Teoría de campo puramente afín de Einstein

Purely affine field theory of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. Durante el año de 1923 Einstein escribió tres artículos en los que desarrolló la primera teoría de campo puramente afín con la que pretendía unificar los campos gravitatorio y electromagnético. La teoría no resultó satisfactoria, pero la investigación de Einstein, primero olvidada y luego recuperada en los años cuarenta por Schrödinger, aporta interesantes ideas que pueden servir para la construcción de una generalización de la teoría de la gravedad. En esta investigación analizamos la teoría de Einstein, detallando los cálculos ausentes en el trabajo original.

Abstract. During 1923 Einstein wrote three articles that developed the first purely affine field theory with which he tried to unify the gravitational and electromagnetic fields. The theory was not satisfactory, but research of Einstein, first forgotten and then recovered in the forties by Schrödinger, provides interesting ideas that may serve to construct a generalization of the theory of gravity. In this research we analyze Einstein's theory, detailing the missing calculations in the work original.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría de campo puramente afín de Einstein» fue publicada el día 4 de mayo de 2015

Teoría de campo puramente afín de Einstein

Purely affine field theory of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

1.- Introducción

Hace ahora exactamente un siglo Einstein y Hilbert obtuvieron las ecuaciones finales de la Relatividad General, una teoría gravitatoria que da sustancialidad al campo, al que identifica con el continuo espacio-tiempo. La gravedad es el resultado de la «curvatura» del espacio-tiempo que es producida por la masa de los cuerpos.

Nada más surgir la teoría general de la relatividad se intentó su generalización. Si la gravedad era explicada por la geometría del espacio-tiempo, lo mismo debería de ocurrir con el otro campo conocido en la época, el electromagnético. Además, la Relatividad General no es una pura teoría de campo, puesto que no es capaz de interpretar la materia, de tal forma que la teoría es mixta en el sentido de que la materia aparece como un elemento extraño al campo.

La primera generalización de la Relatividad General la realizó Hermann Weyl y su gran logro consistió en formular una teoría geométrica en la que la conexión no era lo mismo que los símbolos de Christoffel; o sea, la geometría no era de Riemann sino una más general. La teoría de Weyl reconocía la importancia de la conexión, que se situaba al mismo nivel que la métrica.

Poco tiempo después Eddington reconoció que es posible desarrollar una geometría cuyo principal elemento sea la conexión, mientras que la métrica aparece como una magnitud derivada. Sin embargo, Eddington no desarrolló plenamente la teoría física correspondiente, pero dejó los cimientos para que poco tiempo después Einstein desarrollara la primera teoría basada en la conexión, que ahora es llamada teoría de campo puramente afín.

En este artículo analizamos la investigación que realizó Einstein en el año 1923 a lo largo de tres trabajos, en la que desarrolló la primera teoría puramente afín de campo, que no logró unificar satisfactoriamente la gravedad y el electromagnetismo. Este proyecto de teoría puramente afín fue pronto abandonado, hasta dos décadas después en que Erwin Schrödinger recuperó la teoría de Einstein generalizándola a conexiones no simétricas.

2.- Generalidades sobre la teoría de campo puramente afín

La teoría de campo puramente afín establece que los únicos potenciales del campo son las componentes de la conexión $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$, de las que no se exige que sea simétrica, aunque en la teoría de Einstein así se toman.* La densidad lagrangiana $\boldsymbol{L}$ de la que se derivan las ecuaciones de campo depende tanto de las componentes de la conexión como de sus primeras derivadas puesto que queremos obtener ecuaciones de campo de segundo orden respecto a los potenciales

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left(\Gamma_{ik}^{\ \ r},\Gamma_{ik,s}^{\ \ r}\right), \tag{1}$$

donde representamos las densidades (escalares o tensoriales) por letras en negrita y las comas son derivadas parciales respecto a las coordenadas. Tenemos que indicar que una densidad escalar, tal como $\boldsymbol{L}$, es un escalar multiplicado por la raíz cuadrada del determinante de un tensor de segundo orden covariante. Es decir

* Para lo referente a la matemática empleada en este artículo nos remitimos a SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campo*, eWT, 2015, que se puede descargar gratuitamente en la dirección http://vixra.org/abs/1504.0085.

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{a}\, L \tag{2}$$

donde L es un escalar y a es el valor absoluto del determinante del tensor a_{ik}, que bien puede ser (pero no necesariamente debe ser) el tensor métrico. Con independencia de cual sea el tensor a_{ik}, la ley de transformación de (2) es siempre la misma.

El escalar L tiene que venir expresado en función de tensores (aunque excepcionalmente puede ser un escalar constante). Estos tensores a su vez deben depender de la conexión y su primera derivada. Ahora bien, el único tensor con esas características es el tensor de curvatura de Riemann $R^{s}{}_{ikr}$ y tensores de él derivado: tensor de Ricci R_{ik} y curvatura homotética V_{ik}.

Hoy otros tensores que pueden intervenir en el argumento de la densidad lagrangiana, aunque no gozan de la propiedad de depender de la derivada de la conexión, se trata del tensor de torsión $\tau_{ik}{}^{r} = 2\Gamma_{[ik]}{}^{r}$, del vector de torsión $\tau_{i} = \tau_{ik}{}^{k}$ y del tensor completamente antisimétrico $\Delta^{pqrs} = 1/\sqrt{a}\,\varepsilon^{pqrs}$ (siendo a el valor absoluto del determinante de un tensor covariante de segundo orden y ε^{pqrs} son los símbolos de Levi-Civita; nótese que suponemos espacio-tiempo tetradimensional).

Aunque de momento no se ha definido el tensor métrico que nos servirá para subir o bajar los índices, es posible derivar de un tensor de segundo orden otro con los índices invertidos. Por ejemplo, consideremos el tensor de Ricci R_{ik} que podemos suponer son los elementos de una matriz; entonces los elementos de la matriz inversa (que suponemos que existe) son R^{*ik} de tal forma que se cumple

$$R^{*ik} R_{kr} = \delta^{i}_{r}$$

como R_{kr} y δ^{i}_{r} son tensores, así también lo será R^{*ik}.

Por lo dicho, concluimos que existen numerosas posibilidades de construir una densidad lagrangiana con los requerimientos exigidos por la teoría puramente afín. Por ejemplo, Einstein señaló como densidad lagrangiana

$$R^{s}{}_{ikr} R^{i}{}_{spq}\, \varepsilon^{krpq}, \tag{3}$$

hay que tener en cuenta que los símbolos de Levi-Civita representan una densidad tensorial ($\varepsilon^{pqrs} = \sqrt{a}\,\Delta^{pqrs}$) de tal forma que (3) es una densidad escalar.

La acción del campo es definida por la integral

$$I = \int \boldsymbol{L}\, d\Omega,$$

$d\Omega$ es el producto de las diferenciales de las coordenadas $d\Omega = dx^{0}dx^{1}dx^{3}dx^{3}$. Para obtener las ecuaciones de campo se aplica el principio de mínima acción

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{L}\, d\Omega = 0 \tag{4}$$

variando arbitrariamente las componentes de la conexión.

