

# Análise Termodinâmica da interacção de uma massa com uma atmosfera

Rodrigo de Abreu  
Departamento de Física do IST

## Resumo

Considera-se uma massa imersa numa atmosfera, infinita, constituída por um gás ideal clássico na presença de um campo gravitacional constante. A massa desloca-se de uma altura inicial em que está em repouso, até uma altura final de equilíbrio.

Determina-se a variação de entropia da atmosfera devida ao movimento da massa entre a altura inicial e final, por dois métodos: através das relações que resultam de se considerar que a energia da atmosfera é função da altura em que se encontra a massa e da entropia, e através da estatística de Maxwell-Boltzmann. A variação de entropia é calculada na transformação irreversível resultante da variação de posição da massa. A interpretação do cálculo da variação de entropia através da estatística de Maxwell-Boltzmann é comparada com o cálculo feito através do outro método. Mostra-se a consistência das duas análises e interpreta-se fisicamente.

Considera-se, como caso particular, uma parte da atmosfera confinada a um cilindro provido de um êmbolo. A analogia entre este modelo e o considerado anteriormente permite ilustrar, através de um modelo concreto, o tratamento unificado da interacção entre sub-sistemas em transformações irreversíveis, origem de uma controvérsia bem conhecida.

## Introdução

Uma massa  $M$ , com a forma de um paralelepípedo, encontra-se imersa numa atmosfera constituída por um gás ideal clássico [1], submetido à acção de um campo gravitacional de aceleração constante, de módulo  $g$  (fig.1):

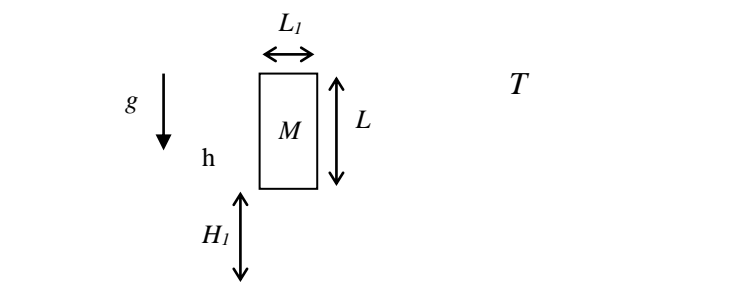


FIG. 1

Um paralelepípedo de massa  $M$  encontra-se à altura  $H_1$ , imerso num gás na presença da aceleração  $g$  da gravidade à temperatura  $T$ .

A aceleração da gravidade actua sobre a massa  $M$  e sobre as partículas do gás que envolve a massa  $M$ . Pelo facto das partículas serem actuadas pela gravidade a densidade do gás decresce com a altura [2]. Deste modo a impulsão a que fica sujeita a massa  $M$  depende da altura. Se a impulsão inicial for diferente do peso o paralelepípedo irá deslocar-se até uma altura em que se verifique o equilíbrio. Em I. calcula-se esta altura de equilíbrio. Admitindo que a energia da atmosfera é função das variáveis de deformação que para um paralelepípedo indeformável se reduz a uma, a cota  $z$ , e da entropia  $S$  [3], calcula-se a variação de entropia da atmosfera devida à deslocação da massa  $M$  entre a posição inicial e final. Este cálculo é feito directamente na transformação irreversível. A variação de entropia resulta do afastamento da força dinâmica da força estática que actua sobre a massa  $M$  [4]. Neste caso a variação de energia do gás que constitui a atmosfera contém um termo potencial e não se reduz apenas à variação de energia cinética como é o caso sem campo gravitacional [5]. Nesta situação não há paredes a separar sub-sistemas – a situação considerada afasta-se do modelo trivial de um cilindro contendo um gás em contacto com uma fonte de calor. Em II. calcula-se a variação de entropia através do formalismo da estatística de Maxwell-Boltzmann. Associa-se o formalismo estatístico com o formalismo macroscópico através da ideia de que a variação de entropia resulta da variação do numero de microestados no espaço de fase. Em I. o cálculo da variação de entropia é formalmente simples. O cálculo em II. mostra que embora não existindo variação de volume, dado se estar a admitir que a geometria do paralelepípedo não varia (admite-se que o paralelepípedo é indeformável) existe, no entanto, variação de uma grandeza designada volume efectivo [5], que descreve a variação de entropia no espaço de posições pelo facto de existir campo gravitacional. A variação de entropia associada à energia contém neste caso um termo ligado à energia potencial. Em III. introduzem-se paredes no modelo considerado em I. e mostra-se como é possível calcular a variação de entropia da atmosfera, na transformação irreversível, de forma equivalente à da 1ª análise. Também neste caso a atmosfera não pode ser considerada como fonte de calor, a interação entre os sub-sistemas faz-se através de uma parede móvel. Pedagogicamente o modelo tem interesse porque ilustra o cálculo da variação de entropia de um Sistema, de que decorre o cálculo da variação de entropia de sub-sistemas e estabelece, num modelo concreto, que permite interpretação física, uma ligação entre o formalismo macroscópico e estatístico.

