schrödinger-III consigue con este objetivo y los tres campos podrían venir dados por las intensidades $\mathbf{g}^{ik}$, $\mathbf{f}^{ik}$ y $\mathbf{v}^{ik}$ o por las intensidades adjuntas γ_{ik}, ϕ_{ik} y V_{ik}, lo que permite acomodar tanto el campo gravitatorio como el electromagnético y el mesónico.

No obstante, los dos campos antisimétricos no tienen que venir descritos forzosamente por las intensidades $\mathbf{f}^{ik}$ y $\mathbf{v}^{ik}$, una combinación lineal de estas intensidades también cumpliría con el requisito de ser antisimétricos. Buscamos, por tanto, unas nuevas intensidades de campo

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{ik} &= a_{11}\phi_{ik} + a_{12}V_{ik} \\ \bar{V}_{ik} &= a_{21}\phi_{ik} + a_{22}V_{ik} \end{aligned} \tag{12}$$

lo que induce una transformación equivalente en las intensidades adjuntas. En efecto, la transformación inversa de (12) es

$$\begin{aligned} \phi_{ik} &= a_{22}\bar{\phi}_{ik} - a_{12}\bar{V}_{ik} \\ V_{ik} &= -a_{21}\bar{\phi}_{ik} + a_{11}\bar{V}_{ik} \end{aligned}$$

donde suponemos que el determinante de la matriz de los coeficientes de la transformación es la unidad. Por definición

$$\bar{\mathbf{f}}^{ik} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{\phi}_{ik}}; \quad \bar{\mathbf{v}}^{ik} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{V}_{ik}}$$

entonces la transformación buscada es

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}^{ik} &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{\phi}_{ik}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi_{ik}}\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \bar{\phi}_{ik}} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial V_{ik}}\frac{\partial V_{ik}}{\partial \bar{\phi}_{ik}} = a_{22}\mathbf{f}^{ik} - a_{21}\mathbf{v}^{ik} \\ \bar{\mathbf{v}}^{ik} &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{V}_{ik}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \phi_{ik}}\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \bar{V}_{ik}} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial V_{ik}}\frac{\partial V_{ik}}{\partial \bar{V}_{ik}} = -a_{12}\mathbf{f}^{ik} + a_{11}\mathbf{v}^{ik}. \end{aligned}$$

Como antes hemos señalado, buscamos unos nuevos campos antisimétricos capaces de describir el campo electromagnético y el mesónico. O sea, tratamos que uno de los nuevos campos (por ejemplo $\bar{V}_{ik}$) cumpla con las ecuaciones lineales de Maxwell, entonces

$$\frac{\partial \bar{V}_{ik}}{\partial x^r} + \frac{\partial \bar{V}_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial \bar{V}_{ri}}{\partial x^k} = 0 \tag{13}$$

lo que se cumple si $\bar{V}_{ik}$ es un rotacional, pero dada la definición (11) de V_{ik} esto sólo se cumplirá si $V_{ik}=\bar{V}_{ik}$ es decir si $a_{21}=0$.

No parece muy razonable la relación $\mathfrak{i}^i-4\mathfrak{v}^i=0$, Schrödinger señalaba al respecto que «sería totalmente ridículo tener las divergencias de dos campos físicos fundamentales iguales entre sí». Como se debe de cumplir el segundo conjunto de ecuaciones de Maxwell

$$D_k^*\bar{\mathfrak{v}}^{ik}=0 \tag{14}$$

se podría tomar

$$\bar{\mathfrak{v}}^{ik}=\mathfrak{v}^{ik}-\frac{1}{4}\mathfrak{f}^{ik}$$

entonces $a_{11}=1$, $a_{12}=1/4$ y como el determinante tiene que ser la unidad entonces $a_{22}=1$. Por tanto las nuevas intensidades y sus adjuntas están relacionadas con las antiguas por

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ik}&=V_{ik}\,; & \bar{\phi}_{ik}&=\phi_{ik}+\frac{1}{4}V_{ik}\\ \bar{\mathfrak{v}}^{ik}&=\mathfrak{v}^{ik}-\frac{1}{4}\mathfrak{f}^{ik}\,; & \bar{\mathfrak{f}}^{ik}&=\mathfrak{f}^{ik}.\end{aligned} \tag{15}$$

Hemos identificado $\bar{V}_{ik}$ y $\bar{\mathfrak{v}}^{ik}$ con las intensidades electromagnéticas que cumplen las leyes de Maxwell *, por lo tanto $\mathfrak{f}^{ik}$ y ϕ_{ik} serán las intensidades de campo mesónico.

