

## DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: [bellevue-2011@hotmail.com](mailto:bellevue-2011@hotmail.com)

---

**Christian Goldbach**  
**Adresse une lettre à Euler**  
**Où il affirme que**  
**a) tout nombre PAIR supérieur à 2**  
**Est la somme**  
**De deux nombres premiers**  
-----  
**b) tout nombre IMPAIR supérieur à 3**  
**Est la somme**  
**De trois nombres premiers**  
-----

Dans son esprit, Christian Goldbach, considérait 1 comme nombre premier, d'où la nécessité de reformuler sa conjecture d'une manière moderne en décalant respectivement les premiers 2 et 3 d'un autre qui suit :  
La conjecture, dans sa version forte devient :

**Tout nombre PAIR supérieur à 3**  
**Est la somme**  
**De deux nombres premiers**

La conjecture, dans sa version faible s'énonce :

**Tout nombre IMPAIR supérieur à 5**  
**Est la somme**  
**De trois nombres premiers**

C'est ces deux dernières versions que nous allons essayer de démontrer.

---

### INTRODUCTION

La démonstration repose essentiellement sur trois théorèmes que je vais développer par la suite, le premier dite « théorème 1 » qui définit nécessairement tout nombre premier sous forme de  $6m \pm 1$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , et suffisamment quand  $m$  ne soit pas sous forme  $(6xy+x+y)$  ou  $(6xy-x-y)$  pour tout nombre  $6m+1$ , et différent de la forme  $(6xy-x+y)$  pour tout nombre  $6m-1$ . Nous appliquerons le « théorème 2 » qui définit la primalité de  $6m \pm 1$  sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$  de la forme. (v. la multimorielle).

Le troisième théorème dite « théorème 3 » traite de la propriété de la parité en ce qui concerne le produit puis la somme de deux nombres entiers.

Après avoir passé en revue tout les cas possibles de la somme de deux, puis de trois nombres premiers et de vérifier leurs conformité avec les deux conjectures. La démonstration de la réciproque nous a conduite par une analyse logique, tout droit à celles des deux conjecture de C.GOLDBACH.

#### 1° THEOREME -1 :

Avec  $m \in \mathbb{N}^*$  ;

$6m+1$  soit premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $(6xy+x+y)$  ou  $(6xy-x-y)$ .

$6m-1$  pour être premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $(6xy-x+y)$

( $x$  et  $y$  permutables).

## DEMONSTRATIONS :

Soit  $n > 6$  ;  $\epsilon \in \mathbb{N}$  ; l'ensemble des entiers naturels.

Divisons  $n$  par 6  $\implies n=6m+r$ ,  $m$  et  $r \in \mathbb{N}$ .  $r$  prend les valeurs des restes de la division soit 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

$n$  ne peut être premier si  $r=0, 2, 3$  ou 4 car il sera respectivement divisible par ces derniers

Pour être premier, le reste de sa division devra nécessairement être égale à 1 ou 5,

C'est-à-dire que  $n$  soit de la forme  $6m+1$  ou  $6m+5$ .

Si on considère la suite  $6m+5$  et si on définit son premier terme par 5, il sera la même chose que  $6m-1$ ,  $m$  commençant par la valeur entière 1.

Néanmoins cette condition que le nombre premier soit de la forme  $6m \pm 1$  n'est pas suffisante étant donné qu'il existe des entiers non premiers respectant la forme  $6m \pm 1$ .

Mr **Krafft**, le 12 avril 1798 devant l'académie des sciences impériales en Europe ; présenta son « essai sur les nombres premiers » [1]. Il s'en sort qu'il fallait une deuxième condition suffisante pour que tout nombre de la forme  $6m \pm 1$  soit premier :

a) Prenant le premier cas  $6m+1$ , la proposition se résume que **pour être premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x+y$  ou  $6xy-x-y$** , (autrement dit, il faut que le nombre  $(6m+1)$  ne soit pas un nombre composé et produit de  $(6x+1)(6y+1)$  ou  $(6x-1)(6y-1)$ .)