### **I. A abordagem macroscópica**

Consideremos uma massa  $M$  com uma forma de um paralelepípedo de altura  $L$ , cuja base tem área  $A$  de acordo com a fig. 1. A energia da atmosfera é  $U$  e a temperatura  $T$ . A aceleração da gravidade é constante em módulo direcção e sentido. A atmosfera considerada infinita (fisicamente grande) tem à cota zero uma pressão  $p(0)$ . O paralelepípedo encontra-se na posição inicial definida por  $H_1$ , altura a que se encontra a sua base inferior. Dado que a diferença de forças devida à variação da pressão com a altura  $z$  é (Princípio de Arquimedes)

$$A dp = -dm_g g \quad (1)$$

em que  $A$  é a área da base do paralelepípedo,  $p$  a pressão á cota  $z$ ,  $dm_g$  a massa da atmosfera correspondente ao volume  $A dz$  [2]. De (1) temos

$$[p(z+dz) - p(z)]A = -n(z)mgAdz \quad (2)$$

em que  $n(z)$  é a densidade de partículas do gás á cota  $z$ , e  $m$  é a massa de cada partícula do gás. De (2) tendo em atenção que ( $k$  é a constante de Boltzmann),

$$p(z) = n(z)kT \quad (3)$$

$$\frac{dp}{p} = -\beta mgdz \quad (4)$$

em que  $\beta = 1/KT$ . Integrando temos

$$p(z) = p(0)e^{-\beta mgz} \quad (5)$$

A força que se exerce sobre o paralelepípedo, quando este está em repouso, devida à atmosfera é, de (5)

$$[p(z+L) - p(z)]A = -p(0)e^{-\beta mgz}(1 - e^{-\beta mgL})A. \quad (6)$$

A altura final de equilíbrio obtem-se igualando (6) a  $Mg$ . Esta altura depende de  $M$  e de  $T$ . Pode medir-se  $T$  se se conhecer  $M$  e a altura de equilíbrio [6].

Consideremos que  $U$ , a energia da atmosfera, é função de  $z$  e de  $S$ . De facto a energia da atmosfera tem de ser função de  $S$  dado que quando o paralelepípedo regressa a uma altura inicial a variação de energia da atmosfera é maior ou igual a zero [3]. Assim sendo, de  $U=U(z,S)$ , temos, diferenciando,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_S dz + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_z dS. \quad (7)$$

Se  $dS=0$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_S dz = [p(z+L) - p(z)]Adz \quad (8)$$

ou seja

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_S = [p(z+L) - p(z)]A. \quad (9)$$

Como [7]

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_z = T \quad (10)$$

temos que

$$dU = [p(z+L) - p(z)]Adz + TdS \quad (11)$$

ou, de (6),

$$dU = p(0)e^{-\beta mgz}(1 - e^{-\beta mgL})Adz + TdS. \quad (12)$$

Se na altura inicial,  $H_1$ , a impulsão da atmosfera não for igual ao peso do paralelepípedo, este deslocar-se-á para uma altura  $H_2$ , de equilíbrio. Do princípio de conservação de energia, temos

$$\Delta E_{pot} + \Delta U = 0 \quad (13)$$

em que  $\Delta E_{pot}$  é a variação de energia potencial gravítica da massa  $M$ . Temos portanto,

$$\Delta U = -\Delta E_{pot} = -Mg(H_2 - H_1). \quad (14)$$

A variação de entropia da atmosfera pode agora ser calculada. De (12) temos

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p(0)}{T}e^{-\beta mgz}(1 - e^{-\beta mgL})Adz. \quad (15)$$

Integrando entre  $H_1$  e  $H_2$ , obtemos

$$\Delta S = \frac{\Delta U}{T} + \frac{p(0)}{T}(1 - e^{-\beta mgL})A(e^{-\beta mgH_2} - e^{-\beta mgH_1})\left(-\frac{1}{\beta mg}\right). \quad (16)$$

Substituindo (14) em (16) temos

$$\Delta S = \frac{-Mg(H_2 - H_1)}{T} + \frac{p(0)}{T}(1 - e^{-\beta mgL})A(e^{-\beta mgH_2} - e^{-\beta mgH_1})\left(-\frac{1}{\beta mg}\right). \quad (17)$$

Seguidamente vamos obter (17) através da estatística de Maxwell-Boltzmann.