8.- La conexión en la aproximación lineal

De las ecuaciones (7), (9) y (10) se pueden obtener las componentes de la conexión en función de las intensidades $\mathfrak{g}^{ik}$, $\mathfrak{v}^{ik}$ y $\mathfrak{f}^{ik}$ y sus derivadas. A continuación vamos a hacer este cálculo pero en la aproximación lineal.

De (9) se sigue que $W_{st}^{\ \ k}$ es de primer orden respecto a $\mathfrak{f}^{it}$, por tanto en (7) pueden despreciarse los términos $\mathfrak{f}^{it}W_{st}^{\ \ k}$ y $\mathfrak{f}^{kt}W_{st}^{\ \ i}$ ya que son de segundo orden. Si además tenemos en cuenta que por (10)

$$\frac{1}{3}\mathfrak{i}^k-\frac{2}{3}\mathfrak{r}^k=\frac{1}{6}\mathfrak{i}^k$$

entonces (7) se simplifica a la expresión

$$D_s^*\mathfrak{g}^{ik}=\delta_s^i\left(\mathfrak{g}^{rk}V_r-\frac{1}{6}\mathfrak{i}^k\right)+\delta_s^k\left(\mathfrak{g}^{ri}V_r-\frac{1}{6}\mathfrak{i}^i\right)-3\mathfrak{g}^{ik}V_s \tag{16}$$

de donde podemos deducir las componentes de la parte simétrica de la conexión. Para ello se tiene en cuenta que cuando existe una métrica simétrica, como es nuestro caso, la conexión se descompone según

$$\Gamma_{(ik)}^{\ \ \ \ r}=L_{ik}^{\ \ r}+X_{ik}^{\ \ p}$$

donde $L_{ik}^{\ \ r}$ son los símbolos de Christoffel y $X_{ik}^{\ \ p}$ es un tensor simétrico respecto a sus índices inferiores. Debemos de notar que la derivada covariante del tensor métrico, cuando se utiliza como conexión los símbolos de Christoffel, es nula por definición de estos símbolos, entonces la derivada covariante de la densidad del tensor métrico es

$$D_s^*\mathfrak{g}^{ik}=D_s^*\left(\sqrt{g}g^{ik}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ik}g^{pq}\left(-g_{pr}X_{qs}^{\ \ r}-g_{rq}X_{ps}^{\ \ r}\right)+\sqrt{g}\left(g^{rk}X_{rs}^{\ \ i}+g^{ir}X_{rs}^{\ \ k}\right) \tag{17}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$D_s^*\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{pq}D_s^*g_{pq},$$

simplificando (17) queda

$$D_s^*\mathfrak{g}^{ik}=\sqrt{g}\left(-g^{ik}X_{qs}^{\ \ q}+g^{rk}X_{rs}^{\ \ i}+g^{ir}X_{rs}^{\ \ k}\right)$$

---

* Las ecuaciones de Maxwell puestas en función del tensor de campo electromagnético F_{ik} son

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^r}+\frac{\partial F_{kr}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{ri}}{\partial x^k}=0;\qquad D_k^*\mathfrak{F}^{ik}=0,$$

por tanto se tiene que cumplir que $\bar{\mathfrak{v}}^{ik}=\sqrt{g}\bar{V}^{ik}$ si se quiere que (13) y (14) sean las ecuaciones de campo electromagnético, esto se consigue si la densidad lagrangiana del campo electromagnético es $\mathfrak{L}\propto\sqrt{g}\bar{V}^{ik}\bar{V}_{ik}$, puesto que entonces $\bar{\mathfrak{v}}^{ik}=\partial\mathfrak{L}/\partial\bar{V}_{ik}=\sqrt{g}\bar{V}^{ik}$.

multiplicando por $g_{kp}\,g_{im}$

$$g_{kp}g_{im}D_s^*\boldsymbol{g}^{ik}=\sqrt{g}\left(X_{psm}+X_{msp}-g_{mp}X_{qs}{}^{q}\right)$$

permutando los índices de la anterior expresión encontramos

$$\sqrt{g}\left(X_{psm}+X_{msp}-g_{mp}X_{qs}{}^{q}\right)=g_{kp}\,g_{im}D_s^*\boldsymbol{g}^{ik}$$
$$\sqrt{g}\left(X_{mps}+X_{spm}-g_{sm}X_{qp}{}^{q}\right)=g_{km}\,g_{is}D_p^*\boldsymbol{g}^{ik}$$
$$\sqrt{g}\left(X_{smp}+X_{pms}-g_{ps}X_{qm}{}^{q}\right)=g_{ks}\,g_{ip}D_m^*\boldsymbol{g}^{ik}$$