### Démonstration :

. Si  $N=6m+1$  est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$$6m+1 = (u+t)(v+z)$$

$$= uv + uz + tv + tz ; \text{ on suppose que l'un de ces quatre produits soit } = 1$$

Soit  $tz=1$  ;  $\implies t=1$  et  $z=1$  ou  $t=-1$  et  $z=-1$ .

$$\implies 6m+1 = uv + u + v + 1 \text{ ou } 6m+1 = uv - u - v + 1$$

$$\implies 6m = uv + u + v \text{ ou } 6m = uv - u - v$$

Vu que  $m$  est un entier  $> 0 \implies u$  et  $v$  doivent tout les deux être  $> 0$  ou tout les deux  $< 0$ .

Soit  $6m = uv + u + v$  divisible par 2 & 3.  $uv + u + v$  d'abord divisible par 2  $\implies u$  &  $v$  doivent être pairs  $\implies u=2p$  &  $v=2q$

$$\implies 6m = 2p2q + 2p + 2q \implies 3m = 2pq + p + q$$

$$\implies 2pq + p + q \text{ doit être divisible aussi par } 3 \implies 2pq + p + q = 3x$$

$$\implies 2pq + p + q = pq + p(q+1) + q = 3x \implies p=3x \text{ et } q=3x \text{ et } (q+1)=3x \implies q=3x-1$$

Soit  $6m = uv - u - v$  divisible par 2 & 3.  $uv - u - v$  aussi divisible par 2  $\implies u$  &  $v$  doivent être pairs  $\implies u=2p$  &  $v=2q$

$$\implies 2pq - p - q = pq + q(p-1) - p = 3y \implies p=3y \text{ et } q=3y \text{ et } (p-1)=3y \implies p=3y+1$$

**Donc trois suppositions ; soit  $p=3x$  &  $q=3y$  ou  $p=3x-1$  &  $q=3y-1$  ou  $p=3x+1$  &  $q=3y+1$**

( $x$  étant permutable avec  $y$ )

1°-supposition  $p=3x$  &  $q=3y$  :

$$3m = 2pq + p + q \implies 3m = 2 \cdot 3x \cdot 3y + 3x + 3y$$

$$\implies m = 6xy + x + y$$

$$3m = 2pq - p - q \implies 3m = 2 \cdot 3x \cdot 3y - 3x - 3y$$

$$\implies m = 6xy - x - y$$

2°-supposition  $p=3x-1$  &  $q=3y-1$

$$3m = 2pq + p + q \implies 3m = 2 \cdot (3x-1) \cdot (3y-1) + (3x-1) + (3y-1)$$

$$= 6x-2(3y-1) + 3x-1 + 3y-1$$

$$3m = 18xy - 6x - 6y + 2 + 3x + 3y - 2 = 18xy + 3x + 3y + 2 - 2$$

$$\implies m = 6xy + x + y$$

$$3m = 2pq - p - q \implies 3m = 2 \cdot (3x-1) \cdot (3y-1) + (3x-1) + (3y-1)$$

$$= 6x-2(3y-1) + 3x-1 + 3y-1$$

$$3m = 18xy - 6x - 6y + 2 + 3x + 3y - 2 = 18xy - 3x - 3y + 2 - 2$$

$$\implies m = 6xy - x - y$$

3°-supposition  $p=3x+1$  &  $q=3y+1$

$$3m=2pq+p+q \implies 3m=2 \cdot (3x+1) \cdot (3y+1) - (3x+1) - (3y+1)$$

$$= 6x+2(3y+1) - (3x+1) - (3y+1)$$

$$3m=18xy+6x+6y+2-3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y+2-2$$

$$\implies m=6xy+x+y$$

$$3m=2pq-p-q \implies 3m=2 \cdot (3x+1) \cdot (3y+1) - (3x+1) - (3y+1)$$

$$= 6x+2(3y+1) - 3x - 1 - 3y - 1$$

$$3m=18xy+6x+6y+2-3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y+2-2$$

$$\implies m=6xy-x-y$$

**Donc  $N=6m+1$  pour être premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x+y$  ou  $6xy-x-y$  .fin de démonstration.**