Si $G_{ik} = G_{ik}\left(\Gamma_{ik}{}^{r}, \Gamma_{ik,s}{}^{r}\right)$ es un argumento de la densidad lagrangiana, el tensor métrico se define pors

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}(G_{ik}, \ldots.)}{\partial G_{ik}}, \tag{5}$$

que será simétrico si lo es el tensor G_{ik}; naturalmente este tensor puede ser asimétrico, lo que no puede ser es antisimétrico, pues entonces así lo sería el tensor métrico, el cual debe tener una parte simétrica para poder construir el elemento de línea.

De (4) y (5) obtenemos dos conjuntos de ecuaciones de campo. De (4) hallamos las ecuaciones auxiliares que son unas ecuaciones que nos relacionan la conexión con el tensor métrico (y con otros tensores de campo si existieran, ver más adelante). Mientras que de (5) obtenemos las genuinas ecuaciones de campo y para poderlas resolver será necesario sustituir en ellas las ecuaciones deducidas de (4). En efecto, de (4) tenemos

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{L}(G_{ik}, \ldots) d\Omega = 0 = \int \delta \boldsymbol{L}(G_{ik}, \ldots) d\Omega = \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial G_{ik}} \delta G_{ik} + \ldots. \right) d\Omega = \int \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta G_{ik} + \ldots. \right) d\Omega,$$

δG_{ik} (y las restantes variaciones de los argumentos de la densidad lagrangiana si existieran) se pone en función de $\delta \Gamma_{ik}{}^{r}$ utilizando para ello el teorema de Gauss como veremos más adelante

$$\delta I = \int \boldsymbol{F}_{r}^{ik} \delta \Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega = 0$$

y como las $\delta \Gamma_{ik}{}^{r}$ son arbitrarias obtenemos

$$\boldsymbol{F}_{r}^{ik} = 0, \tag{6}$$

debemos advertir que en el caso de que la conexión sea simétrica, entonces $\boldsymbol{F}_{r}^{ik}$ se descompone en parte simétrica y antisimétrica, eliminándose esta parte cuando se multiplica por la variación de la conexión simétrica, de tal forma que se obtiene en vez de (6) la ecuación

$$\boldsymbol{F}_r^{(ik)} = 0$$

que son las ecuaciones auxiliares. Démonos cuenta que para obtener la ecuación (6) no se necesita conocer expresamente la forma de la densidad lagrangiana, sólo es necesario saber su dependencia funcional, es decir conocer los argumentos de los que depende. El número de ecuaciones auxiliares son 64 si la conexión es asimétrica y 40 si fuese simétrica.

La ecuación de campo se obtiene de aplicar (5), pero para ello es necesario conocer la forma de la densidad lagrangiana, no nos basta con conocer su dependencia funcional. Finalmente es necesario sustituir (6) en (5) al objeto de hacer desaparecer la conexión. El número de ecuaciones de campo que se obtengan va a depender de las propiedades de simetría de G_{ik}, 16 si es asimétrica y 10 si es simétrica.

Si la densidad lagrangiana tuviese más argumentos

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(G_{ik}, H_{ik}, \ldots)$$

entonces será posible obtener nuevas ecuaciones de campo

$$\boldsymbol{h}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial H^{ik}} \tag{7}$$

con las mismas propiedades generales que (5). En este caso la ecuación (6) relaciona la conexión con las distintas intensidades de campo $\boldsymbol{g}^{ik}$, $\boldsymbol{h}^{ik}$...

Si G_{ik} y H^{ik} son argumentos aceptables de la densidad lagrangiana, también lo serán sus combinaciones lineales

$$G'_{ik} = \alpha G_{ik} + \beta H_{ik}$$
$$H'_{ik} = \alpha' G_{ik} + \beta' H_{ik}$$

que deben ser linealmente independientes.

Naturalmente no hay ningún impedimento para que el argumento de la densidad lagrangiana sea un tensor de orden mayor que dos. Por ejemplo, si uno de los argumentos de $\boldsymbol{L}$ es K_{ikrs} entonces tendremos la ecuación de campo

$$\boldsymbol{k}^{ikrs} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial K_{ikrs}}$$

que corresponde a 256 ecuaciones, a no ser que haya alguna propiedad de simetría.

Se puede obtener la transformada de Legendre $\boldsymbol{L}^*$ de la densidad lagrangiana. Partimos de que la dependencia funcional de $\boldsymbol{L}$ es

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(G_{ik}, H_{ik}, \ldots.)$$

donde las intensidades de campo son definidas por (5) y (7), ahora queremos obtener la función

$$\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^*\left(\boldsymbol{g}^{ik}, \boldsymbol{h}^{ik}, \ldots.\right)$$

llamada transformada de Legendre de $\boldsymbol{L}$ y que es definida por

$$\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{g}^{ik} G_{ik} + \boldsymbol{h}^{ik} H_{ik} + \ldots - \boldsymbol{L},$$

al derivar queda

$$d\boldsymbol{L}^* = d\boldsymbol{g}^{ik} G_{ik} + \boldsymbol{g}^{ik} dG_{ik} + d\boldsymbol{h}^{ik} H_{ik} + \boldsymbol{h}^{ik} dH_{ik} + \ldots - \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial G_{ik}} dG_{ik} - \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial H_{ik}} dH_{ik} - \ldots.$$

por las definiciones (5) y (7)

$$d\boldsymbol{L}^* = d\boldsymbol{g}^{ik} G_{ik} + d\boldsymbol{h}^{ik} H_{ik} + \ldots$$

de donde se deduce que

$$G_{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}; \qquad H_{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{h}^{ik}}; \quad \ldots. \tag{8}$$

si bien, como hemos dicho, las ecuaciones de campo se derivan de (5) y (7), también es posible, y a veces más conveniente, partir de la transformada de Legendre de $\boldsymbol{L}$ y obtener las ecuaciones de campo a partir de (8). Hay que observar la similitud $\boldsymbol{L}^*$ con la función de Hamilton en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica.

Existe un cercano paralelismo entre la formulación puramente afín de campos y el formalismo lagrangiano para los campos clásicos. Por ejemplo, el campo gravitatorio newtoniano en el vacío se representa por la densidad lagrangiana

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$$

donde ϕ es el potencial gravitatorio. El vector intensidad de campo gravitatorio **G** se define por

$$\mathbf{G}=-\nabla\phi,$$

entonces encontramos la correspondencia de la conexión $\Gamma_{ik}{}^{r}$ con el potencial ϕ; el argumento tensorial G_{ik} es equivalente a $\nabla\phi$ y finalmente a $\boldsymbol{g}^{ik}$ le corresponde la intensidad de campo **G**.

3.- Las ecuaciones auxiliares en la teoría de Einstein

La teoría puramente afín que Einstein desarrolló a lo largo del año 1923, parte de una conexión simétrica, que no es idéntica a los símbolos de Christoffel como ocurre en la Relatividad General; en este sentido la teoría que examinamos es una generalización de la teoría general de la relatividad.