sumando la primera con la tercera y restándole la segunda obtenemos

$$\sqrt{g}\left(2X_{msp}-g_{mp}X_{qs}{}^{q}-g_{ps}X_{qm}{}^{q}+g_{sm}X_{qp}{}^{q}\right)=g_{kp}\,g_{im}D_s^*\boldsymbol{g}^{ik}+g_{ks}\,g_{ip}D_m^*\boldsymbol{g}^{ik}-g_{km}\,g_{is}D_p^*\boldsymbol{g}^{ik} \quad (18)$$

donde hemos considerado el carácter simetrico de $X_{ik}{}^{p}$ y de g_{ik}. Ahora multiplicando la anterior expresión por g^{pn} queda

$$\sqrt{g}\left(2X_{ms}{}^{n}-\delta_m^nX_{qs}{}^{q}-\delta_s^nX_{qn}{}^{q}+g^{pn}g_{sm}X_{qp}{}^{q}\right)=\delta_k^n g_{im}D_s^*\boldsymbol{g}^{ik}+\delta_i^n g_{ks}D_m^*\boldsymbol{g}^{ik}-g^{pn}g_{km}\,g_{is}D_p^*\boldsymbol{g}^{ik}$$

contrayendo respecto a los índices *n, s*

$$\sqrt{g}X_{ms}{}^{s}=-\frac{1}{2}g_{ik}D_m^*\boldsymbol{g}^{ik}$$

que al sustituir en (18) da

$$2\sqrt{g}X_{msp}=\left(g_{kp}\,g_{im}-\frac{1}{2}g_{ik}g_{mp}\right)D_s^*\boldsymbol{g}^{ik}+\left(g_{ks}\,g_{ip}-\frac{1}{2}g_{ps}g_{ik}\right)D_m^*\boldsymbol{g}^{ik}-\left(g_{km}\,g_{is}-\frac{1}{2}g_{sm}g_{ik}\right)D_p^*\boldsymbol{g}^{ik}.$$

A continuación sustituimos (16) en la expresión anterior

$$X_{msp}=-\frac{1}{4}g_{ms}i_p+g_{ps}\left(V_m+\frac{1}{12}i_m\right)+g_{mp}\left(V_s+\frac{1}{12}i_s\right)$$

y finalmente encontramos que la parte simétrica de la conexión es

$$\Gamma_{(ms)}{}^{n}=L_{ms}{}^{n}-\frac{1}{4}g_{ms}i^n+\delta_s^n\left(V_m+\frac{1}{12}i_m\right)+\delta_m^n\left(V_s+\frac{1}{12}i_s\right) \quad (19)$$

expresión válida en la aproximación lineal.

El siguiente paso es obtener $W_{ik}{}^{p}$ para ello sustituimos (19) en (9) y seguimos en la aproximación lineal. Primeramente vamos a calcular

$$D_s^*\boldsymbol{f}^{ik}=D_s^*\left(\sqrt{g}f^{ik}\right)=D_s^*\sqrt{g}f^{ik}+\sqrt{g}D_s^*f^{ik}=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{pq}f^{ik}D_s^*g_{pq}+\sqrt{g}D_s^*f^{ik}$$

igual que hemos hecho en el epígrafe anterior, descomponemos la conexión y la expresión anterior quedando

$$D_s^*\boldsymbol{f}^{ik}=D_s^*\left(\sqrt{g}f^{ik}\right)=D_s^*\sqrt{g}f^{ik}+\sqrt{g}D_s^*f^{ik}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{pq}f^{ik}\left(-g_{pr}X_{qs}{}^{r}-g_{rq}X_{ps}{}^{r}\right)+\sqrt{g}\left(\bar{D}_sf^{ik}+f^{rk}X_{rs}{}^{i}+f^{ir}X_{rs}{}^{k}\right)$$

donde $\bar{D}$ representa la derivada covariante calculada respecto a los símbolos de Christoffel. Como estamos en la aproximación lineal los términos del tipo $i\cdot f$ no los consideramos por ser de segundo orden, entonces de (19) tenemos

$$\Gamma_{(ms)}{}^{n}\approx L_{ms}{}^{n}+\delta_s^nV_m+\delta_m^nV_s$$

en esta aproximación

$$D_s^*\boldsymbol{f}^{ik}=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{pq}f^{ik}\left(-2g_{pq}V_s-g_{ps}V_q-g_{qs}V_p\right)+\sqrt{g}\left(\bar{D}_sf^{ik}+2f^{ik}V_s+\delta_s^if^{rk}V_r+\delta_s^kf^{ir}V_r\right)=$$
$$=-3\sqrt{g}f^{ik}V_s+\sqrt{g}\,\bar{D}_sf^{ik}+\sqrt{g}\,\delta_s^if^{rk}V_r+\sqrt{g}\,\delta_s^kf^{ir}V_r$$