## II. A abordagem estatística

Consideremos a estatística de Maxwell-Boltzmann (E.M.B.) definida pelo numero de ocupação médio de uma microcélula  $i$  [8],

$$\bar{N}_i = e^{-\alpha} e^{-\beta u_i} \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad (19)$$

em que (como iremos demonstrar em (43))

e

$$u_i = mgz_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = u_{pot_i} + u_{cin_i} \quad (20)$$

$\alpha$  é determinado pela condição

$$\sum_i \bar{N}_i = N$$

em que  $N$  é o numero total de partículas da atmosfera.

O numero de microcélulas de volume  $h^3$  ( $h$  é a constante de Planck) existente numa macrocélula do espaço de fase de volume

$$d^6V = dx dy dz dp_x dp_y dp_z \quad (21)$$

é

$$\frac{d^6V}{h^3}. \quad (22)$$

O numero de partículas existente numa macrocélula é

$$d^6N = \bar{N}_i \frac{d^6V}{h^3} \quad (23)$$

ou, de (18) e (20)

$$d^6N = e^{-\alpha} e^{-\beta mgz} e^{-\beta \frac{1}{2}mv^2} \frac{dx dy dz dv_x dv_y dv_z m^3}{h^3} \quad (24)$$

dado

$$p_{x,y,z} = mv_{x,y,z}. \quad (25)$$

Integrando em  $v_x, v_y, v_z$  e dado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

obtemos de (24)

$$d^3N = e^{-\alpha} e^{-\beta mgz} \frac{dx dy dz m^3}{h^3} \left(\frac{\pi}{\beta mg}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (27)$$

Integrando em  $x, y, z$  temos

$$N = \int d^3N = e^{-\alpha} \int e^{-\beta mgz} dx dy dz \frac{m^3}{h^3} \left(\frac{\pi}{\beta mg}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (28)$$

Temos, de (28),

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V_e} \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (29)$$

em que

$$V_e = \int e^{-\beta mgz} dx dy dz \quad (30)$$

é designado volume efectivo [5]. Substituindo (29) em (27), temos

$$d^3N = \frac{N}{V_e} e^{-\beta mgz} dx dy dz \quad (31)$$

ou

$$n(z) = \frac{d^3N}{dx dy dz} = \frac{N}{V_e} e^{-\beta mgz} \quad (32)$$

em que  $n(z)$  é o numero de partículas por unidade de volume à cota  $z$ . Obtivemos um resultado equivalente a (5) através da E.M.B..

A probabilidade termodinâmica de um macroestado [8], o numero de maneiras de colocar  $n_j$  partículas em  $g$  microcélulas da macrocélula  $j$ , se as partículas forem indescerníveis e não houver limitação de numero de partículas em cada microcélula ( $j=G/g$  dado  $G$  ser o numero total de microcélulas), é

$$W\{n_j\} = \sum_{j=1}^G \frac{(n_j + g - 1)!}{n_j!(g - 1)!}. \quad (33)$$

O logaritmo de  $W$  pode ser escrito na forma

$$\ln W = \sum_{i=1}^G (\bar{N}_i + 1) \ln(1 + \bar{N}_i) - \bar{N}_i \ln \bar{N}_i \quad (34)$$

Se  $N_i \ll 1$ , condição que irá permitir definir a estatística de Maxwell-Boltzmann,

$$\ln(1 + \bar{N}_i) \approx \bar{N}_i \quad (35)$$

e, nesta condição, de (34) temos

$$\ln W = \sum_{i=1}^G (\bar{N}_i - \bar{N}_i \ln \bar{N}_i). \quad (36)$$

A condição de equilíbrio pode obter-se maximizando  $W$ . Esta condição de equilíbrio define a estatística de Maxwell-Boltzmann. Esta maximização é condicionada por

$$\sum_{i=1}^G \bar{N}_i = N, \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^G \bar{N}_i u_i = U. \quad (38)$$

O numero de ocupação médio que maximiza  $W$  é (E.M.B.)