En general el tensor de Ricci tiene parte simétrica y antisimétrica

$$R_{ik}=R_{(ik)}+R_{[ik]}$$

donde el paréntesis redondo significa simetrización y el cuadrado antisimetrización. En su teoría Einstein pretende identificar la parte simétrica del tensor de Ricci con el tensor métrico, pero hay que observar que las dimensiones de ambas magnitudes son diferentes. Mientras que el tensor métrico tiene la unidad de longitud al cuadrado L^2, el tensor de Ricci es adimensional puesto que depende de la conexión y de sus derivadas y ambas son adimensionales. Para tener en cuenta esta diferencia de unidades se define

$$\lambda^2 R_{ik}=g_{ik}+\phi_{ik}$$

donde g_{ik} es simétrico y ϕ_{ik} antisimétrico. λ debe ser un gran número y tener la unidad de longitud. Lo de gran número se comprende porque a los campos gravitatorios (a excepción de los extremadamente intensos) les corresponde valores extremadamente pequeños del tensor de Ricci.

En su investigación Einstein pretende identificar g_{ik} con el campo gravitatorio puro y ϕ_{ik} con el electromagnético, de ahí sus carácter simétrico y antisimétrico. Entonces en un campo gravitatorio sin presencia del electromagnetismo se tendrá

$$\lambda^2 R_{ik}=g_{ik}$$

entonces $1/\lambda^2$ corresponde a la constante cosmológica.

En el razonamiento que vamos a seguir no vamos a tener en cuenta lo anterior, porque no es necesario hacer esa suposición y porque de la teoría puramente afín surge la constante cosmológica de manera natural como veremos más adelante.

Por definición el tensor de Ricci es

$$R_{ik}=R^{r}{}_{ikr}=\Gamma_{ir,k}^{\ \ r}-\Gamma_{ik,r}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}-\Gamma_{ik}{}^{t}\Gamma_{tr}{}^{r}$$

$R^{s}{}_{ikr}$ es la tensor de curvatura. Se deduce que cuando la conexión es simétrica las partes simétrica y antisimétrica del tensor de Ricci en función de la conexión y sus derivadas primeras son

$$\begin{aligned} R_{(ik)}&=\frac{1}{2}\Gamma_{ir,k}^{\ \ r}+\frac{1}{2}\Gamma_{ir,s}^{\ \ r}-\Gamma_{ik,\mathrm{r}}^{\ \ r}+\Gamma_{ir}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{r}-\Gamma_{ik}{}^{t}\Gamma_{tr}{}^{r}\\ R_{[ik]}&=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{ri,k}^{\ \ r}-\Gamma_{rk,i}^{\ \ r}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

En su primer trabajo de 1923 Einstein hace la suposición de que la densidad lagrangiana tiene como argumento el tensor de Ricci, que descompone en parte simétrica y antisimétrica, es decir

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)},R_{[ik]}\right\}$$

definiendo las intensidades de campo por las relaciones

$$\boldsymbol{g}^{ik}=\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}};\qquad \boldsymbol{f}^{ik}=\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}},$$

simétrico el primer campo y antisimétrico el segundo; es decir el primer campo tiene 10 componentes independientes y el segundo tiene 6. Por estos números cabe entender que el primer campo representa la gravedad y el segundo un campo vectorial, que Einstein trató de identificar con el campo electromagnético.

Aunque estamos considerando densidades tensoriales y escalares, no sabemos aún cuál es el determinante del tensor de segundo orden cuya raíz cuadrada nos sirve para definir las densidades, puesto que todavía no hemos definido la densidad lagrangiana.

El siguiente paso consiste en aplicar el principio de mínima acción

$$\delta I = \int \boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)}, R_{[ik]}\right\} d\Omega = 0,$$

desarrollando

$$\delta I = \int\left[\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}\delta R_{(ik)} + \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}\delta R_{[ik]}\right] d\Omega = \int\left[\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)} + \boldsymbol{f}^{ik}\delta R_{[ik]}\right] d\Omega = 0, \tag{10}$$

pero las variaciones de las partes simétrica y antisimétrica del tensor de Ricci no son arbitrarias, pues lo que se varían son las componentes de la conexión; es decir, es necesario poner esas variaciones en función de las variaciones de la conexión $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$. Esto se consigue con las llamadas identidades de Palatini que se deducen directamente de (9) al tener en cuenta que se puede permutar las derivadas respecto a las coordenadas y la variación δ

$$\begin{aligned} \delta R_{(ik)} &= \frac{1}{2} D_i\, \delta\Gamma_{kr}{}^{r} + \frac{1}{2} D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} - D_r\, \delta\Gamma_{ik}{}^{r} \\ \delta R_{[ik]} &= \frac{1}{2} D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} - \frac{1}{2} D_i\, \delta\Gamma_{kr}{}^{r} \end{aligned} \tag{11}$$

expresiones válidas si la conexión es simétrica, o sea, no hay torsión. Sustituyendo (11) en (10)

$$\delta I = \int\left[\boldsymbol{g}^{ik}\frac{1}{2}D_i\,\delta\Gamma_{kr}{}^{r} + \boldsymbol{g}^{ik}\frac{1}{2}D_k\,\delta\Gamma_{ir}{}^{r} - \boldsymbol{g}^{ik}D_r\,\delta\Gamma_{ik}{}^{r} + \boldsymbol{f}^{ik}\frac{1}{2}D_k\,\delta\Gamma_{ir}{}^{r} - \boldsymbol{f}^{ik}\frac{1}{2}D_i\,\delta\Gamma_{kr}{}^{r}\right] d\Omega = 0 \tag{12}$$

ahora hay que integrar por partes; por ejemplo para la primera de las integrales

$$\frac{1}{2}\int \boldsymbol{g}^{ik} D_i\,\delta\Gamma_{kr}{}^{r} d\Omega = \frac{1}{2}\int D_i\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}{}^{r}\right) d\Omega - \frac{1}{2}\int D_i\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}{}^{r} d\Omega$$

por aplicación del teorema de Gauss la primera integral del segundo miembro se transforma en una integral de superficie, como suponemos que las $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$, aunque arbitrarias, se anulan en el limite de integración, entonces se anula la integral de superficie.