insertando este resultado en (9)

$$\bar{D}_sf^{tk}-\frac{1}{3}\delta_s^ti^k+\frac{1}{3}\delta_s^ki^t+g^{rk}W_{rs}{}^{t}+g^{tr}W_{sr}{}^{k}=0$$

en donde observamos que ha desparecido la dependencia del vector V_q. Multiplicando la anterior expresión por $g_{tm}g_{kn}$ y teniendo en cuenta que $\bar{D}g_{ik}=0$ llegamos a

$$\bar{D}_s f_{mn} - \frac{1}{3} g_{sm} i_n + \frac{1}{3} g_{sn} i_m + W_{nsm} + W_{snm} = 0$$

y permutando los índices encontramos las tres ecuaciones

$$\bar{D}_s f_{mn} - \frac{1}{3} g_{sm} i_n + \frac{1}{3} g_{sn} i_m + W_{nsm} + W_{smn} = 0$$

$$\bar{D}_n f_{sm} - \frac{1}{3} g_{ns} i_m + \frac{1}{3} g_{nm} i_s + W_{mns} + W_{nsm} = 0$$

$$\bar{D}_m f_{ns} - \frac{1}{3} g_{mn} i_s + \frac{1}{3} g_{ms} i_n + W_{smn} + W_{mns} = 0$$

sumando la segunda con la tercera y restándole la primera queda

$$W_{mns} = -\frac{1}{2}\left(\bar{D}_n f_{sm} + \bar{D}_m f_{ns} - \bar{D}_s f_{mn}\right) - \frac{1}{3} g_{sm} i_n + \frac{1}{3} g_{sn} i_m$$

o bien en forma mixta

$$W_{mn}{}^{r} = -\frac{1}{2} g^{rs}\left(\bar{D}_n f_{sm} + \bar{D}_m f_{ns} - \bar{D}_s f_{mn}\right) - \frac{1}{3}\delta^r_m i_n + \frac{1}{3}\delta^r_n i_m \tag{20}$$

que conjuntamente con (19) son las expresiones íbamos buscando que nos relaciona las componentes de la conexión con las densidades tensoriales $\boldsymbol{f}^{kt}$ y $\boldsymbol{v}^{kt}$ y sus primeras derivadas.

9.- Las ecuaciones de campo mesónico en la aproximación lineal

Las ecuaciones del campo de mesones se deducen de (11) y (12)

$$\bar{\phi}_{ik} = -\frac{1}{4}\left[\frac{\partial \Gamma_{(sk)}{}^{s}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{(si)}{}^{s}}{\partial x^k}\right] + \frac{5}{4}\left(V_{k,i} - V_{i,k}\right) - D^*_s W_{ik}{}^{s} + 3V_s W_{ik}{}^{s} \tag{21}$$

a la que tenemos que añadir

$$D^*_t \boldsymbol{f}^{kt} = \boldsymbol{i}^k \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \boldsymbol{f}^{kt}}{\partial x^t} = \boldsymbol{i}^k .$$

Vamos a modificar la ecuación de campo (21) para el caso de la aproximación lineal. Para ello tenemos que de (19) se obtiene

$$\Gamma_{(ms)}{}^{m} = \frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^s} + \frac{1}{6} i_s + 5V_s \tag{22}$$

que conjuntamente con (20) se sustituye en (21). Para hacer este largo cálculo empezamos evaluando $D^*_s W_{ik}{}^{s}$ que aparece en (21)

$$D^*_s W_{ik}{}^{s} = \bar{D}_s W_{ik}{}^{s} + W_{ik}{}^{t} X_{ts}{}^{s} - W_{tk}{}^{s} X_{is}{}^{t} - W_{it}{}^{s} X_{ks}{}^{t}$$

como no tenemos en cuenta los términos $W \cdot i$ por de ser de segundo orden nos quedaría

$$X_{ms}{}^{n} \approx \delta^n_s V_m + \delta^n_m V_s$$

entonces

$$W_{ik}{}^{t} X_{ts}{}^{s} - W_{tk}{}^{s} X_{is}{}^{t} - W_{it}{}^{s} X_{ks}{}^{t} = 5V_t W_{ik}{}^{t} - W_{ik}{}^{t} V_t - W_{ik}{}^{t} V_t = 3W_{ik}{}^{t} V_t$$

donde hemos tenido en cuenta que $W_{tk}{}^{t} = 0$, encontramos por tanto

$$D^*_s W_{ik}{}^{s} = -\frac{1}{2} g^{st}\left(\bar{D}_s \bar{D}_k f_{ti} + \bar{D}_s \bar{D}_i f_{kt} - \bar{D}_s \bar{D}_t f_{ik}\right) + \frac{1}{3}\left(i_{i,k} - i_{k,i}\right) + 3V_t W_{ik}{}^{t} .$$