b) Prenant le deuxième cas  $6m-1$ , la proposition dit que **pour être premier, il faut point que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x-y$** , autrement dit, il faut que  $(6m-1)$  ne soit pas un nombre composé et produit de  $(6x+1)(6y-1)$  ou  $(6x-1)(6y+1)$

Démonstration :

. Si  $N=6m-1$  est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$$6m-1 = (u+t)(v+z)$$

$$6m-1 = uv + uz + tv + tz ; \text{ l'un de ces quatre produits peut être supposé } = -1$$

Soit  $tz = -1$  ;  $\implies t=1$  et  $z=-1$  ou  $t=-1$  et  $z=1$ .

$$\implies 6m-1 = uv - u + v - 1 \text{ ou } 6m-1 = uv + u - v - 1$$

$$\implies 6m = uv - u + v \text{ ou } 6m = uv + u - v$$

Sachant que  $m$  est un entier  $> 0 \implies u$  et  $v$  doivent tout les deux être  $> 0$  ou tout les deux  $< 0$ .

Soit  $6m = uv + u - v$  divisible par 2 & 3.  $uv + u - v$  pour être divisible par 2  $\implies u$  &  $v$  doivent être pairs  $\implies u=2p$  &  $v=2q$

$$\implies 6m = 2p2q + 2p - 2q \implies 3m = 2pq + p - q$$

$$\implies 2pq + p - q \text{ doit être divisible aussi par 3 } \implies 2pq + p - q = 3x \text{ (ou } = 3y)$$

$$\implies 2pq + p - q = pq + q(p-1) + p = 3x \implies p=3x \text{ et } q=3y \text{ et } (p-1)=3x \implies p=3x+1$$

Soit  $6m = uv - u + v$  divisible par 2 & 3.  $\implies uv - u + v$  divisible par 2  $\implies u$  &  $v$  doivent être pairs  $\implies u=2p$  &  $v=2q$

$$\implies 6m = 2p2q - 2p + 2q \implies 3m = 2pq - p + q$$

$$\implies 2pq - p + q \text{ devra être divisible aussi par 3 } \implies 2pq - p + q = 3x \text{ (ou } = 3y)$$

$$\implies 2pq - p + q = pq + pq - p + q = pq + p(q+1) - q = 3y \implies p=3x \text{ et } q=3y \text{ et } (q+1)=3y \implies q=3y-1$$

**Donc deux suppositions ; soit  $p=3x$  &  $q=3y$  ou  $p=3x+1$  &  $q=3y-1$**

( $x$  étant permutable avec  $y$ )

1°-supposition  $p=3x$  &  $q=3y$  :

$$3m=2pq-p+q \implies 3m=2 \cdot 3x \cdot 3y - 3x + 3y$$

$$\implies m=6xy-x+y \quad (1)$$

2°-supposition  $p=3x+1$  &  $q=3y-1$

$$3m=2pq-p+q \implies 3m=2 \cdot (3x+1) \cdot (3y-1) - (3x+1) + (3y-1)$$

$$= 6x-2(3y-1) - 3x - 1 + 3y - 1$$

$$3m=18xy+6x-6y-2-3x-1+3y-1 = 18xy+3x-3y-2+2$$

$$\implies m=6xy+x-y \quad (2)$$

A cause de la permutabilité de  $x$  &  $y$  les expressions (1) & (2) reviennent au même

**Finalement : pour que  $N=6m-1$  soit premier, il faut points que  $m$  soit compris sous la forme  $6xy+x-y$ .**

## **2° THEOREME-2 :**

Théorème sur les nombres premiers ( Berkouk )

définition :

soit  $n$ , un entier naturel, la Multimorielle de  $n$ , notée  $n(=)$ , est le produit de tous les restes issus de la division respective de  $n$  par chaque nombre entier  $m$  compris entre 1 et  $n$ .