Al hacer lo mismo con los restantes términos de (12) queda

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{1}{2}\int\left[-D_i\,\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}{}^{r} - D_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}{}^{r} + 2D_r\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{r} - D_k\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{ir}{}^{r} + D_i\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{kr}{}^{r}\right] d\Omega = \\ &= \frac{1}{2}\int\left[-\delta_r^k D_s\,\boldsymbol{g}^{si} - \delta_r^k D_s\boldsymbol{g}^{is} + 2D_r\boldsymbol{g}^{ik} - \delta_r^k D_s\boldsymbol{f}^{is} + \delta_r^i D_s\boldsymbol{f}^{sk}\right]\delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega = 0 \end{aligned}$$

ahora tenemos en cuenta que las $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$ son arbitrarias pero no todas independientes, puesto que la conexión es simétrica. Lo que hacemos es descomponer la expresión entre paréntesis en parte simétrica y antisimétrica, esta última se anula al mutiplicarla por $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$; como la anulación de la integral significa anulación del integrando y como las $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$ son arbitrarias deberá cumplirse

$$-\delta_r^k D_s\,\boldsymbol{g}^{si} - \delta_r^i D_s\,\boldsymbol{g}^{sk} + 2D_r\boldsymbol{g}^{ik} - \delta_r^k D_s\boldsymbol{f}^{is} - \delta_r^i D_s\boldsymbol{f}^{ks} = 0, \tag{13}$$

al contraer los índices *k* y *r*

$$D_s\boldsymbol{g}^{is} = -\frac{5}{3}\boldsymbol{i}^{i} \tag{14}$$

en el razonamiento hemos tenido en cuenta que $\boldsymbol{g}^{ik}$ es simétrico y hemos hecho la definición

$$\boldsymbol{i}^{i} = D_s\boldsymbol{f}^{is}.$$

Llevando el resultado (14) a (13) encontramos

$$D_r\boldsymbol{g}^{ik} + \frac{1}{3}\delta_r^k\boldsymbol{i}^{i} + \frac{1}{3}\delta_r^i\boldsymbol{i}^{k} = 0 \tag{15}$$

que son las ecuaciones auxiliares de la teoría de Einstein.

4.- La conexión afín en función de las intensidades de campo

Nos interesa conocer la expresión que nos de el valor de la conexión afín en función de $\boldsymbol{g}^{ik}$ y de $\boldsymbol{i}^{k}$ y que es deducible de (15). Para alcanzar este objetivo vamos a definir un nuevo tensor

$$s^{ik} = \frac{\boldsymbol{g}^{ik}}{\sqrt{s}} \tag{16}$$

donde el determinante s (que entendemos es un valor absoluto) es

$$s = \det\left[\boldsymbol{g}^{ik}\right]. \tag{17}$$

s^{ik} es un tensor de carácter contravariante y simétrico *, del que podemos derivar sus componentes covariantes

$$s^{ik} s_{ir} = \delta_r^k . \tag{18}$$

Entendiendo (16) como una expresión matricial, se encuentra que

$$\det\left(s^{ik}\right) = \frac{1}{s}$$

entonces de (17)

$$s = \det\left(s_{ik}\right).$$

Ahora tenemos a nuestra disposición un tensor de segundo orden covariante s_{ik} adecuado para que la raíz cuadrada de su determinante se pueda utilizar para construir las densidades tensoriales.

Como $\boldsymbol{i}^k$ es una densidad vectorial debe ser igual a un vector multiplicado por la raíz cuadrada del determinante de un tensor covariante de segundo orden, esta definición es independiente del determinante que se use. Entonces podemos poner

$$\boldsymbol{i}^k = \sqrt{s}\, i^k$$

que nos sirve de definición del vector i^k. Naturalmente si hubieramos utilizado otro determinante habríamos obtenido un vector i^k diferente. También utilizaremos s_{ik} para subir y bajar los índices. Con estas definiciones (15) la ponemos como

$$D_r \boldsymbol{s}^{ik} + \frac{1}{3}\delta_r^k \boldsymbol{i}^i + \frac{1}{3}\delta_r^i \boldsymbol{i}^k = 0 \tag{19}$$

donde todas las densidades están calculadas con $\sqrt{s}$.

La conexión la podemos descomponer como

$$\Gamma_{ik}{}^r = L^*_{ik}{}^r + X_{ik}{}^r$$

donde $L^*_{ik}{}^r$ son los símbolos de Christoffel respecto a s_{ik}, que es a su vez una conexión simétrica y $X_{ik}{}^r$ es un tensor simétrico por serlo la conexión. Advertimos que como s_{ik} es simétrico, por la definición de los símbolos de Christoffel encontramos que $D^*_r s_{ik} = 0$ donde D^* es la derivada covariante calculada respecto a $L^*_{ik}{}^r$, entonces de (19)

$$\begin{aligned} D_r\left(\sqrt{s}s^{ik}\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{s}s^{ik}s^{pq}\left(D^*_r s_{pq} - s_{pm}X_{qr}{}^m - s_{mq}X_{pr}{}^m\right) + \\ &+ \sqrt{s}\left(D^*_r s^{ik} + s^{mk}X_{mr}{}^i + s^{im}X_{mr}{}^k\right) = -\frac{1}{3}\left(\delta_r^k \boldsymbol{i}^i + \delta_r^i \boldsymbol{i}^k\right) \end{aligned} \tag{20}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$D_r s = s s^{pq} D_r s_{pq} .$$

(20) se simplifica

$$-s^{ik}X_{qr}{}^q + s^{qk}X_{qr}{}^i + s^{iq}X_{qr}{}^k = -\frac{1}{3}\left(\delta_r^k i^i + \delta_r^i i^k\right). \tag{21}$$

Multiplicando ambos miembros de (21) por $s_{kp}s_{im}$ y luego permutando los índices se encuentran las tres

---

* Si imponemos la condición de que (16) es válido en cualquier sistema de coordenadas, entonces bajo un cambio de coordenadas (16) se transforma según

$$s'^{ik} = \frac{\sqrt{b'}g'^{ik}}{\sqrt{s'}} = \frac{\frac{1}{|A|}\sqrt{b}A_p^i A_q^k g^{pq}}{\frac{1}{|A|}\sqrt{s}} = A_p^i A_q^k s^{pq}$$

lo que demuestra que s^{ik} es un tensor. $|A|$ es el determinante de la matriz de transformación $dx'^i = A_k^i dx^k$ y b es el determinante de un tensor b_{ik}, indefinido de momento, pero que nos sirve para calcular las densidades. La ley de transformación de s se deduce de (17) y g^{ik} es el tensor que define a la densidad tensorial $\boldsymbol{g}^{ik} = \sqrt{b}g^{ik}$

relaciones

$$X_{prm}+X_{mrp}-s_{mp}X_{qr}^{\ \ q}=-\frac{1}{3}\left(s_{rp}\,i_m+s_{rm}\,i_p\right)$$
$$X_{mpr}+X_{rpm}-s_{rm}X_{qp}^{\ \ q}=-\frac{1}{3}\left(s_{pm}\,i_r+s_{pr}\,i_m\right)$$
$$X_{rmp}+X_{pmr}-s_{pr}X_{qm}^{\ \ q}=-\frac{1}{3}\left(s_{mr}\,i_p+s_{mp}\,i_r\right)$$

nótese que estamos subiendo y bajando los índices con el tensor s_{ik}; sumando la primera de las anteriores ecuaciones con la tercera y restándole la segunda queda

$$2X_{mrp}-s_{mp}X_{qr}^{\ \ q}+s_{rm}X_{qp}^{\ \ q}-s_{pr}X_{qm}^{\ \ q}=-\frac{2}{3}s_{rm}\,i_p$$

donde hemos considerado el carácter simétrico de $X_{ik}^{\ \ r}$ respecto a los índices covariantes y la simetría de s_{ik}. El siguiente paso es multiplicar ambos miembros por s^{pn}