Llevando este resultado a (21) encontramos finalmente

$$\bar{\phi}_{ik} = -\frac{3}{8}\left(i_{k,i} - i_{i,k}\right) + \frac{1}{2} g^{st}\left(\bar{D}_s \bar{D}_k f_{ti} + \bar{D}_s \bar{D}_i f_{kt} - \bar{D}_s \bar{D}_t f_{ik}\right) \tag{23}$$

que corresponde a la ecuación de campo mesónico para el caso de campo débil donde será válida la aproximación lineal.

En su investigación Schrödinger notó el parecido de (23) con la ecuación de Proca que describe un campo másico de spin la unidad. Se puede percibir mejor esta similitud en el caso de ausencia de campo gravitatorio (en rigor estaríamos en el supuesto de que el campo gravitatorio es muy débil, puesto que la existencia de f^{ik} produce gravedad). Entonces eligiendo coordenadas cartesianas tendremos que los símbolos de Christoffel se anulan y el tensor métrico se reduce al tensor métrico de Minkowski, por tanto las derivadas covariantes $\bar{D}_k$ quedan sustituidas por derivadas parciales

$$\frac{1}{2}g^{st}\left(\bar{D}_s\bar{D}_k f_{ti}+\bar{D}_s\bar{D}_i f_{kt}\right)=\frac{1}{2}\bar{D}_s\bar{D}_k\left(f^s{}_i\right)f_{ti}-\frac{1}{2}\bar{D}_s\bar{D}_i\left(f^s{}_k\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial f^s{}_i}{\partial x^s}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f^s{}_k}{\partial x^s}\right)$$

esto significa que los sumandos anteriores los podemos unir con los del primer sumando de (23) de tal forma que si tenemos presente que para el caso de coordenadas cartesianas se cumple

$$\boldsymbol{i}^k=D_s^*\boldsymbol{f}^{ks}\;\Rightarrow\;\boldsymbol{i}^k=\frac{\partial\boldsymbol{f}^{ks}}{\partial x^s}\quad\Rightarrow\quad i^k=\frac{\partial f^{ks}}{\partial x^s}\quad\Rightarrow\quad i_k=\frac{\partial f_k^s}{\partial x^s}\quad\Rightarrow\quad i_k=-\frac{\partial f^s{}_k}{\partial x^s}$$

(23) nos queda

$$\bar{\phi}_{ik}=\frac{1}{8}\left(i_{k,i}-i_{i,k}\right)-\frac{1}{2}g^{st}\bar{D}_s\bar{D}_t f_{ik}=\frac{1}{8}\left(i_{k,i}-i_{i,k}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x^t\partial x_t}.$$

Si imponemos la condición gauge Lorentz $\partial i_k/\partial x_k=0$, entonces

$$\frac{\partial\bar{\phi}_{ik}}{\partial x_k}=-\frac{1}{8}\frac{\partial^2 i_i}{\partial x_k\partial x^k}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 i_i}{\partial x_t\partial x^t}=\frac{3}{8}\frac{\partial^2 i_i}{\partial x_k\partial x^k}$$

ahora bien, en la aproximación lineal que estamos considerando $\bar{\phi}_{ik}=\alpha f_{ik}$ donde α es una constante de proporcionalidad, entonces la ecuación del campo de mesones queda

$$\frac{\partial^2 i_i}{\partial x_k\partial x^k}+\frac{8\alpha}{3}i^i=0$$

que es exactamente la ecuación Proca en la gauge Lorentz y con $-8\alpha/3$ representando la masa al cuadrado del mesón.

En la investigación que analizamos, Schrödinger advertía que las intensas fuerzas nucleares que se darían a escalar nuclear haría que la ecuación de los mesones no se ajustara a la aproximación lineal, por lo que la identificación de sus ecuación mesónica con la de Proca la entendía como una prueba de control de su teoría unificada.

