
Хмельник С. И.

Дополнение к математической МОДЕЛИ ПЕСЧАНОГО ВИХРЯ

Аннотация

Математическая модель песчаного вихря, представленная в [1], дополняется за счет включения в модель массового тока, который появляется из-за сопротивления воздуха и инерция песчинок. Дополненная модель позволяет объяснить причину движения вихря и утверждать, что существует положительная обратная связь между скоростью движения вихря и его механическим импульсом: импульс увеличивается с увеличением скорости и, начав движение, вихрь разгоняется.

Оглавление

1. Введение
2. Математическая модель
3. Потоки энергии
- Приложение 1
- Приложение 2
- Литература

1. Введение

В [1] представлена математическая модель песчаного вихря. Там указывалось, что сопротивление воздуха и инерция песчинок являются причиной поступательного движения (навстречу силе сопротивления воздушной среды). Здесь это утверждение доказывается более строго.

2. Математическая модель

В [1] показано, что гравитоманнитные напряженности H и плотность массовых токов J в стационарном гравитоманнитном поле связаны максвеллоподобными уравнениями гравитации вида

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\text{div}(\mathbf{J}) = 0, \quad (3)$$

которые и являются уравнениями песчаного вихря. Эти уравнения описывают неподвижный вихрь. Но при движении вихря надо учесть тот факт, что сопротивление воздуха и инерция песчинок создает дополнительный поток песчинок, направленный против скорости v поступательного движения вихря. Можно полагать, что существует некоторый источник постоянного тока $\overline{J}_o \equiv -\overline{v}$. Тогда уравнение (3) необходимо представить в виде:

$$\text{div}(\mathbf{J}) = \mathbf{J}_o. \quad (4)$$

В цилиндрических координатах r, φ, z будем полагать, что скорость направлена вдоль той оси, от которой против часовой стрелки отсчитывается угол φ . Тогда

$$\mathbf{J}_o = j_o q(\varphi) \cos(\varphi), \quad (5)$$

где функция

$$q(\varphi) = \begin{cases} -1, & \text{if } -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2 \\ 1, & \text{if } 3\pi/2 > \varphi > \pi/2 \end{cases}. \quad (5a)$$

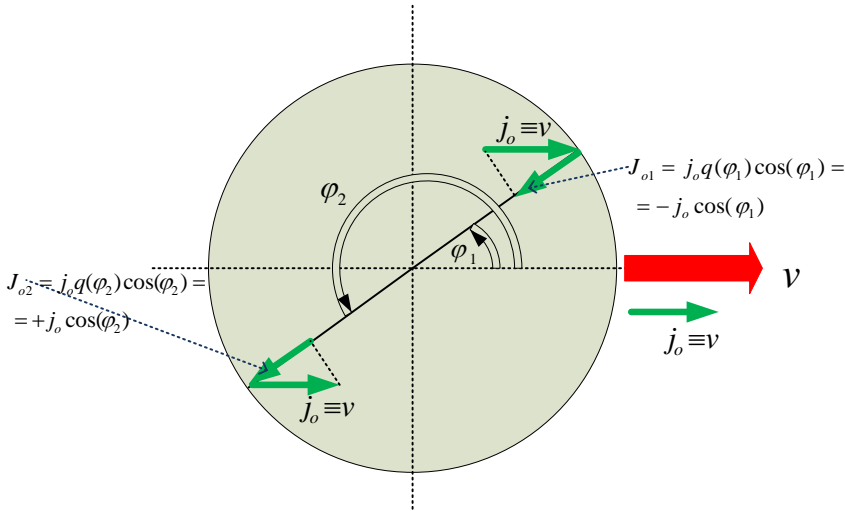


Рис. 1.

На рис. 1 показаны величины, используемые в формулах (5, 5a). Видно, что при постоянном

$$\overline{j}_o \equiv \overline{v} \quad (5b)$$

ток (5) всегда направлен противоположно скорости. Например, при $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = \pi + \varphi_1 = \pi + \pi/6$ имеем: $q(\varphi_1) = -1$, $q(\varphi_2) = 1$, $\cos(\varphi_1) = -\cos(\varphi_2)$ и $J_{o1} = J_{o1} = -j_o \cos(\varphi_1)$.

Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси. Тогда в цилиндрических координатах r , φ , z уравнения (1, 2, 4, 5) примут вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (8)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (9)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = j_o q(\varphi) \cos(\varphi). \quad (10)$$

Решение системы (6-10) найдено в приложении 1 и имеет следующий вид:

$$H_r = \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi), \quad (14)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi), \quad (15)$$

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi), \quad (16)$$

$$J_r = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi), \quad (17)$$

$$J_\varphi = j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi), \quad (18)$$

$$J_z = h_\varphi \left((1 - \alpha^2/2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right), \quad (19)$$

где j_φ , h_φ , j_o - некоторые константы, α - целое число, константа.

3. Потоки энергии

По аналогии с [3] и используя (14-19) можно найти проекции вектора плотности гравитационной энергии в теле песчаного вихря. Громоздкие вычисления этих проекций вынесены в приложение 2 и показаны там достаточно подробно, чтобы читатель легко убедился

в справедливости полученных результатов. В приложении показано, что при существовании тока J_o на каждой окружности данного радиуса существуют суммарные неуравновешенные потоки. Они имеют вид:

$$\overline{S_r} = -1.5\pi j_o j_\phi r^2, \quad (21)$$

$$\overline{S_\phi} = 0, \quad (22)$$

$$\overline{S_z} = -\alpha \pi j_\phi h_\phi r^2 - 2 j_o h_\phi r \eta(\alpha), \quad -2 \leq \eta(\alpha) \leq 2. \quad (23)$$

Итак, ток J_o

- является причиной появления потока гравитационной энергии (21), направленного навстречу скорости (поскольку в силу (5в) $j_o > 0$, т.е. направлен **по** скорости),
- не создает кругового потока энергии,
- дополняет или уменьшает вертикальный поток энергии (23).

Вертикальный поток энергии направлен вниз и, в соответствии с законом сохранения импульса, создает механический импульс тела вихря, направленный вверх. Этот импульс сохраняет вертикальную форму вихря. Этот импульс существует даже в неподвижном вихре. В подвижном вихре этот импульс может увеличиваться или уменьшаться, но аналитически эту зависимость установить не удастся, поскольку остается неизвестной величина α .

Поток гравитационной энергии направлен против скорости движения вихря. В соответствии с законом сохранения импульса, этот поток создает механический импульс тела вихря, направленный вдоль скорости. Поскольку ток пропорционален скорости, то механический импульс возрастает с увеличением скорости. Таким образом, существует положительная обратная связь между скоростью вихря и его механическим импульсом: начав движение, вихрь разгоняется.

Гравитационная энергия преобразуется в кинетическую энергию пылинок вихря, которая, в свою очередь, преобразуется в тепловую энергию при трении пылинок и в кинетическую энергию движения вихря.

Приложение 1

Рассматривается решение уравнений (6-10) из основного текста. Для удобства читателя перепишем их сюда:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = j_o q(\varphi) \cos(\varphi). \quad (5)$$

Далее по аналогии с [2] предположим, что

$$H_r = h_r r \sin(\alpha\varphi) \quad (6)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \quad (7)$$

Из (1, 6, 7) следует:

$$\frac{h_r r \sin(\alpha\varphi)}{r} + h_r \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) = 0, \quad (8)$$

Следовательно,

$$h_r = h_\varphi \alpha / 2. \quad (9)$$

Из (4, 6, 7) следует:

$$\frac{h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)}{r} - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) - h_r \alpha \cos(\alpha\varphi) = J_z, \quad (10)$$

Из (9, 10) следует:

$$-h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) + (h_\varphi - h_r \alpha) \cos(\alpha\varphi) = J_z,$$

или

$$J_z = h_\varphi \left((1 - \alpha^2 / 2) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right). \quad (11)$$

Предположим, далее, что

$$J_r = j_r r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi), \quad (12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi). \quad (13)$$

Из (5, 11, 12) следует:

$$\begin{aligned} & \frac{j_r r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi)}{r} + j_r \cos(\alpha\varphi) + \\ & + j_\varphi \alpha \cos(\alpha\varphi) - \frac{j_o q(\varphi) \cos(\varphi)}{r} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно,

$$j_r = -j_\varphi \alpha / 2 \quad (15)$$

Из (2, 12) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = j_r r^2 \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) r \cos(\alpha\varphi). \quad (16)$$

Из (15, 16) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) r \sin(\varphi). \quad (17)$$

Из (3, 13) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \sin(\varphi). \quad (18)$$

Из (17) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) r \sin(\varphi). \quad (19)$$

Формулы (17, 19) совпадают, что свидетельствует о правильности решения.