$$2X_{mr}^{\ \ n}-\delta^n_m X_{qr}^{\ \ q}+s^{pn}s_{rm}X_{qp}^{\ \ q}-\delta^n_r X_{qm}^{\ \ q}=-\frac{2}{3}s_{rm}\,i^n \tag{22}$$

al contraer n y r se encuentra

$$X_{mr}^{\ \ r}=i_m/3$$

que se sustituye en (22)

$$X_{mrp}=-\frac{1}{2}s_{rm}\,i_p+\frac{1}{6}s_{mp}i_r+\frac{1}{6}s_{pr}i_m$$

elevando el índice p y sumando el resultado a los símbolos de Christoffel encontramos la conexión afín que estábamos buscando

$$\Gamma_{mr}^{\ \ p}=\overset{*}{L}{}_{mr}^{\ \ p}-\frac{1}{2}s_{mr}\,i^p+\frac{1}{6}\delta^p_m\,i_r+\frac{1}{6}\delta^p_r\,i_m, \tag{23}$$

que se trata de 40 ecuaciones (tantas como componentes de la conexión simétrica) que permite obtener los valores de la conexión a partir de la densidad tensorial $\mathfrak{g}^{ik}$ y de la densidad vectorial $\mathfrak{i}^k$. Nótese que en total tenemos 40 funciones desconocidas de la conexión, 10 funciones correspondientes a las componentes independientes de $\mathfrak{g}^{ik}$ y 4 funciones de $\mathfrak{i}^k$. Para poder completar el sistema de ecuaciones necesitamos además de la (23) 14 ecuaciones más. Cuatro de estas corresponden a la restricción

$$\frac{\partial \mathfrak{i}^k}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(D_s\mathfrak{f}^{ks}\right)=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\partial_s\mathfrak{f}^{ks}\right)=0 \tag{24}$$

en cuya deducción hay que tener en cuenta que $\mathfrak{f}^{ik}$ es antisimétrico y que no existe torsión. Por lo tanto nos quedan por hallar otras 10 ecuaciones que se obtienen a partir de la densidad lagrangiana como vemos a continuación.

5.- Ecuación de campo para la densidad lagrangiana $\mathfrak{L}=2/\lambda\sqrt{|R|}$

En la investigación que hizo Einstein de la teoría puramente afín consideró varias densidades lagrangianas. La primera que tuvo en cuenta fue la que ya propusiera Eddington algunos años antes

$$\mathfrak{L}=\frac{2}{\lambda}\sqrt{|R|} \tag{25}$$

donde $|R|$ es el valor absoluto del determinante asociado al tensor de Ricci y λ una constante indeterminada *. En su trabajo original Einstein tomó en vez de λ la constante $1/\lambda^2$, diferencia que no es significativa.

Como hemos dicho anteriormente, de (25) obtenemos dos conjuntos de ecuaciones de campo

$$\mathfrak{g}^{ik}=\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{(ik)}};\qquad \mathfrak{f}^{ik}=\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{[ik]}},$$

como

* Naturalmente tanto $|R|$ como λ deben ser distintos de cero. Como veremos λ se identifica con la constante cosmológica, por tanto la formulación puramente afín exige que en las ecuaciones de campo gravitatorio aparezca un término cosmológico no nulo.

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}\frac{\partial R_{(ik)}}{\partial R_{ik}}+\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}\frac{\partial R_{[ik]}}{\partial R_{ik}}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}+\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}=\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{f}^{ik}=\boldsymbol{k}^{ik}$$

entonces de (25)

$$\boldsymbol{k}^{ik}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}=\frac{2}{\lambda}\frac{1}{2\sqrt{|R|}}\frac{\partial |R|}{\partial R_{ik}}=\frac{1}{\lambda}\frac{|R|}{\sqrt{|R|}}R^{*ki}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{|R|}\,R^{*ki} \tag{26}$$

donde hemos utilizado

$$\delta|R|=|R|\,R^{*ki}\delta R_{ik},$$

en el que R^{*ki} son los elementos de la matriz inversa de R_{ik}, es decir

$$R^{*ki}R_{ir}=\delta_r^k$$

Cabe preguntarse cuál es el tensor de segundo orden covariante cuya raíz cuadrada se utiliza para definir la densidad escalar de la lagrangiana en (25). Este tensor está indefinido, vamos a elegirlo arbitrariamente como R_{ik}/λ entonces la raíz cuadrada de su determinante, que define a las densidades, es $\sqrt{|R|/\lambda^2}$, elección que hacemos por razones que veremos más adelante.

Multipliquemos los dos miembros de (26) por $R_{ip}\,k_{rk}$

$$\lambda R_{ip}k_{rk}\boldsymbol{k}^{ik}=R_{ip}k_{rk}\sqrt{|R|}\,R^{*ki}$$

k_{rk} es definido por $k_{rk}k^{pk}=\delta_r^p$; entonces simplificando

$$\lambda\frac{1}{\lambda^2}R_{rp}\sqrt{|R|}=\sqrt{|R|}\,k_{rp}\quad\Rightarrow\quad R_{rp}=\lambda k_{rp}=\lambda\gamma_{rp}+\lambda\varphi_{rp}, \tag{27}$$

que son las ecuaciones de campo gravitatorio, siendo γ_{rp} simétrico y φ_{rp} antisimétrico. Démonos cuenta que γ_{rp} y φ_{rp} no son las componentes covariantes de g^{rp} y f^{rp}, aunque $k_{rp}=\gamma_{rp}+\varphi_{rp}$ son las componentes covariantes de $k^{rp}=g^{rp}+f^{rp}$. De (27) deducimos que

$$|R|=\lambda^4 k\quad\Rightarrow\quad\sqrt{k}=\frac{\sqrt{|R|}}{\lambda^2}$$

donde k es el valor absoluto del determinante del tensor k_{ik}. Ahora vemos el sentido de la elección realizada anteriormente, es decir que las densidades tensoriales las hemos definido utilizando $\sqrt{k}$. Entonces

$$\boldsymbol{g}^{ik}=\sqrt{k}g^{ik};\qquad \boldsymbol{f}^{ik}=\sqrt{k}f^{ik}.$$

(27) cabe descomponerla en dos ecuaciones

$$\begin{aligned}R_{(ik)}&=\lambda\gamma_{ik}\\ R_{[ik]}&=\lambda\varphi_{ik}.\end{aligned} \tag{28}$$

Si ahora sustituimos (23) en (9) las ecuaciones (28) quedan

$$\begin{aligned}\overset{*}{R}_{ik}+\frac{1}{6}i_i\,i_k&=\lambda\gamma_{ik}\\ \frac{1}{6}\left(i_{i,k}-i_{k,i}\right)&=\lambda\varphi_{ik}\end{aligned} \tag{29}$$

$\overset{*}{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci calculado con los símbolos de Christoffel $\overset{*}{L}{}_{ik}^{r}$ que a su vez se calculan a partir del tensor s_{ik}. Nótese que estamos utilizando los tensores s_{ik}, g^{ik}, f^{ik}, γ_{ik} y φ_{ik}, que se encuentran relacionados entre sí.