Théorème :

$\forall n$ , un entier naturel  $> 2$ ,  $n$  est premier si et seulement si sa Multimorielle  $n(=) \neq 0$ .

Démonstration :

Soit  $m$  et  $n$  deux entiers :  $n(=) \Rightarrow 1 < m < n$

a)- si  $n$  est premier  $\Rightarrow n/m$  conduit à un reste nul, si  $m=n$  ou  $m=1$

Or  $1 < m < n$ , donc tous les restes des  $n/m \neq 0 \Rightarrow$  la multimorielle  $n(=) \neq 0$ .

Ou bien

b)- si  $n$  est un nombre composé,  $\Rightarrow n = k \cdot p$  ( $k$  et  $p$  entiers)

comme  $k < n$  et  $p < n \Rightarrow \exists m = k$ , ou  $m = p$  qui divise  $n$  et conduit à un reste Nul

$\Rightarrow n(=) = 0$ .

CQFD.

## **3° THEOREME-3 :**

**a) Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.**

**Dans tous les autres cas, le produit est pair.**

**Et**

**b) La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.**

**La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.**

Démonstration a-:

Produit de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est  $2n$  et le second  $2p$ . (Un nombre impair est du type  $2x+1$ )

Nous avons : (le symbole  $*$  est ici le signe de multiplication)

$$2n * 2p = 2 * n * 2 * p = 2 * (n * 2 * p)$$

Ce résultat est de la forme  $2x$

, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

Produit de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est  $2n + 1$

et le second  $2p + 1$ . (Un nombre impair est du type  $2x + 1$ )

$$(2n + 1) * (2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2(2np + n + p) + 1$$

Ce résultat est de la forme  $2x + 1$ , donc le produit est impair.

Produit d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair  $2n$  et un nombre impair  $2p + 1$

$$2n * (2p + 1) = 4np + 2n = 2(2np + n)$$

Ce résultat est de la forme  $2x$

, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

**Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.  
Dans tous les autres cas, le produit est pair. CQFD.**

#### Démonstration b-:

##### Somme de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est  $2n$  et le second  $2p$ . (Un nombre impair est du type  $2x+1$ )  
Nous avons :  
 $2n + 2p = 2(n + p)$   
Ce résultat est de la forme  $2x$   
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

##### Somme de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est  $2n + 1$   
et le second  $2p + 1$ . (Un nombre impair est du type  $2x + 1$ )  
Nous avons :  
 $(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 1 + 2p + 1 = 2n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)$   
Ce résultat est de la forme  $2x$   
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

##### Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair  $2n$  et un nombre impair  $2p + 1$   
Nous avons :  
 $2n + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1$   
Ce résultat est de la forme  $2x + 1$ , donc la somme est impaire.  
Le résultat est similaire si le premier nombre est impair et le second pair.

**La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.  
La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair. CQFD**

### CONJECTURES DE C. GOLDBACH DEMONSTRATION

#### **A) Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair :**

Soit deux nombres premiers de la forme  $6m \pm 1$  Et  $6n \pm 1$ ,  $m$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(D'après la démonstration du théorème 1),

Nous aurons les sommes possibles suivantes, qui vérifient la propriété PAIRE d'après le « théorème 3 » :

1° soit  $S = (6m+1) + (6n + 1) = 6(m+n)+2 = 2(3(m+n) + 1) \Rightarrow S$  est PAIRE,  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

2° ou  $S = (6m+1) + (6n - 1) = 2.3(m+n)$ , d'après théorème 3  $\Rightarrow S$  est PAIRE  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