10.- Ecuaciones de campo gravitatorio

La ecuación de campo gravitatorio es la primera de las ecuaciones (11). Nos queda por investigar si de estas ecuaciones se obtienen las correspondientes a la Relatividad General. Desarrollándola se tiene

$$\gamma_{ik}=-\frac{\partial\Gamma_{(ik)}^{\;\;s}}{\partial x^s}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{(is)}^{\;\;s}}{\partial x^k}+\frac{\partial\Gamma_{(ks)}^{\;\;s}}{\partial x^i}\right)+\Gamma_{(is)}^{\;\;t}\Gamma_{(tk)}^{\;\;s}-\Gamma_{(ik)}^{\;\;t}\Gamma_{(ts)}^{\;\;s}-\frac{3}{2}D_k^*V_i-\frac{3}{2}D_i^*V_k-3V_iV_k+W_{is}{}^tW_{tk}{}^s$$

en donde sustituimos (22) y (19) que ahora ponemos en la forma

$$\Gamma_{(ms)}{}^n=L_{ms}{}^n-\frac{1}{4}g_{ms}i^n+\delta_s^n\left(V_m+\frac{1}{12}i_m\right)+\delta_m^n\left(V_s+\frac{1}{12}i_s\right)+\Theta_{ms}{}^n$$

donde $\Theta_{ms}{}^n$ es un tensor simétrico en el que se encuentran agrupados los términos que habíamos despreciado cuando hicimos la aproximación lineal. Para realizar este cálculo vamos a elegir un sistema localmente geodésico en el que $L_{ik}{}^s=0$ y por tanto son nulas las derivadas parciales del tensor métrico.

$$\gamma_{ik}=\bar{R}_{ik}-\bar{D}_s\Theta_{ik}{}^s+\frac{1}{2}\left(\bar{D}_k\Theta_{si}{}^s+\bar{D}_i\Theta_{sk}{}^s\right)+W_{is}{}^tW_{tk}{}^s+\frac{1}{24}i_i i_k \tag{24}$$

$\bar{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci calculado con los símbolos de Christoffel y como antes $\bar{D}$ es la derivada covariante utilizando para su cálculo $L_{ik}{}^s$; en el sistema localmente geodésico elegido coincide la derivada covariante $\bar{D}$ con la derivación parcial.

Multiplicando (24) por g^{ik} obtenemos la curvatura escalar $\bar{R}$ y entonces

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}\bar{R}=\gamma_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}g^{pq}\gamma_{pq}+\bar{D}_s\Theta_{ik}{}^s-\frac{1}{2}g_{ik}g^{pq}\bar{D}_s\Theta_{pq}{}^s-\frac{1}{2}\left(\bar{D}_k\Theta_{si}{}^s+\bar{D}_i\Theta_{sk}{}^s\right)+\\+\frac{1}{4}g_{ik}g^{pq}\left(\bar{D}_p\Theta_{sq}{}^s+\bar{D}_q\Theta_{sp}{}^s\right)-W_{is}{}^tW_{tk}{}^s+\frac{1}{2}g_{ik}g^{pq}W_{ps}{}^tW_{tq}{}^s-\frac{1}{24}\left(i_i i_k-\frac{1}{2}g_{ik}i_s i^s\right)\end{aligned} \tag{25}$$

Como $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left(\gamma_{ik},\bar{\phi}_{ik},\bar{V}_{ik}\right)$ entonces se cumple la propiedad (ver [33])

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \gamma_{ik}}\gamma_{iq}+\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \bar{\phi}_{ik}}\bar{\phi}_{iq}+\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \bar{V}_{ik}}\bar{V}_{iq}=\frac{1}{2}\delta_q^k\boldsymbol{L}$$

que en nuestro caso toma la forma

$$\boldsymbol{g}^{ik}\gamma_{iq}+\boldsymbol{f}^{ik}\bar{\phi}_{iq}+\boldsymbol{v}^{ik}\bar{V}_{iq}=\frac{1}{2}\delta_q^k\boldsymbol{L} \;\Rightarrow\; g^{ik}\gamma_{iq}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\delta_q^k\boldsymbol{L}-f^{ik}\bar{\phi}_{iq}-\bar{v}^{ik}\bar{V}_{iq} \tag{26}$$

de (26) también se deduce

$$\gamma_{ik}=\frac{1}{2\sqrt{g}}g_{ik}\boldsymbol{L}-g_{ni}f^{mn}\bar{\phi}_{mk}-g_{ni}\bar{v}^{mn}\bar{V}_{mk}\cdot(27)$$