Si en vez de $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)},R_{[ik]}\right\}$ usamos su transformada de Legendre $\boldsymbol{L}^*=\boldsymbol{L}^*\left(\boldsymbol{g}^{ik},\boldsymbol{f}^{ik}\right)$, entonces encontramos

$$R_{(ik)}=\frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}=\lambda\gamma_{ik};\qquad R_{[ik]}=\frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{f}^{ik}}=\lambda\varphi_{ik}$$

y las relaciones inversas son

$$\boldsymbol{g}^{ik}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\gamma_{ik}};\qquad \boldsymbol{f}^{ik}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\varphi_{ik}},$$

por tanto γ_{ik} y φ_{ik} son los campos conjugados de $\boldsymbol{g}^{ik}$ y $\boldsymbol{f}^{ik}$.

Exponemos otra relación entre estas magnitudes. De la definición de k^{ik} y de k_{ik} se encuentra que

$$dk = kk^{ik} dk_{ik} = k\left[g^{ik} + f^{ik}\right]\left[d\gamma_{ik} + d\varphi_{ik}\right] = \\ = kg^{ik} d\gamma_{ik} + kf^{ik} d\varphi_{ik}$$

y entonces

$$g^{ik} = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial \gamma_{ik}}; \qquad f^{ik} = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial \varphi_{ik}}.$$

Se cumple la relación (ver apéndice)

$$\begin{aligned} g^{ik} &= \frac{\gamma}{k}\left[\gamma^{ik}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_{mr}\gamma^{mr}\right) - \varphi^{iq}\varphi^{kr}\gamma_{rq}\right] \\ f^{ik} &= \frac{\gamma}{k}\left[\varphi^{ik} + \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{8}\varepsilon^{mnpq}\varphi_{mn}\varphi_{pq}\right)\varepsilon^{ikpq}\varphi_{pq}\right]) \end{aligned} \tag{30}$$

con las definiciones

$$\gamma = \det(\gamma_{ik}); \quad k = \det(k_{ik}); \quad \varphi_{ik}\varphi^{ir} = \gamma_{ik}\gamma^{ir} = \delta_r^k.$$

Si φ_{ik} es pequeño (es decir sensiblemente menor que la unidad), entonces $\gamma_{ik} \gg \varphi_{ik}$ (puesto que γ_{ik} es del orden del tensor métrico por lo tanto de orden unidad); ahora bien por (30)

$$g^{ik} \approx \frac{\gamma}{k}\gamma^{ik}; \quad f^{ik} \approx \frac{\gamma}{k}\varphi^{ik},$$

entonces $g^{ik} \gg f^{ik}$ y por tanto $k \approx \gamma$, $f^{ik} \approx \varphi^{ik}$ y $g^{ik} \approx \gamma^{ik}$.

6.- Campo gravitatorio para la densidad lagrangiana $\boldsymbol{L} = 2/\lambda\sqrt{|\boldsymbol{R}|}$

(29) representan las ecuaciones de dos campos, uno de ellos simétrico, que suponemos representa el campo gravitatorio (y puede venir dado por g^{ik} o por γ_{ik}) y el otro es un campo antisimétrico (dado por f^{ik} o por φ_{ik}) que Einstein identificó con el campo electromagnético, aunque posteriores investigaciones lo toman como otro campo distinto. Tratamos de hallar las ecuaciones de la gravedad para el caso de que sólo exista campo gravitatorio, es decir vamos a suponer que f^{ik}, φ_{ik} e i^k son nulos, entonces

$$k^{ik} = k^{(ik)} = g^{ik}, \quad s^{ik} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{s}}g^{ik} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\det \boldsymbol{g}^{ik}}}g^{ik} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^2 \det g^{ik}}}g^{ik} = \frac{\sqrt{k}}{k/\sqrt{k}}g^{ik} = g^{ik}$$

y el campo gravitatorio viene descrito por el tensor $s_{ik} \equiv g_{ik} \equiv \gamma_{ik}$. La segunda ecuación (29) deja de existir y la primera de (29) es

$$R^*_{ik} = \lambda s_{ik}$$

que no es más que la ecuación de la Relatividad General en el vacío con el término cosmológico. De (23) se ve que la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel, entonces como cabía esperar el espacio es riemanniano.

7.- Campo electromagnético para la densidad lagrangiana $\boldsymbol{L} = 2/\lambda\sqrt{|\boldsymbol{R}|}$

En la teoría de Einstein las ecuaciones de campo electromagnético son la segunda de (29) y la que nos sirve de definición de $\boldsymbol{i}^k$, es decir son

$$\frac{1}{6}\left(i_{i,k} - i_{k,i}\right) = \lambda\varphi_{ik}; \qquad \boldsymbol{i}^k = D_s\boldsymbol{f}^{ks} = \partial_s\boldsymbol{f}^{ks} \tag{31}$$

como $\boldsymbol{f}^{ks}$ es antisimétrico y no hay torsión, la derivada covariante de $\boldsymbol{f}^{ks}$ coincide con su derivada parcial. De la primera ecuación (31) encontramos que

$$\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x^r} + \frac{\partial\varphi_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial\varphi_{ri}}{\partial x^k} = 0 \tag{32}$$

que es el segundo grupo de ecuaciones de Maxwell. (32) nos obliga a integreptar $i^k/6\lambda$ como el potencial electromagnético si queremos que φ_{ik} sea el tensor de campo. No obstante la segunda ecuación (31) hay que interpretarla como el primer grupo de ecuaciones de campo, con $-\varepsilon_0 i^k$ como la densidad de corriente (ε_0 es la constante dieléctrica del vacío) y entonces hay que identificar f^{ik} con el tensor de campo electromagnético en componentes contravariantes, o sea con φ^{ik}, lo que hemos visto que es cierto para el caso de campo electromagnético débil.

Un problema surge con esta interpretación. Si no existen fuentes de campo electromagnetico, entonces

$i_k = 0$ por tanto también será nulo el potencial; o sea, no existirá campo electromagnético, algo que se contradice con la experiencia ordinaria, donde es posible la existencia de campo electromagnético en el vacío. Einstein trató de eludir este problema en base a la pequeñez de la constante λ, ya que incluso para extremadamente pequeños valores de i^k el potencial $i^k/6\lambda$ tendría un valor apreciable y lo mismo ocurriría con φ_{ik}, es decir existiría en esta situación campo electromagnético, mientras que el primer grupo de ecuaciones de campo quedaría

$$\partial_s \boldsymbol{f}^{ks} \approx 0.$$

Entonces aunque estrictamente no es posible la existencia de campo electromagnético en el vacío, sí existiría con fuentes que fueran extremadamente débiles.

Otro problema surge con la identificación de las ecuaciones (31) y (32) con las del campo electromagnético: no son invariantes gauge. Si hacemos la transformación

$$i'_k = i_k + \frac{\partial \psi}{\partial x^k}$$

(ψ es una función cualquiera de las coordenadas), las ecuaciones deben permanecer inalteradas, tal como ocurre en la teoría de Maxwell. Pero si bien la función φ_{ik} es invariante, al igual que f^{ik}, la segunda ecuación (31) cambia cuando se hace la transformación gauge.