3° ou  $S = (6m-1) + (6n + 1) = 2.3(m+n)$ , d'après théorème 3  $\Rightarrow S$  est PAIRE  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

4° ou  $S = (6m-1) + (6n - 1) = 2.3(m+n) - 2 = 2(3(m+n) - 1) \Rightarrow S$  est PAIRE  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$

**La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme  $6m \pm 1$ , ou  $6n \pm 1$  vérifiée, la parité est établi aussi,  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$ , S est divisible par 2  $\Rightarrow$  donc  $\forall m \& n \in \mathbb{N}^*$ , la somme de 2 premiers est PAIRE, y compris quand :**

1)-  $m$  et  $n \neq 6xy + x + y$  ou  $m$  et  $n \neq 6xy - x - y$ ; condition suffisante pour que

**6m + 1, ou 6n + 1 soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\Rightarrow \exists k \text{ et } k' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m + 1)(=)$  et  $k' = (6n + 1)(=)$  (multimorielle)

. Si  $k > 0 \Rightarrow (m+k)$  et  $(n+k) \neq 6xy + x + y$  ou  $(m+k)$  et  $(n+k) \neq 6xy - x - y$

. Si  $k' > 0 \Rightarrow (m+k')$  et  $(n+k') \neq 6xy + x + y$  ou  $(m+k')$  et  $(n+k') \neq 6xy - x - y \Leftrightarrow 6m + 1, \text{ ou } 6n + 1$  sont Surement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$  puisque  $k \neq 0$ .

**2) - y compris aussi quand : m et n  $\neq 6xy + x - y$  ; condition suffisante pour que 6m - 1, ou 6n - 1 soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\Rightarrow \exists k \text{ et } k' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m - 1)(=)$  et  $k' = (6n - 1)(=)$  (multimorielle)

. si  $k > 0$  et  $k' > 0 \Rightarrow (m+k)$  et  $(n+k') \neq 6xy + x - y$

$\Leftrightarrow 6m - 1, \text{ ou } 6n - 1$  sont surement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$ . (car  $k \neq 0$ )

**PREMIERE CONCLUSION : Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair**

Soit la proposition **P = Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair**

Et sa réciproque **Q = Tout nombre pair > 3 est la somme de deux nombres premiers**

Notez bien que Q est bien la réciproque de P, car tout les pairs et les nombres premiers, dont il est question ici sont bien minoré, puisse que le premier pair commence par 10 (5+5), et les nombres premiers sont de la forme  $6n \pm 1$  dont le premier commence par 5.

( $\rightarrow$  : implication « si... Alors »)

Regardons  $P \rightarrow Q$  et sa réciproque  $Q \rightarrow P$  selon le tableau de vérités suivant :

| P | Q | $P \rightarrow Q$ | $Q \rightarrow P$ (réciproque) |
|---|---|-------------------|--------------------------------|
| V | V | V                 | V                              |
| V | F | F                 | V                              |
| F | V | V                 | F                              |
| F | F | V                 | V                              |

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow Q \rightarrow P$  SSI P est vraie et Q est vraie aussi ?

**Supposons que Q est Fausse :**

a)  $\Rightarrow \exists$  un nombre IMPAIR > 3 qui est la somme de deux nombres premiers (\* non pair = impair)

Ou

b)  $\Rightarrow \exists$  un nombre PAIR > 3 qui n'est pas la somme de deux nombres premiers

**Démonstration du a) :**

Soit  $p$  et  $p'$  2 nombres premiers,  $\exists$  un nombre IMPAIR  $i / i = p + p'$

Or le « théorème-3 » nous apprend que seul la somme de 2 nombres de parité différente est un nombre impair

$\Rightarrow$  l'un des deux premiers  $p$  et  $p'$  doit être pair

$\Rightarrow \exists$  un nombre premier pair > 3

$\Rightarrow$  Donc ce nombre premier pair > 3 sera divisible par lui-même, 1 et 2 puisse qu'il est pair, donc ce n'est pas Un nombre premier, Absurde.

