

Christian Goldbach
adresse une lettre à Euler
Où il affirme que
a) tout nombre PAIR supérieur à 2
est la somme
de deux nombres premiers

b) tout nombre IMPAIR supérieur à 3
est la somme
de trois nombres premiers

Dans son esprit, Christian Goldbach, considérait 1 comme nombre premier, d'où la nécessité de reformuler sa conjecture d'une manière moderne en décalant respectivement les premiers 2 et 3 d'un autre qui suit :

La conjecture, dans sa version forte devient :

Tout nombre PAIR supérieur à 3
est la somme
de deux nombres premiers

La conjecture, dans sa version faible s'énonce :

Tout nombre IMPAIR supérieur à 5
est la somme
de trois nombres premiers

C'est ces deux dernières versions que nous allons essayer de démontrer.

INTRODUCTION

La démonstration repose essentiellement sur trois théorèmes que je vais développer par la suite , le premier dite « théorème 1 » qui définit nécessairement tout nombre premier sous forme de $6m \pm 1$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, et suffisamment quand m ne soit pas sous forme $(6xy+x+y)$ ou $(6xy-x-y)$ pour tout nombre $6m+1$, et différent de la forme $(6xy-x+y)$ pour tout nombre $6m-1$. Nous appliquerons le « théorème 2 » qui définit la primalité de $6m \pm 1$ sans avoir à déterminer x et y de la forme. (v. la multimorielle)

Le troisième théorème dite « théorème 3 » traite de la propriété de la parité en ce qui concerne le produit puis la somme de deux nombres entiers .

Après avoir passé en revue tout les cas possibles de la somme de deux, puis de trois nombres premiers et de vérifier leurs conformité avec les deux conjectures, nous en déduisons la démonstration des conjectures de C.GOLDBACH.

1° THEOREME -1 :

Avec $m \in \mathbb{N}^*$;

$6m+1$ soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme $(6xy+x+y)$ ou $(6xy-x-y)$.

$6m-1$ pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme $(6xy-x+y)$ (x et y permutables).

DEMONSTRATIONS

Soit $n > 6$; $\in \mathbb{N}$; l'ensemble des entiers naturels.

Divisons n par $6 \implies n=6m+r$, m et $r \in \mathbb{N}$. r prend les valeurs des restes de la division soit $0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 .

n ne peut être premier si $r=0, 2, 3$ ou 4 car il sera respectivement divisible par ces derniers

Pour être premier, le reste de sa division devra nécessairement être égale à 1 ou 5 ,

C'est-à-dire que n soit de la forme $6m+1$ ou $6m+5$.

Si on considère la suite $6m+5$ et si on définit son premier terme par 5 , il sera la même chose que $6m-1$, m commençant par la valeur entière 1 .

Néanmoins cette condition que le nombre premier soit de la forme $6m \pm 1$ n'est pas suffisante étant donné qu'il existe des entiers non premiers respectant la forme $6m \pm 1$.

Mr **Krafft**, le 12 avril 1798 devant l'académie des sciences impériales en Europe ;
présenta son « essai sur les nombres premiers »... Il s'en sort qu'il fallait une deuxième condition suffisante pour que tout nombre de la forme $6m \pm 1$ soit premier :

a) Prenant le premier cas $6m+1$, la proposition se résume que **pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme $6xy+x+y$ ou $6xy-x-y$** , autrement dit, il faut que le nombre $(6m+1)$ ne soit pas un nombre composé et produit de $(6x+1)(6y+1)$ ou $(6x-1)(6y-1)$.

Démonstration :

1) Si $N=6m+1$ est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$$6m+1 = (u+t)(v+z)$$

$$= uv + uz + tv + tz ; \text{ on suppose que l'un de ces quatre produits soit } = 1$$

Soit $tz=1$; $\implies t=1$ et $z=1$ ou $t=-1$ et $z=-1$.

$$\implies 6m+1 = uv + u + v + 1 \text{ ou } 6m+1 = uv - u - v + 1$$

$$\implies 6m = uv + u + v \text{ ou } 6m = uv - u - v$$

Vu que m est un entier $> 0 \implies u$ et v doivent tout les deux être > 0 ou tout les deux < 0 .