Llevamos (26) y (27) a (25)

$$\bar{R}_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}\bar{R}=-\frac{1}{2\sqrt{g}}g_{ik}\boldsymbol{L}-g_{ni}f^{mn}\bar{\phi}_{mk}+\frac{1}{2}g_{ik}f^{pq}\bar{\phi}_{pq}-g_{ni}\bar{v}^{mn}\bar{V}_{mk}+\frac{1}{2}g_{ik}\bar{v}^{pq}\bar{V}_{pq}+Y_{ik} \tag{28}$$

siendo Y_{ik} un tensor dependientes solamente de las g y las f

$$Y_{ik}=-\frac{1}{24}\left(i_i i_k-\frac{1}{2}g_{ik}i_s i^s\right)-W_{is}^{\ t}W_{tk}^{\ s}+\frac{1}{2}g_{ik}g^{pq}W_{ps}^{\ t}W_{tq}^{\ s}+$$

$$+\bar{D}_s\Theta_{ik}^{\ s}-\frac{1}{2}g_{ik}g^{pq}\bar{D}_s\Theta_{pq}^{\ s}-\frac{1}{2}\left(\bar{D}_k\Theta_{si}^{\ s}+\bar{D}_i\Theta_{sk}^{\ s}\right)+\frac{1}{4}g_{ik}g^{pq}\left(\bar{D}_p\Theta_{sq}^{\ s}+\bar{D}_q\Theta_{sp}^{\ s}\right).$$

(28) es por tanto la ecuación de campo gravitatorio que se deduce de la teoría Schrödinger-III. En el caso de ausencia de campo electromagnético y mesónico se reduce a la correspondiente ecuación de la Relatividad General. Si por ejemplo $\boldsymbol{L}=\sqrt{g}\bar{R}$ entonces encontramos $\bar{R}_{ik}=0$. Si además existiera un término del tipo $\boldsymbol{L}=2\lambda\sqrt{g}$ nos encontraríamos con la ecuación $\bar{R}_{ik}+\lambda g_{ik}=0$ que corresponde a la Relatividad General con término cosmológico.

Notemos que tanto el campo electromagnético (que viene dado por $\bar{V}_{ik}$ o por su conjugada $\boldsymbol{v}^{ik}$) como el mesónico (cuya intensidad es $\bar{\phi}_{ik}$ o su conjugada $\boldsymbol{f}^{ik}$) son fuentes de campo gravitatorio.

11.- Conclusiones

La tercera de las teorías de campo unificado que Schrödinger desarrolló durante los años cuarenta del siglo pasado y que presentamos en este trabajo, parte de una conexión asimétrica. La densidad lagrangiana debe depender de la conexión y de sus derivadas primeras, lo que se consigue a través de dos tensores: el tensor de Ricci y la curvatura homotética . Si bien el tensor de Ricci se descompone en parte simétrica ($R_{(ik)}$) y antisimétrica ($R_{[ik]}$) la curvatura homotética (V_{ik}) es antisimétrica. Esto significa que tenemos tres conjuntos de intensidades de campo (en el sentido que se derivan por diferenciación de los potenciales que son las componentes de la conexión) que nos sriven para describir tres campos: uno tensorial y dos vectoriales.

Al igual que en investigaciones anteriores. Schrödinger obtiene un conjunto de relaciones auxiliares sin necesidad de conocer explícitamente la densidad lagrangiana, sólo requiere conocer su dependencia funcional. Estas relaciones auxiliares son las que relacionan a la conexión con las intensidades de campo $\boldsymbol{g}^{ik}$, $\boldsymbol{f}^{ik}$ y $\boldsymbol{v}^{ik}$ y sus derivadas primeras y no son las ecuaciones de campo, puesto que para obtener éstas es necesario conocer explícitamente la densidad lagrangiana.

Al igual que en los trabajos que precedieron al que ahora analizamos, Schrödinger utiliza dos conjuntos de intensidades de campos, adjuntas unas de otras, a saber los $\boldsymbol{g}^{ik}$, $\boldsymbol{f}^{ik}$ y $\boldsymbol{v}^{ik}$, y $\gamma_{ik}=R_{(ik)}$, $\phi_{ik}=R_{[ik]}$ y V_{ik} y que se relacionan entre sí a través de la densidad lagrangiana. En la teoría que hemos llamado Schrödinger-III no se establece ninguna densidad lagrangiana, lo que significa que no se dan las relaciones que ligan las intensidades primarias de campo (γ_{ik}, ϕ_{ik}, V_{ik}) con las intensidades secundarias ($\boldsymbol{g}^{ik}$, $\boldsymbol{f}^{ik}$, $\boldsymbol{v}^{ik}$).

Como hemos dicho, de esta teoría surgen dos intensidades de campo representados por tensores de segundo orden antisimétrico. Para Schrödinger no sólo el campo electromagnético sino también el campo de mesones vienen dados por tensores antisimétricos pero cualquier combinación lineal de estos campos antisimétricos, al ser también antisimétricos, podrían igualmente representar a los dos campos físicos. No obstante teniendo en cuenta que el campo electromagnético es un campo lineal que se ajusta a las ecuaciones de Maxwell, es posible encontrar una única combinación de tensores de intensidad de campo uno de ellos con las adecuadas características del campo electromagnético, lo que significa que el otro campo debe ser el mesónico.