$\Rightarrow$  Il n'existe pas de premiers  $p$  ou  $p'$ , pairs > 3

$\Rightarrow$  Donc il n'existe pas de nombre IMPAIR > 3 qui est la somme de deux nombres premiers (1)

**Démonstration du b-1) :**

$\exists$  un nombre PAIR  $> 3$  qui n'est pas la somme de deux nombres premiers  
 or  $\forall x \in \mathbb{N}, x > 3; \forall p$  et  $p'$ , premiers  $\in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}$ , que si  $x > y$ , alors  $(x-y) = p+p'$  ou bien si  $x < y$ , alors  $(y-x) = p+p'$   
 comme  $p$  et  $p'$  premiers  $> 3$  sont toujours impairs, leurs somme  $(p+p')$  est toujours pair selon le « théorème-3 », donc  $(x-y)$  ou  $(y-x) = (p+p')$  sont toujours pairs aussi  $\forall x > 3 \in \mathbb{N}$ .  
 Donc il n'existe pas de nombre PAIR  $> 3$  qui n'est la somme de deux premiers. (2)

**Démonstration du b-2) :**

Nous rappelions que nous essayons de démontrer la réciproque Q de Goldbach :  $\exists$  un nombre PAIR  $> 3$  qui n'est pas la somme de deux nombres premiers

Soit  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers naturels ;  $\mathbb{D}$ , l'ensemble des entiers pairs.  $\mathbb{I}$ , l'ensemble des entiers impairs.  
 Soit  $\mathbb{N}^2$ , l'ensemble des couples d'entiers naturels  $(n, m), \forall n, m \in \mathbb{N}$ ,  
 Soit  $\mathbb{P}$  l'ensemble des premiers positifs,  
 Soit  $\mathbb{P}^2$  l'ensemble des couples de deux premiers positifs  $(p, p'), \forall p, p' \in \mathbb{P}$ ,  
 Et  $\mathbb{P}^3$  l'ensemble des triplets de premiers positifs  $(p, p', p''), \forall p, p', p'' \in \mathbb{P}$ ,

Pour cela nous allons introduire trois lemmes à partir desquels nous définissons les cardinaux de ces ensembles Et à partir desquels aussi, nous concluons sur la réciproque Q de Goldbach.

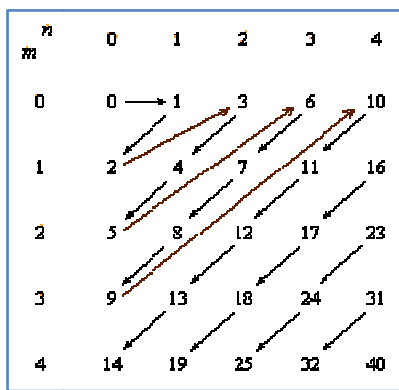
**1° Lemme fondamentale**

**Tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  est équipotent à  $\mathbb{N}$**

Soit  $A \subseteq \mathbb{N}$  infini ; on sait que A admet un plus petit élément  $a_0$ .  
 Comme A n'est pas un singleton ;  $A_1 = A \setminus \{a_0\}$  est non vide, donc admet un plus petit élément  $a_1$ , qui vérifie  $a_0 < a_1$   
 Comme A n'est pas de cardinal 2 ;  $A_2 = A \setminus \{a_0, a_1\}$  admet un plus petit élément  $a_2$ , qui vérifie  $a_0 < a_1 < a_2$   
 Supposons que l'on ait construit n éléments  $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n$  dans A.  
 Comme A n'est pas fini, l'ensemble  $A_{n+1} = A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  est non vide et admet donc un plus petit élément  $a_{n+1}$ , qui vérifie  $a_n < a_{n+1}$ . Par récurrence, on construit ainsi une suite  $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n < a_{n+1}$  c'est-à-dire une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  définit par  $f(n) = a_n$ , qui strictement croissante, donc injective.  
 Montrons que  $f$  est surjective, par l'absurde, supposons  $\exists y \in A / y \neq f(n), \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / a_m < y < a_{m+1}$ .  
 Comme  $a_m < y$ , on a  $y \in A_{m+1} = A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ .  
 Comme  $a_{m+1}$  est le plus petit élément de  $A_{m+1}$ , on doit alors,  $a_{m+1} \leq y$ , d'où la contradiction  
 $\Rightarrow f$  est une bijection de  $\mathbb{N}$  sur A  $\Rightarrow$  est Donc A est équipotent  $\mathbb{N} \Rightarrow \text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N})$ .