Soit $6m = uv + u + v$ divisible par 2 & 3 . $uv + u + v$ d'abord divisible par $2 \implies u$ & v doivent être pairs $\implies u=2p$ & $v=2q$

$$\implies 6m = 2p2q + 2p + 2q \implies 3m = 2pq + p + q$$

$$\implies 2pq + p + q \text{ doit être divisible aussi par } 3 \implies 2pq + p + q = 3x$$

$$\implies 2pq+p+q = pq + p(q+1) + q = 3x \implies p=3x \text{ et } q=3x \text{ et } (q+1)=3x \implies q=3x-1$$

Soit $6m = uv - u - v$ divisible par 2 & 3 . $uv - u - v$ aussi divisible par 2 $\implies u$ & v doivent être pairs $\implies u=2p$ & $v=2q$

$$\implies 2pq-p-q = pq + q(p-1) - p = 3y \implies p=3y \text{ et } q=3y \text{ et } (p-1)=3y \implies p=3y+1$$

Donc trois suppositions ; soit $p=3x$ & $q=3y$ ou $p=3x-1$ & $q=3y-1$ ou $p=3x+1$ & $q=3y+1$

(x étant permutable avec y)

1°-supposition $p=3x$ & $q=3y$:

$$3m=2pq+p+q \implies 3m= 2.3x.3y +3x+3y$$

$$\implies m=6xy+x+y$$

$$3m=2pq-p-q \implies 3m= 2.3x.3y -3x-3y$$

$$\implies m=6xy-x-y$$

2°-supposition $p=3x-1$ & $q=3y-1$

$$3m=2pq+p+q \implies 3m= 2.(3x-1).(3y-1) + (3x-1) + (3y-1)$$

$$= 6x-2(3y-1) +3x-1+3y-1$$

$$3m= 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2 = 18xy+3x+3y +2-2$$

$$\implies m=6xy+x+y$$

$$3m=2pq-p-q \implies 3m= 2.(3x-1).(3y-1) +(3x-1)+(3y-1)$$

$$= 6x-2(3y-1) +3x-1+3y-1$$

$$3m= 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2 = 18xy-3x-3y +2-2$$

$$\implies m=6xy-x-y$$

3°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y+1$

$$3m=2pq+p+q \implies 3m= 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$$

$$= 6x+2(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$$

$$3m= 18xy +6x+6y +2 -3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y +2-2$$

$$\implies m=6xy+x+y$$

$$3m=2pq-p-q \implies 3m= 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$$

$$= 6x+2(3y+1) -3x+1-3y-1$$

$$3m= 18xy+6x+6y+2 -3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y +2-2$$

$$\implies m=6xy-x-y$$

Donc $N=6m+1$ pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme $6xy+x+y$ ou $6xy-x-y$.fin de démonstration.

b) Prenant le deuxième cas $6m-1$, la proposition dit que **pour être premier, il faut point que m soit compris sous la forme $6xy+x-y$** , autrement dit, il faut que $(6m-1)$ ne soit pas un nombre composé et produit de $(6x+1)(6y-1)$ ou $(6x-1)(6y+1)$

Démonstration :

2) Si $N=6m-1$ est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$$6m-1 = (u+t)(v+z)$$

$6m-1 = uv + uz + tv + tz$; l'un de ces quatre produits peut être supposé $= -1$

Soit $tz = -1$; $\Rightarrow t=1$ et $z=-1$ ou $t=-1$ et $z=1$.

$$\Rightarrow 6m-1 = uv - u + v - 1 \text{ ou } 6m-1 = uv + u - v - 1$$

$$\Rightarrow 6m = uv - u + v \text{ ou } 6m = uv + u - v$$

Sachant que m est un entier $> 0 \Rightarrow u$ et v doivent tout les deux être > 0 ou tout les deux < 0 .