$$\bar{N}_i = e^{-\alpha} e^{-\beta u_i}. \quad (39)$$

Substituindo (39) em (36), tendo em atenção (37) e (38), otemos

$$\ln W = N(1 + \alpha) + \beta U. \quad (40)$$

Diferenciando (36) e tendo em atenção (39) obtemos

$$d \ln W = \beta \sum u_i d\bar{N}_i. \quad (41)$$

Diferenciando (38) e impondo a condição de que a variação de entropia é devida à variação de  $W$  temos, comparando com (11), que

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (42)$$

e

$$S = k \ln W \quad (43)$$

Deste modo de (40), temos

$$S = Nk(1 + \alpha) + k\beta U. \quad (44)$$

Calculemos de (44) a variação de entropia da atmosfera correspondente à deslocação do paralelepípedo de  $H_1$  para  $H_2$ .

Diferenciemos  $S$ .

De (44) temos

$$dS = Nkd\alpha + \beta kdU. \quad (45)$$

De (29)

$$d\alpha = \frac{dV_e}{V_e} \quad (46)$$

De (46) e (45)

$$dS = Nk \frac{dV_e}{V_e} + \beta kdU. \quad (47)$$

De (32) temos que

$$n(0) = \frac{N}{V_e} \quad (48)$$

e portanto, (47), pode escrever-se na forma

$$dS = \frac{p(0)}{T} dV_e + \frac{dU}{T}. \quad (49)$$



O volume efectivo obtem-se integrando para todo o espaço da atmosfera onde não está o paralelepípedo,

$$V_e = \int_0^{\infty} e^{-\beta mgz} dz A' + \int_0^Z e^{-\beta mgz} dz A + \int_{Z+L}^{\infty} e^{-\beta mgz} dz A \quad (50)$$

em que  $A'$  é a área não coberta na vertical pelo paralelepípedo de área de base  $A$ . Diferenciando  $V_e$  obtemos

$$dV_e = A e^{-\beta mgz} (e^{-\beta mgL} - 1) dz \quad (51)$$

Substituindo (51) em (49) obtem-se (15) e portanto (17). Obtivemos o resultado do 1º método, de I., através da E.M.B.

### III. O modelo da atmosfera em interacção com um êmbolo

Consideremos que onde inicialmente se encontrava o paralelepípedo,  $H_1$ , confinamos a parte inferior da atmosfera através de paredes (fig. 2). Este confinamento irá impedir que haja alteração do numero de moléculas na parte inferior da massa  $M$ . Quando o paralelepípedo (agora êmbolo) se deslocar, a pressão  $p_0$  na parte superior é a pressão da atmosfera que vamos admitir constante e igual a  $p(0)$ , dado neste caso a variação da altura da massa  $M$  não dar origem a alteração significativa da pressão estática sobre o êmbolo, que é aproximadamente a pressão à cota zero. Na parte inferior a pressão vai alterar-se, aumentando se o êmbolo descer. A temperatura final de equilíbrio é  $T_0$ , a temperatura da atmosfera. Do Princípio de Conservação de Energia temos

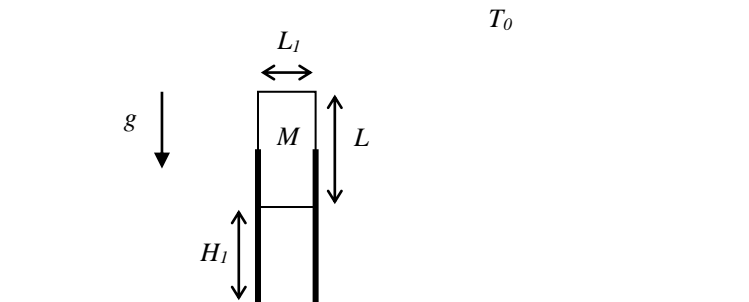


FIG. 2

Um paralelepípedo de massa  $M$  encontra-se à altura  $H_1$ , imerso num gás na presença da aceleração  $g$  da gravidade à temperatura  $T_0$ , mas agora a parte do gás existente na parte inferior do paralelepípedo está confinada por paredes.