**2° Lemme 1**

**$\mathbb{N}^2$  est dénombrable, donc  $\mathbb{N}^2$  est équipotent à  $\mathbb{N}$**



On peut faire la liste des couples d'entiers par diagonales  $D_n$  :

$$\begin{array}{l}
 D_n : D_0 ; \quad D_1 ; \quad D_2 ; \quad D_3 ; \quad D_3 ; \dots \\
 N^2 : (0,0) ; (1,0) (0,1) ; (2,0) (1,1) (0,2) ; (3,0) (2,1) (1,2) (0,3) ; (4,0) (3,1) (2,2) (1,3) (0,4) ; \dots (n,m) \\
 N : \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad \dots \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m
 \end{array}$$

Ce qui revient à constater par induction que l'application

$$f : N^2 \rightarrow N : (n,m) \rightarrow \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m \quad (\text{fonction de couplage de Cantor ; terme explicite de la bijection=y})$$

Est une bijection (strictement croissante) puisque  $\forall y \in N, \exists! (n,m) \in N^2 / f(n,m) = y$

$$\Rightarrow N^2 \text{ est équipotent à } N \Rightarrow \text{Card}(N^2) = \text{Card}(N) .$$

### 3° Lemme 2

**Si  $N^2$  pour est équipotent à  $N$ , alors l'ensemble  $N^3$  est équipotent à  $N$**

Cela se démontre par récurrence, si  $N^3$  est équipotent à  $N$ , alors  $N^{2+1}$  est équipotent à  $N^2 \times N$  est donc à  $N \times N$  Et finalement à  $N$ .

#### **CONCLUSION FINALE :**

$D$ , l'ensemble des entiers pairs et  $P$  l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de  $N$

D'après le Lemme 1, ils sont donc équipotents à  $N$ , comme selon le Lemme 2,  $N^2$  est équipotents à  $N$

$$\Rightarrow f : P^2 \rightarrow N \text{ qui est une } \underline{\text{bijection}} \Rightarrow P^2 \text{ est équipotents à } N. \Rightarrow \text{Card}(D) = \text{Card}(P^2) .$$

Si  $\text{Card}(D) > \text{Card}(P^2)$ , alors il y aurait des nombres pairs qui ne peuvent générer des sommes de 2 premiers  
 Puisque que les images de l'ensemble  $P^2$  ont déjà un et un seul antécédent dans  $D$ , et que pour le restant des pairs de l'ensemble  $D$ , la seule possibilité est de générer des somme de 2 nombres non premiers ; comme dans notre cas  $\text{Card}(D) = \text{Card}(P^2)$ .cette possibilité est nulle,  $\Rightarrow f : P^2 \rightarrow D$  est une bijection :

-  $f$  est donc injective :  $\forall (p, p') \text{ et } (c, c') \in P^2, (p+p') = n \text{ et } (c+c') = n', \text{ si } (p+p') = (c+c') \text{ alors } n = n',$   
 $(n \text{ et } n', \text{ pairs } \in D.)$

-  $f$  est donc surjective :  $\forall n \text{ pair } \in D, \exists (p, p') \in P^2, (p+p') = n.$