Приложение 2

По аналогии с [3] и используя формулы (14-19) основного текста, найдем проекции вектора плотности гравитационной энергии:

$$S_{rfz} = \left[\begin{array}{l} S_r = J_\varphi H_z - J_z H_\varphi = \left(j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi) \right) \bullet \\ \bullet \left(-\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) \right) - \\ - \left(h_\varphi \left(\left(1 - \alpha^2/2 \right) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right) \right) \bullet \left(h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \right) \\ S_\varphi = J_z H_r - J_r H_z = h_\varphi \left(\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \cos(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \right) \bullet \\ \bullet \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - \left(-\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) \right) \bullet \\ \bullet \left(-\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) \right) \\ S_z = J_r H_\varphi - J_\varphi H_r = \left(-\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) \right) \bullet \\ \bullet \left(h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \right) - \left(j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi) \right) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right]. \quad (1)$$

Выполняя умножение находим:

$$\begin{aligned}
 S_r = & -j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) + \\
 & + j_o q(\varphi) \sin(\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \sin(\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) - \quad (2) \\
 & - h_\varphi \left(1 - \alpha^2/2\right) \cos(\alpha\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_\varphi = & h_\varphi \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \cos(\alpha\varphi) \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - \alpha \sin(\alpha\varphi) \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) - \\
 & - \frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) + \frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi) + \quad (3) \\
 & + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) \frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) - j_o q(\varphi) \cos(\varphi) j_o q(\varphi) \cdot r \sin(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_z = & -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \cos(\varphi) h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \quad (4) \\
 & - j_\varphi r \sin(\alpha\varphi) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) \sin(\varphi) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\alpha\varphi)
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 S_r = & -\frac{1}{2} j_\varphi^2 r^3 \sin^2(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \sin^2(\alpha\varphi) + \\
 & + \frac{1}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \sin^2(\varphi) - (j_o q(\varphi))^2 r \sin^2(\varphi) - \quad (5) \\
 & - h_\varphi^2 r \left(1 - \alpha^2/2\right) \cos^2(\alpha\varphi) + h_\varphi^2 \alpha r \sin(\alpha\varphi) \cos(\alpha\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_\varphi = & h_\varphi^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) r \cos(\alpha\varphi) \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi r \frac{\alpha^2}{2} \sin^2(\alpha\varphi) - \\
 & - \frac{\alpha}{4} j_\varphi^2 r^3 \cos(\alpha\varphi) \sin(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) j_\varphi \frac{\alpha}{2} r^2 \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \quad (6) \\
 & + \frac{1}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) - (j_o q(\varphi))^2 r \cos(\varphi) \sin(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_z &= -\frac{\alpha}{2} j_\varphi h_\varphi r^2 \cos^2(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) h_\varphi r \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\
&- j_\varphi h_\varphi \frac{\alpha}{2} r^2 \sin^2(\alpha\varphi) + j_o q(\varphi) h_\varphi \frac{\alpha}{2} r \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi)
\end{aligned} \tag{7}$$

После дальнейших упрощений с учетом того, что $(q(\varphi))^2 = 1$, находим:

$$\begin{aligned}
S_r &= -\frac{1}{2} j_\varphi^2 r^3 \sin^2(\alpha\varphi) + \frac{3}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \sin^2(\varphi) - j_o^2 r \sin^2(\varphi) - \\
&- h_\varphi^2 r (1 - \alpha^2/2) \cos^2(\alpha\varphi) + \frac{1}{2} h_\varphi^2 \alpha r \sin(2\alpha\varphi)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
S_\varphi &= h_\varphi^2 \frac{\alpha}{4} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) r \sin(2\alpha\varphi) - \frac{\alpha^2}{2} h_\varphi r \sin^2(\alpha\varphi) - \\
&- \frac{\alpha}{8} j_\varphi^2 r^3 \sin(2\alpha\varphi) + \frac{1}{2} j_o q(\varphi) j_\varphi r^2 \left(\begin{array}{l} \alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \\ + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) \\
&- \frac{1}{2} j_o^2 r \sin(2\varphi)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$S_z = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi h_\varphi r^2 + j_o q(\varphi) h_\varphi r \left(\begin{array}{l} \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\ + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) \tag{10}$$