Soit $6m = uv + u - v$ divisible par 2 & 3. $uv + u - v$ pour être divisible par 2 $\Rightarrow u$ & v doivent être pairs $\Rightarrow u=2p$ & $v=2q$

$$\Rightarrow 6m = 2p2q + 2p - 2q \Rightarrow 3m = 2pq + p - q$$

$$\Rightarrow 2pq + p - q \text{ doit être divisible aussi par 3 } \Rightarrow 2pq + p - q = 3x \text{ (ou } = 3y)$$

$$\Rightarrow 2pq + p - q = pq + q(p-1) + p = 3x \Rightarrow p=3x \text{ et } q=3y \text{ et } (p-1)=3x \Rightarrow p=3x+1$$

Soit $6m = uv - u + v$ divisible par 2 & 3. $\Rightarrow uv - u + v$ divisible par 2 $\Rightarrow u$ & v doivent être pairs $\Rightarrow u=2p$ & $v=2q$

$$\Rightarrow 6m = 2p2q - 2p + 2q \Rightarrow 3m = 2pq - p + q$$

$$\Rightarrow 2pq - p + q \text{ devra être divisible aussi par 3 } \Rightarrow 2pq - p + q = 3x \text{ (ou } = 3y)$$

$$\Rightarrow 2pq - p + q = pq + pq - p + q = pq + p(q+1) - q = 3y \Rightarrow p=3x \text{ et } q=3y \text{ et } (q+1)=3y \Rightarrow q=3y-1$$

Donc deux suppositions ; soit $p=3x$ & $q=3y$ ou $p=3x+1$ & $q=3y-1$

(x étant permutable avec y)

1°-supposition $p=3x$ & $q=3y$:

$$3m = 2pq - p + q \Rightarrow 3m = 2 \cdot 3x \cdot 3y - 3x + 3y$$

$$\Rightarrow m = 6xy - x + y \quad (1)$$

2°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y-1$

$$3m = 2pq - p + q \Rightarrow 3m = 2 \cdot (3x-1) \cdot (3y+1) - (3x-1) + (3y+1) \\ = 6x-2(3y+1) - 3x + 1 + 3y + 1$$

$$3m = 18xy + 6x - 6y - 2 - 3x + 3y + 2 = 18xy + 3x - 3y - 2 + 2$$

$$\Rightarrow m = 6xy + x - y \quad (2)$$

A cause de la permutabilité de x & y les expressions (1) & (2) reviennent au même

Finalemment : pour que $N=6m-1$ soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme $6xy+x-y$.

2° THEOREME-2 :

Théorème sur les nombres premiers (Berkouk)

définition :

soit n , un entier naturel, la Multimorielle de n , notée $n(=)$, est le produit de tous les restes issus de la division respective de n par chaque nombre entier m compris en 1 et n .

Théorème :

$\forall n$, un entier naturel > 2 , n est premier si et seulement si sa Multimorielle $n(=) \neq 0$.

Démonstration :

Soit m et n deux entiers : $n(=) \Rightarrow 1 < m < n$

a)- si n est premier $\Rightarrow n/m$ conduit à un reste nul, si $m=n$ ou $m=1$

Or $1 < m < n$, donc tous les restes des $n/m \neq 0 \Rightarrow$ la multimorielle $n(=) \neq 0$.

ou bien

b)- si n est un nombre composé, $\Rightarrow n = k \cdot p$ (k et p entiers)

comme $k < n$ et $p < n \Rightarrow \exists m = k$, ou $m = p$ qui divise n et conduit à un reste Nul

$\Rightarrow n(=) = 0$.

CQFD

3° THEOREME-3 :

**a) Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.
Dans tous les autres cas, le produit est pair.**

Et

b) La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.

La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.

Démonstration a-:

Produit de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est $2n$ et le second $2p$. (Un nombre impair est du type $2x+1$)

Nous avons : (le symbole $*$ est ici le signe de multiplication)

$$2n * 2p = 2 * n * 2 * p = 2 * (n * 2 * p)$$

Ce résultat est de la forme $2x$

, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

Produit de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est $2n + 1$
et le second $2p + 1$. (Un nombre impair est du type $2x + 1$)

$(2n + 1) * (2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2(2np + n + p) + 1$
Ce résultat est de la forme $2x + 1$, donc le produit est impair.