$$-\Delta E_{pot} = -Mg(H_2 - H_1) = \Delta U + \Delta U_0 \quad (52)$$

em que  $U$  é a energia da parte da atmosfera que agora está confinada pelas paredes e  $U_0$  é a energia da atmosfera. Admitamos que ( $C_V = \text{const.}$ )

$$U = C_V T \quad (53)$$

Temos, de (52) e (53) e dado a temperatura no início e no fim ser  $T_0$

$$\Delta U_0 = -Mg(H_2 - H_1) \quad (54)$$

Dado a energia ser função da variável de deformação, neste caso o volume (dado estarmos a admitir que  $V_e$  é aproximadamente  $V$ ), e da entropia (distinguímos neste caso a atmosfera do outro sub-sistema, pelo índice zero)

$$dU_0 = -p_0 dV_0 + T_0 dS_0 \quad (55)$$

e

$$dU = -p dV + T dS \quad (20)$$

De (53), (54), (56) e (55) temos

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (57)$$

e

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta U_0}{T_0} + \frac{p_0 \Delta V_0}{T_0} = \frac{-Mg(H_2 - H_1)}{T_0} + \frac{p_0(H_2 - H_1)A}{T_0}. \quad (58)$$

O caso trivial de em vez da atmosfera se ter uma fonte de calor, calcula-se exactamente como anteriormente. Obtem-se, neste caso, para o gás, confinado no cilindro, a mesma variação de entropia (57) e a variação de entropia da fonte passa a ser

$$\Delta S_0 = \frac{\Delta U_0}{T_0} = \frac{-Mg(H_2 - H_1)}{T_0}. \quad (59)$$

dado não existir variação de volume da Fonte. Se não existir campo gravitacional, na interacção entre dois sub-sistemas através de uma parede móvel, em que um dos sub-sistemas é infinito [9], será o termo em  $\Delta U_0$  que se anulará. O caso de dois sub-sistemas finitos, em interacção através de uma parede móvel, tem sido tratado na literatura e deu origem a uma controvérsia bem conhecida [10].

#### IV. Interpretação

Durante a transformação irreversível associada à deslocação da massa  $M$  temos que as pressões que se exercem sobre as faces superior e inferior não são pressões de equilíbrio. São pressões dinâmicas [4]. Subindo a massa  $M$  com uma velocidade diferente de zero a pressão dinâmica na base superior é maior do que a pressão estática, pressão que se exerceria se o paralelepípedo estivesse em repouso à mesma altura  $z$ . Na base inferior a pressão dinâmica é inferior à pressão estática. Num intervalo  $dz$ , a diferença de pressões dinâmicas é

$$p'(z+L) - p'(z) \quad (60)$$

A componente da resultante das forças que actuam sobre o paralelepípedo é

$$F_z = -Mg + [p'(z+L) - p'(z)]A \quad (61)$$

O trabalho desta força é a variação de energia cinética do paralelepípedo.

$$F_z dz = dE_{cin}. \quad (62)$$

A conservação de energia permite escrever

$$dE_{cin} + dE_{pot} + dU = 0, \quad (63)$$

$$F_z dz + Mg dz + dU = 0. \quad (64)$$

Temos, portanto, substituindo (60) em (64)

$$dU = [p'(z+L) - p'(z)]Adz, \quad (65)$$

Mas

$$dU = [p(z+L) - p(z)]Adz + TdS, \quad (66)$$

Comparando (65) e (64) temos que

$$dS \geq 0. \quad (67)$$

A igualdade verifica-se para a transformação reversível.

Em ambos os métodos verifica-se (67). No 1º, (67) resulta da diferença entre a força estática e a dinâmica. No 2º resulta do aumento de  $W$ . O aumento neste caso resulta da

alteração do volume efectivo e da variação da energia. Não há alteração do volume da atmosfera dado considerarmos o paralelepípedo indeformável. Quando a massa  $M$  se desloca de  $H_1$  para  $H_2$  a parte da atmosfera que será ocupada pelo paralelepípedo (quando á altura  $H_2$ ) irá ocupar o volume complementar. Apenas em parte as moléculas que ocupavam o volume agora ocupado pelo paralelepípedo, irão para o volume inicialmente ocupado pelo paralelepípedo, quando se encontrava à altura  $H_1$ . Esta deslocação de posição das moléculas origina a parcela de variação de entropia correspondente à variação de  $V_e$ . A outra parcela de variação de entropia é a correspondente à variação de energia,  $U$ , soma das energias cinéticas e potencial das moléculas. O 1º método é de uma grande simplicidade formal. O 2º complementa a interpretação do 1º. A variação de entropia resulta da evolução da variável de deformação não ter compensação no espaço dos momenta, no 2º método; tal corresponde ao afastamento da força estática e dinâmica, no 1º método. Podemos afirmar de forma equivalente que a massa  $M$  se desloca por haver variação de entropia, por haver aumento do número de microestados.