8.- Generalización de la teoría de Einstein

Como queda dicho, Einstein tomó en su primer trabajo sobre teoría puramente afín, una densidad lagrangiana con la dependencia funcional

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)}, R_{[ik]}\right\}$$

de donde se derivan dos intensidades de campo $\boldsymbol{g}^{ik}$ y $\boldsymbol{f}^{ik}$. Pero es posible obtener las ecuaciones de campo de la transformada de Legendre de $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^*\left(\boldsymbol{g}^{ik}, \boldsymbol{f}^{ik}\right)$$

entonces las ecuaciones de campo son

$$R_{(ik)} = \frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}; \qquad R_{[ik]} = \frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{f}^{ik}}. \tag{33}$$

Podemos abordar el problema definiendo una densidad $\boldsymbol{L}^*$ en vez de definir $\boldsymbol{L}$. Como no está definida la función $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{L}^*$ está indeterminada, con la única condición de ser una densidad con la debida dependencia funcional. Indiquemos que la ecuación (23) seguirá siendo válida en este planteamiento.

Einstein replanteó su inicial teoría puramente afín, hallando las ecuaciones de campo a partir del formalismo que acabamos de indicar. Para ello partió de la densidad lagrangiana

$$\boldsymbol{L}^* = 2\lambda\sqrt{g} - \frac{\beta}{2} f_{ik} \boldsymbol{f}^{ik} \tag{34}$$

α y β son constantes indeterminadas. g es el valor positivo del determiante de g_{ik} que se define por

$$g_{ik} g^{rk} = \delta_i^r$$

siendo g^{ik} a su vez definido por

$$g^{ik} = \frac{\boldsymbol{g}^{ik}}{\sqrt{\det\left(\boldsymbol{g}^{ik}\right)}}$$

por las dos últimas relaciones se encuentra que $\det\left(\boldsymbol{g}^{ik}\right) = g$, por tanto

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \sqrt{g}\, g^{ik},$$

es decir g_{ik} como lo definimos en este apartado coincide con s_{ik} definido anteriormente; añadamos que las densidades las calculamos a partir de $\sqrt{g}$. Aunque de partida la teoría es puramente afín, la densidad lagrangiana (34) ya no lo es, puesto que en ella aparecen las intensidades de campo; nos encontramos por tanto en una teoría métrico-afín, como lo muestran las ecuaciones (33) y la (23).

El plan de trabajo consiste en aplicar (33) utilizando (34) y obtener $R_{(ik)}$ y $R_{[ik]}$ y posteriormente aplicar estos resultados a las expresiones que resulta de sustituir (23) en (9). Para este cálculo vamos a necesitar los siguientes igualdades (ver apéndice)

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}=\frac{1}{2}g_{ik}$$
$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}g_{ik}\,g_{pq}-g_{pk}g_{iq}\right),$$

y tener en cuenta que f^{ik} no depende de $\boldsymbol{g}^{ik}$. Con esto en cuenta aplicamos la primera ecuación (33)

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}=2\lambda\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}-\frac{\beta}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}\left(\sqrt{g}g_{pr}g_{qs}f^{pq}f^{rs}\right)$$

donde los índices los subimos y los bajamos con el tensor g_{ik}. El cálculo nos da el resultado

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}=\lambda g_{ik}-\frac{3\beta}{4}g_{ik}f_{rs}f^{rs}+\beta f_{ks}f_i^{\ s},$$

o bien por (33)

$$R_{(ik)}=\lambda g_{ik}-\frac{3\beta}{4}g_{ik}f_{rs}f^{rs}+\beta f_{ks}f_i^{\ s},$$

pero al sustituir (23) en (9) tenemos

$$R_{(ik)}=R^*_{ik}+\frac{1}{6}i_i\,i_k$$

entonces

$$R^*_{ik}-\lambda g_{ik}=-\beta\left[\left(-f_{ks}f_i^{\ s}+\frac{3}{4}g_{ik}f_{rs}f^{rs}\right)+\frac{1}{6}i_i\,i_k\right], \qquad (35)$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci calculado con los símbolos de Christoffel que a su vez son calculados por g_{ik}. En (35) λ hay que entenderla como la constante cosmológica y el segundo miembro mide cómo el segundo campo (el de intensidad $\boldsymbol{f}^{ik}$) produce campo gravitatorio.

Ahora aplicamos la segunda ecuación (33) para obtener el otro conjunto de ecuaciones de campo. Nótese que

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{f}^{ik}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial f^{ik}}$$

entonces

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}^*}{\partial \boldsymbol{f}^{ik}}=-\beta f_{ik}.$$

De (23) y (9) se tiene

$$R_{[ik]}=\frac{1}{6}\left(i_{i,k}-i_{k,i}\right)$$

por tanto el segundo grupo de ecuaciones de campo es

$$-\beta f_{ik}=\frac{1}{6}\left(i_{i,k}-i_{k,i}\right), \qquad (36)$$

donde definimos

$$i^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s \boldsymbol{f}^{ks}=\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g}\,f^{ks}+\partial_s f^{ks}.$$

Notamos que el paréntesis de (36) es un vector con independencia de que la conexión sea o no simétrica, en efecto

$$i_{i,k}-i_{k,i}=D_k i_i-D_i\,i_k+\tau_{ik}^{\ \ s}i_s$$

siendo $\tau_{ik}^{\ \ s}=\Gamma_{ik}^{\ \ s}-\Gamma_{ki}^{\ \ s}$ el tensor de torsión, que en nuestro caso es nula. Hay que indicar que al igual que el campo antisimétrico (entendido por Einstein como el campo electromagnético) es fuente del campo gravitatorio; también el campo gravitatorio es fuente del campo antisimétrico.

Einstein completa su investigación sobre esta teoría obteniendo la densidad lagrangiana $\boldsymbol{L}$ que es definida por

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{(ik)} + \boldsymbol{f}^{ik} R_{[ik]} - \boldsymbol{L}^*$$

se encuentra

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{g}\left[R^* - 2\lambda - \frac{\beta}{2} f_{ik} f^{ik} + \frac{1}{6} i_k i^k\right]. \tag{37}$$

con la definición $R^* = g^{ik} R^*_{(ik)}$. En la densidad lagrangiana (37) reconocemos tres términos. Los dos primeros sumandos del paréntesis indudablemente es la lagrangiana correspondiente al campo gravitatorio; el tercer sumando es la lagrangiana del vacío de un campo vectorial y el último término nos informa que ese campo es másico, o sea, una vez más vemos que el campo antisimétrico que surge de la teoría de Einstein no puede ser el campo electromagnético.

Podemos replantear la ecuación (37). Definimos el tensor

$$F_{ik} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} f_{ik}$$

y el potencial ϕ_k por

$$\phi_k = \frac{1}{6\sqrt{2\beta}} i_k$$

y si definimos una nueva constante $\mu^2 = -\beta$ entonces (37) queda

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{g}\left[R^* - 2\lambda - F_{ik} F^{ik} - \mu^2 \phi_k \phi^k\right]$$

conjuntamente con la relación

$$F_{ik} = \phi_{k,i} - \phi_{i,k}.$$

9.- Resumen

Hemos analizado la teoría de campo unificado que Einstein desarrolló en tres artículos escritos en el año 1923. Hemos desarrollado todos los cálculos, la mayoría de ellos ausentes en los trabajos originales. Esta teoría es puramente afín, en el sentido de que los únicos potenciales son las componentes de la conexión.