Produit d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair $2n$ et un nombre impair $2p + 1$

$2n * (2p + 1) = 4np + 2n = 2(2np + n)$
Ce résultat est de la forme $2x$
, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

**Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.
Dans tous les autres cas, le produit est pair. CQFD.**

Démonstration b-:

Somme de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est $2n$ et le second $2p$. (Un nombre impair est du type $2x+1$)

Nous avons :

$$2n + 2p = 2(n + p)$$

Ce résultat est de la forme $2x$
, (multiple de 2), donc la somme est paire.

Somme de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est $2n + 1$
et le second $2p + 1$. (Un nombre impair est du type $2x + 1$)

Nous avons :

$$(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 1 + 2p + 1 = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$$

Ce résultat est de la forme $2x$
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair $2n$ et un nombre impair $2p + 1$

Nous avons :

$$2n + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1$$

Ce résultat est de la forme $2x + 1$, donc la somme est impaire.

Le résultat est similaire si le premier nombre est impair et le second pair.

La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.

La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair. CQFD

CONJECTURE DE C. GOLDBACH
DEMONSTRATION

A) Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est paire :

Soit deux nombres premiers de la forme $6m \pm 1$ Et $6n \pm 1$, m et $n \in \mathbb{N}^*$.

(D'après la démonstration du théorème 1),

Nous aurons les sommes possibles suivantes, qui vérifient la propriété PAIRE d'après le « théorème 3 » :

1° soit $S = (6m+1) + (6n+1) = 6(m+n)+2 = 2(3(m+n)+1) \implies S$ est PAIRE, $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

2° ou $S = (6m+1) + (6n-1) = 6(m+n)$, d'après théorème 2 $\implies S$ est PAIRE $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

3° ou $S = (6m-1) + (6n+1) = 6(m+n)$, d'après théorème 2 $\implies S$ est PAIRE $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

4° ou $S = (6m-1) + (6n-1) = 6(m+n) - 2 = 2(3(m+n) - 1) \implies S$ est PAIRE $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme $6m \pm 1$, ou $6n \pm 1$ vérifiée, la parité est établie aussi, $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$, S est divisible par 2 \implies donc $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$, la somme de 2 premiers est PAIRE, y compris quand :

1)- **m et $n \neq 6xy + x + y$ ou m et $n \neq 6xy - x - y$ (d'après théorème 1)**

$\implies \exists k$ et k' tel que, $k = (6m+1)(=)$ et $k' = (6n+1)(=)$ (multimorielle)

a) si $k > 0 \implies (m+k)$ et $(n+k) \neq 6xy + x + y$ ou $(m+k)$ et $(n+k) \neq 6xy - x - y$

Idem si $k' > 0 \implies (m+k')$ et $(n+k') \neq 6xy + x + y$ ou $(m+k')$ et $(n+k') \neq 6xy - x - y$
 $\Leftrightarrow 6m+1$, ou $6n+1$ sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer x et y puisque $k \neq 0$.

Ou bien

b) si k et $k' = 0 \implies m$ et $n = 6xy + x + y$ ou m et $n = 6xy - x - y \Leftrightarrow 6m+1$, ou $6n+1$ sont sûrement nombres composés sans avoir à déterminer x et y . $k = 6m+1(=) = 0$ et $k' = 6n+1(=) = 0$ d'après le théorème 2 de la multimorielle.

2) - **y compris aussi quand : m et $n \neq 6xy + x - y$; condition suffisante pour que $6m - 1$, ou $6n - 1$ soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\implies \exists k$ et k' tel que, $k = (6m-1)(=)$ et $k' = (6n-1)(=)$ (multimorielle)

a) si $k > 0$ et $k' > 0 \implies (m+k)$ et $(n+k') \neq 6xy + x - y$

$\Leftrightarrow 6m-1$, ou $6n-1$ sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer x et y . (car $k \neq 0$)

b) si k et $k' = 0 \Rightarrow m$ et $n = 6xy + x - y \Leftrightarrow 6m - 1$, ou $6n - 1$ sont surement nombres composés sans avoir à déterminer x et y . Alors, $k = 6m - 1 (\equiv) 0$ ou $k' = 6n - 1 (\equiv) 0$, D'après le théorème 2.