## Conclusão

Analizou-se a interacção entre uma massa  $M$  e a atmosfera em que a massa está imersa. A atmosfera está à temperatura  $T$ , na presença de um campo gravitacional constante. Mostrou-se que dado a energia ser função da entropia e de uma variável de deformação, neste caso a cota  $z$  a que se encontra a massa  $M$ , que a deslocação espontânea da massa  $M$ , origina uma variação de entropia resultante da diferença entre a força estática e dinâmica, pelo facto da massa  $M$  se deslocar entre as duas alturas com uma velocidade finita. Mostrou-se que esta análise é consistente com a análise estatística feita pelo método de Boltzmann. O aumento de entropia resulta do aumento do numero de microestados. Este aumento de microestados faz-se neste caso sem aumento de volume no espaço das posições. A variação do numero de microestados resulta em parte da variação do volume efectivo, grandeza que contém a informação do campo gravitacional – o numero de microestados no espaço das posições depende da distribuição de particulas nas diversas microcélulas no espaço das posições e este numero altera-se à medida que a massa se desloca devido à existência do campo gravitacional. A outra parcela da variação do numero de microestados resulta da variação da energia, energia esta que neste caso contem um termo potencial. A soma destas variações é positiva ou nula no limite da transformação reversível. Confrontou-se esta análise, da deslocação da massa  $M$  na atmosfera, com a deslocação da massa  $M$ , em interacção simultânea com um gás confinado num cilindro provido de um êmbolo e com a atmosfera. Obtem-se como caso particular e trivial a variação de entropia de uma fonte de calor. A interacção entre sub-sistemas finitos, através de uma parede móvel, pode ser obtida pelo mesmo método.

## Referências

1. Landsberg, P. T. Am. J. Phys. 29, 695 (1961).

2. Feynman, R. Leighton, R. Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966) vol. I, 40-2.
3. Abreu Faro, M. Abreu, R. *Sobre um princípio de energia-entropia*, Acad. das Ciências de Lisboa, XXXI (1990).
4. Abreu Faro, M. Abreu, R. *A one-dimensional model of irreversibility*, EPS 10, Trends in Physics, 314, Sevilha (1996); Abreu Faro, M. Marçal, M. H. *Energia confinada em cavidade de parede móvel. Análise da evolução para o equilíbrio. Interpretação física*. Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, Classe de Ciências, Tomo XXXVIII (1998); Abreu, R. *Resolution of two entropy maximization controversies*, EPS 11 Trends in Physics, Abstracts, p. 66, London (1999); Abreu, R. *Análise dinâmica da tendência para o equilíbrio num modelo simples: a 2ª Lei de Newton  $f = ma$  e a Segunda Lei da Termodinâmica  $dS=0$* , submetido à Gazeta de Física.
5. Allis and Herlin, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (MacGraw-Hill, 1952) p. 170; Abreu, R. *Técnica 1*, 50 (1987).
6. Galileo Thermometers-<http://www.galileoshop.com/>
7. Lieb, E. H. And Yngvason, J. Notices of the AMS, May, 571 (1998).
8. Matos Ferreira, C. *Termodinâmica Geral Introdução à Mecânica Estatística* (AEIST, 1978) p.15.
9. Abreu, R. *Técnica 1*, 53 (1994).
10. Callen, H. *Thermodynamics*, John Wiley&Sons, New York, p. 321 (1960); Feynman, R. Leighton, R. Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, 39-6 (1976); Sivoukine, D. *Thermodynamique et Physique Moléculaire*, MIR, Moscovo, p. 200 (1982); Curzon, A. E. Am. J. Phys. 37, 404 (1969); Leff; H. S. Am. J. Phys. 38, 546 (1970); Curzon, A. E. Leff, H. S. Am. J. Phys. 47, 385 (1979); Abreu, R. *Técnica 1*, 43 (1990); Diversos autores, *Técnica 1* (1993); Abreu, R. Pinheiro, M. EPS 9 Trends in Physics, Abstracts T20, 133 Firenze (1993); Crawford, F. S. Am. J. Phys. 61, 120 (1993); Abreu, R. *Técnica 1*, 53 (1994); Leff, H. S. Am. J. Phys. 62, 120 (1994); Brogueira, P. Dias de Deus, J. *Gazeta de Física*, vol. 18, Fasc. 1, 19 (1995); Abreu, R. Relatório Interno CEL nº2-98 (1998); Güemez, J. Fiolhais, C. Fiolhais, M. *Fundamentos de Termodinâmica do Equilíbrio*, Fundação Calouste Gulbenkian, p. 318 (1998);