A partir exclusivamente de suponer que la densidad lagrangiana depende del tensor de Ricci, se obtienen unas ecuaciones auxiliares que nos permiten determinar las componentes de la conexión en función de las intensidades de campo.

La teoría supone una conexión simétrica, esto viene a significar que surgen dos campos, uno de ellos simétrico (y que se identifica con la gravedad) y el otro antisimétrico, que Einstein identificó con el electromagnetismo, aunque hemos expuesto varias razones que contradicen esta suposición.

Einstein consideró dos densidades lagrangianas diferentes. En su primer artículo, tomó la misma densidad lagrangiana que algunos años antes había considerado Eddington. Más interesante es la segunda densidad lagrangiana de Einstein, entre otras cosas porque le permite a Einstein abordar la obtención de las ecuaciones de campo a partir, no de la densidad lagrangiana, sino de su transformada de Legendre, lo que simplifica considerablemente los cálculos.

Aunque la teoría de Einstein reproduce correctamente las ecuaciones de la Relatividad General en el vacío con término cosmológico, tiene problemas para encajar la teoría electromagnética de Maxwell. Esta teoría unificada no permite, en rigor, que exista campo electromagnético en el vacío, además, las ecuaciones electromagnéticas que se obtienen no son invariantes gauge y por último la teoría de Einstein exige que el fotón tenga masa. Por tanto no se puede mantener que el campo antisimétrico que se deduce de la teoría de Einstein sea el campo electromagnético y por tanto se tendría que identificar con otro campo diferente.

10.- Bibliografía

[1] Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea Publishing, 1975, pp. 213-240 y pp. 257-263.

[2] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 32-38.

[3] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 76–77.

[4] Einstein, A.: «Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur allegemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der*

Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse (1923) 137-140.
[5] Einstein, A.: «The Theory of the Affine Field», *Nature* **112** (1923) 448-449.
[6] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1925) 414-419, traducción al inglés con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity» por A. Unzicker and T. Case en www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.
[7] Filippov, A. T. : «On Einstein-Weyl unified model of dark energy and dark matter», arXiv:0812.2616v2, 2009.
[8] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories», *Living Reviews Relativity* **7** (2004) 1-153.
[9] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories. Part II. (ca. 1930 – ca. 1965)», *Living Reviews Relativity* **17** (2014) 1-241.
[10] Schrödinger, Erwin: «Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen», *Naturwissenschaften* **22-31** (1934) 518-520.
[11] Schrödinger, Erwin: "Contributions to Born's New Theory of the Electromagnetic Field", *Proceedings of the Royal Society of London A* **150** (1935). 465-477.
[12] Schrödinger, Erwin: «Sur la théorie du monde d'Eddington», *Il Nuovo Cimento* **15-4** (1938) 246-254.
[13] Schrödinger, Erwin: «The Point Charge in the Unitary Field Theory», *Procedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 225-235.
[14] Schrödinger, E.: «The General Unitary Theory of the Physical Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 43-58.
[15] Schrödinger, E.: «The Union of the three Fundamental Fields (Gravitation, Meson, Electromagnetism)», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 275-287.
[16] Schrödinger, E.: «The Affine Connexion in Physical Field Theories», *Nature* **153** (1944) 572-575.
[17] Schrödinger, Erwin: «On Distant Affine Connection», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **50** (1944/1945) 143-154.
[18]Schrödinger, E.: «The general affine field laws», *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A Mathematical and physical sciences* **51** (1946) 41-50.
[19] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws I», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 163-171.
[20] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws II», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1948) 205-216.
[21] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws III», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 1-9.
[22] Schrödinger, E.: «Studies in the Non-Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A,* 1951, vol. 6.
[23] Schrödinger, E.; Hittmair, O.: «Studies in the Non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation II: The Velocity of Light», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A*, 1951, vol. 8.
[24] Schrödinger, Erwin y Papapetrou A.: «The Point-Charge in the Non-symmetric Field Theory», *Nature* **168** (1951) 40-41.
[25] Schrödinger, E.: «Unitary Field Theory: Conservation Identities and Relation to Weyl and Eddington», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 237-244.
[26] Schrödinger, E.: «The Relation between metric and affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1945-1948) 147-150.
[27] Schrödinger, E.: «On the differential identities of an affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **54** (1951-1952) 79-85.
[28] Schrödinger, Erwin: «Electric Charge and Current Engendered by Combined Maxwell-Einstein Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A* **56** (1953/1954) 13-21.
[29] Schrödinger, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 106-119, (primera edición del año 1950).
[30] Segura González, Wenceslao: *Teoría de campo relativista*, eWT Ediciones, 2014.
[31] Segura González, Wenceslao: «Teoría general de la conexión afín», 2014, http://vixra.org/abs/1410.0160.
[32] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0064.
[33] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de

Schrödinger (II)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0143.
[34] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (III)», 2015, http://vixra.org/abs/1502.0155.
[35] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (IV)», 2015, http://vixra.org/abs/1503.0040.
Segura González, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campo*, eWT, 2015.
[36] Tonnelat, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 266-273.
[37] Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories in the first third of the 20th century*, Birkhäuser, 1994, pp. 137-149 y pp. 188-197.

11.- Apéndice

Vamos a expresar la variación de la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico con respecto a la variación de la densidad tensorial $\boldsymbol{g}^{ik} = \sqrt{g}\, g^{ik}$; como $\delta g = -g g_{pq} \delta g^{pq}$

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{pq} \delta g^{pq} = -\frac{1}{2} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq} + \frac{1}{2} g_{pq} g^{pq} \delta\sqrt{g} \tag{38}$$

y como $g_{qp} g^{qp} = 4$ entonces

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2} g_{pq} \delta \boldsymbol{g}^{pq} .$$

Sea la identidad

$$g_{ik} \boldsymbol{g}^{pk} = \sqrt{g}\, \delta_i^p$$

al hallar su derivada respecto a $\boldsymbol{g}^{mn}$ se encuentra tras usar (38)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial \boldsymbol{g}^{mn}} \boldsymbol{g}^{pk} + g_{ik} \delta_m^p \delta_n^k = \frac{1}{2} g_{mn} \delta_i^p$$

multiplicando ambos miembros por g_{pt}

$$\sqrt{g} g_{pt} g^{pk} \frac{\partial g_{ik}}{\partial \boldsymbol{g}^{mn}} = \frac{1}{2} g_{mn} g_{pt} \delta_i^p - g_{in} g_{pt} \delta_m^p$$

de donde se deduce el resultado

$$\frac{\partial g_{it}}{\partial \boldsymbol{g}^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} g_{mn} g_{it} - g_{in} g_{mt} \right).$$