**Conclusion : tout nombre PAIR > 3
est la somme
de deux nombres premiers CQFD**

B) Tout nombre impair > 5 , est la somme de trois nombres premiers :

Soit trois nombres premiers de la forme $6m \pm 1$, $6n \pm 1$, et $6p \pm 1$ avec m, n et $p \in \mathbb{N}^*$.

Nous aurons 8 sommes à trois, possibles :

1° soit $S = (6m+1) + (6n+1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 3 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

2° soit $S = (6m+1) + (6n+1) + (6p-1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

3° soit $S = (6m+1) + (6n-1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

4° soit $S = (6m+1) + (6n-1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

5° soit $S = (6m-1) + (6n-1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 3 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

6° soit $S = (6m-1) + (6n+1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

7° soit $S = (6m-1) + (6n-1) + (6p+1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

8° soit $S = (6m-1) + (6n+1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow$ d'après théorème 3
 $\Rightarrow S$ est **IMPAIRE** $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$

La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme $6m \pm 1$, $6n \pm 1$ ou $6p \pm 1$ vérifiée, la propriété IMPAIRE est établie pour ces sommes aussi, quelque soit m, n & $p \in \mathbb{N}^*$, S est impaire, non divisible par 2 \Rightarrow donc $\forall m, n$ & $p \in \mathbb{N}^*$, la somme de 3 premiers est IMPAIRE, y compris quand :

1)- m, n et $p \neq 6xy + x + y$ ou m, n et $p \neq 6xy - x - y$; condition suffisante pour que $6m + 1$, ou $6n + 1$ ou $6p + 1$ soient premiers. (D'après théorème 1)
 $\Rightarrow \exists k, k'$ et k'' tel que, $k = (6m + 1)(=)$, $k' = (6n + 1)(=)$ et $k'' = (6p + 1)(=)$.
a) si $k > 0$, $k' > 0$ et $k'' > 0 \Rightarrow (m+k), (n+k')$ et $(p+k'') \neq 6xy + x + y$ ou $(m+k), (n+k')$ et $(p+k'') \neq 6xy - x - y$
 $\Leftrightarrow 6m + 1, 6n + 1$ et $6p + 1$ sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer x et y .
Puisque k, k' et k'' sont différent de 0 selon **théorème 2**.

Ou bien

b) si k, k' et $k'' = 0 \Rightarrow m, n$ et $p = 6xy + x + y$ ou m, n et $p = 6xy - x - y \Leftrightarrow 6m + 1, 6n + 1$ et $6p + 1$ sont sûrement nombres composés sans avoir à déterminer x et y .
 $k = 6m + 1(=) = 0, k' = 6n + 1(=) = 0$ et $k'' = (6p + 1) = 0$, d'après le **théorème 2** de la multimorielle.

2) - y compris aussi quand : m, n et $p \neq 6xy + x - y$; condition suffisante pour que $6m - 1, 6n - 1$ ou $6p - 1$ soient premiers. (D'après théorème 1)

$\Rightarrow \exists k, k'$ et k'' tel que, $k = (6m - 1)(=)$, $k' = (6n - 1)(=)$ et $k'' = (6p - 1)(=)$
a) si $k > 0$, $k' > 0$ et $k'' > 0 \Rightarrow (m+k), (n+k')$ et $(p+k'') \neq 6xy + x - y$
 $\Leftrightarrow 6m - 1, 6n - 1$ et $6p - 1$ sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer x et y .

Ou bien

b) si k, k' et $k'' = 0 \Rightarrow m, n$ et $p = 6xy + x - y \Leftrightarrow 6m - 1, 6n - 1$ et $6p - 1$ sont sûrement nombres composés sans avoir à déterminer x et y .
 $k = 6m - 1(=) = 0, k' = 6n - 1(=) = 0$ et $k'' = (6p - 1) = 0$ d'après le **théorème 2**

Conclusion : Tout nombre impair > 5 , est la somme de trois nombres premiers,

CQFD.

Casablanca le 05/08/2015 - 18:03

BERKOUK Mohamed ; email: bellevue-2011@hotmail.com