Schrödinger expresa las ecuaciones de campo pero en función de los dos conjuntos de intensidades de campo, los primarios y los secundarios, puesto que a falta de una densidad lagrangiana específica es imposible relacionar ambos conjuntos de tensores.

De Schrödinger-III se deducen las habituales ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo así como las ecuaciones de la Relatividad General. Schrödinger analiza las ecuación de campo mesónico y obtiene las correspondientes ecuaciones en la aproximación de campo débil. Esta ecuación es idéntica a la de Proca que representa a un campo másico de spin 1.

En todo nuestro análisis aunque hemos seguido el trabajo de Schrödinger hemos hecho todos los cálculos explícitos, explicando detenidamente todo el razonamiento matemático, lo que está ausente en el trabajo original de Schrödinger.

Bibliografía

[1] Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea Publishing, 1975, pp. 213-240 y pp. 257-263.

[2] Einstein, Albert: «The Foundation of the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 111-164, (primeramente editado en 1916).

[3] Einstein, Albert: «Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 167-173, (primeramente editado en 1916).

[4] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 32-38.

[5] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 76–77.

[6] Einstein, A.: «Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur allegemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 137-140.

[7] Einstein, A.: «The Theory of the Affine Field», *Nature* **112** (1923) 448-449.

[8] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1925) 414-419, traducción al inglés con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity» por A. Unzicker and T. Case en www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.

[9] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories», *Living Reviews Relativity* **7** (2004) 1-153.s

[10] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories.Part II. (ca. 1930 – ca. 1965)», *Living Reviews Relativity* **17** (2014) 1-241.

[11] Hittmair, O.: «Schrödinger's Unified Field Theory Seen 40 Years Later», en *Schrödinger: Centenary Celebration of a Polymath*, Kilmister, C. W. (editor), Cambridge University Press, 1989, pp.165-175,

[12] Schrödinger, Erwin: «Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen», *Naturwissenschaften* **22-31** (1934) 518-520.

[13] Schrödinger, Erwin: "Contributions to Born's New Theory of the Electromagnetic Field", *Proceedings of the Royal Society of London A* **150** (1935). 465-477.

[14] Schrödinger, Erwin: «Sur la théorie du monde d'Eddington», *Il Nuovo Cimento* **15-4** (1938) 246-254.

[15] Schrödinger, Erwin: «The Point Charge in the Unitary Field Theory», *Procedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 225-235.

[16] Schrödinger, E.: «The General Unitary Theory of the Physical Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 43-58.

[17] Schrödinger, E.: «The Union of the three Fundamental Fields (Gravitation, Meson, Electromagnetism)», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 275-287.

[18] Schrödinger, E.: «The Affine Connexion in Physical Field Theories», *Nature* **153** (1944) 572-575.

[19] Schrödinger, Erwin: «On Distant Affine Connection», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **50** (1944/1945) 143-154.

[20]Schrödinger, E.: «The general affine field laws», *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A Mathematical and physical sciences* **51** (1946) 41-50.

[21] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws I», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 163-171.

[22] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws II», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1948) 205-216.

[23] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws III», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 1-9.

[24] Schrödinger, E.: «Studies in the Non-Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A,* 1951, vol. 6.
[25] Schrödinger, E.; Hittmair, O.: «Studies in the Non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation II: The Velocity of Light», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A*, 1951, vol. 8.
[26] Schrödinger, Erwin y Papapetrou A.: «The Point-Charge in the Non-symmetric Field Theory», *Nature* **168** (1951) 40-41.
[27] Schrödinger, E.: «Unitary Field Theory: Conservation Identities and Relation to Weyl and Eddington», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 237-244.
[28] Schrödinger, E.: «The Relation betwenn metrica and affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1945-1948) 147-150.
[29] Schrödinger, E.: «On the differential identities of an affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **54** (1951-1952) 79-85.
[30] Schrödinger, Erwin: «Electric Charge and Current Engendered by Combined Maxwell-Einstein Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A* **56** (1953/1954) 13-21.
[31] Schrödinger, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 106-119, (primera edición del año 1950).
[32] Segura González, Wenceslao: *Teoría de campo relativista*, eWT Ediciones, 2014.
[33] Segura González, Wenceslao: «Teoría general de la conexión afín», 2014, http://vixra.org/abs/1410.0160.
[34] Tonnelat, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 266-273.
[35] Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories in the first third of the 20th century*, Birkhäuser, 1994, pp. 137-149, 188-197.
[36] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0064.
[37] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (II)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0143.