Найдем суммарные неуравновешенные потоки на окружности данного радиуса, отбрасывая те слагаемые, которые имеют равные значения на противоположно направленных вектор-радиусах:

$$\overline{S_r} = \int_0^{2\pi} S_r d\varphi = \frac{3}{2} j_o j_\varphi r^2 \int_0^{2\pi} q(\varphi) \sin^2(\varphi) d\varphi \tag{11}$$

$$\overline{S_\varphi} = \int_0^{2\pi} S_\varphi d\varphi = \frac{1}{2} j_o j_\varphi r^2 \int_0^{2\pi} q(\varphi) \left(\begin{array}{l} \alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \\ + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) d\varphi \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\overline{S_z} &= \int_0^{2\pi} S_z d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{\alpha}{2} j_\varphi h_\varphi r^2 + j_o q(\varphi) h_\varphi r \left(\begin{array}{l} \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\ + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) \right) = \\
&= -\alpha \pi j_\varphi h_\varphi r^2 + j_o h_\varphi r \int_0^{2\pi} q(\varphi) \left(\begin{array}{l} \cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \\ + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \end{array} \right) d\varphi
\end{aligned} \tag{13}$$

В соответствии с (5а) для любой монотонной функции $f(\varphi)$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} q(\varphi) f(\varphi) d\varphi = -2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi. \quad (14)$$

Следовательно, интегралы (11-13) могут быть представлены в виде:

$$\overline{S_r} = -3 j_o j_\varphi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi, \quad (15)$$

$$\overline{S_\varphi} = -j_o j_\varphi r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \right. \\ \left. + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi, \quad (16)$$

$$\overline{S_z} = -\alpha \pi j_\varphi h_\varphi r^2 - 2 j_o h_\varphi r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \right. \\ \left. + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi. \quad (17)$$

В этих формулах выражения

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (18)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\alpha \cdot \cos(\alpha\varphi) \sin(\varphi) + \right. \\ \left. + \cos(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi = 0, \quad (19)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos(\varphi) \cos(\alpha\varphi) \right. \\ \left. + \alpha \cdot \sin(\varphi) \sin(\alpha\varphi) \right) d\varphi = \eta(\alpha). \quad (20)$$

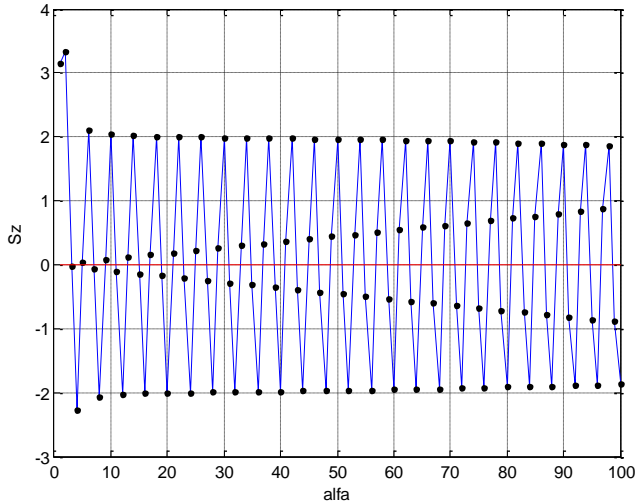


Рис. 1.

Функция представлена на рис. 1. Итак,

$$\overline{S}_r = -1.5\pi j_o j_\varphi r^2, \quad (21)$$

$$\overline{S}_\varphi = 0, \quad (22)$$

$$\overline{S}_z = -\alpha\pi j_\varphi h_\varphi r^2 - 2j_o h_\varphi r \eta(\alpha), \quad -2 \leq \eta(\alpha) \leq 2. \quad (23)$$

Литература

1. Хмельник С.И. Математическая модель песчаного вихря,
<http://vixra.org/pdf/1504.0169v3.pdf>
2. Хмельник С.И. Структура постоянного тока,
<http://vixra.org/pdf/1503.0241v2.pdf>
3. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током,
<http://vixra.org/pdf/1504.0061v1.pdf>