Donc :

**Il n'existe pas de nombre PAIR  $> 3$  qui n'est la somme de deux premiers. (3)**

**(1) ou (2) ou (3)  $\Rightarrow$  Q n'est pas Fausse**

$\Rightarrow$  Nous déduisons alors, selon le principe du tiers exclu, que Q est Vraie



P est vraie, Q est Vraie  $\Rightarrow P \Leftrightarrow Q$  , autrement dit **si Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair, Alors Tout nombre pair > 3 est la somme de deux nombres premiers** , la conjecture forte de Goldbach est vraie aussi CQFD.

## B) Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impair:

Soit trois nombres premiers de la forme  $6m \pm 1$ ,  $6n \pm 1$ , et  $6p \pm 1$  avec  $m, n$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .  
Nous aurons 8 sommes à trois, possibles :

$$1^\circ \text{ soit } S = (6m+1) + (6n+1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 3 \Rightarrow \text{d'après th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$2^\circ \text{ soit } S = (6m+1) + (6n+1) + (6p-1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$3^\circ \text{ soit } S = (6m+1) + (6n-1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$4^\circ \text{ soit } S = (6m+1) + (6n-1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$5^\circ \text{ soit } S = (6m-1) + (6n-1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 3 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$6^\circ \text{ soit } S = (6m-1) + (6n+1) + (6p-1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$7^\circ \text{ soit } S = (6m-1) + (6n-1) + (6p+1) = 6(m+n+p) - 1 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

$$8^\circ \text{ soit } S = (6m-1) + (6n+1) + (6p+1) = 6(m+n+p) + 1 \Rightarrow \text{d'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 3} \\ \Rightarrow S \text{ est IMPAIRE } \forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$$

**La premi\u00e8re condition n\u00e9cessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme  $6m \pm 1$ ,  $6n \pm 1$  ou  $6p \pm 1$  v\u00e9rifi\u00e9e , la propri\u00e9t\u00e9 IMPAIRE est \u00e9tabli pour ces sommes aussi , quelque soit  $m, n \& p \in \mathbb{N}^*$ , S est impaire, non divisible par 2**

$\Rightarrow$  **Donc  $\forall m, n \& p \in \mathbb{N}^*$ , la somme de 3 premiers est IMPAIRE, y compris quand :**

**1)-  $m, n$  et  $p \neq 6xy + x + y$  ou  $m, n$  et  $p \neq 6xy - x - y$  ; condition suffisante pour que  $6m + 1$ , ou  $6n + 1$  ou  $6p + 1$  soient premiers. (D'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 1)**

$\Rightarrow \exists k, k' \text{ et } k'' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m + 1)(=)$ ,  $k' = (6n + 1)(=)$  et  $k'' = (6p+1)(=)$  .

. Si  $k > 0$ ,  $k' > 0$  et  $k'' > 0 \Rightarrow (m+k), (n+k')$  et  $(p+k'') \neq 6xy + x + y$  ou  $(m+k), (n+k')$  et  $(p+k'') \neq 6xy - x - y$

$\Leftrightarrow 6m + 1, 6n + 1$  et  $6p + 1$  sont surement Premiers sans avoir \u00e0 d\u00e9terminer  $x$  et  $y$ .

Puisque  $k, k'$  et  $k''$  sont diff\u00e9rent de 0 selon **th\u00e9or\u00e8me 2**.

**2) - y compris aussi quand :  $m, n$  et  $p \neq 6xy + x - y$  ; condition suffisante pour que  $6m - 1, 6n - 1$  ou  $6p - 1$  soient premiers. (D'apr\u00e8s th\u00e9or\u00e8me 1)**

$\Rightarrow \exists k, k' \text{ et } k'' \in \mathbb{R}$ , tel que,  $k = (6m - 1)(=)$ ,  $k' = (6n - 1)(=)$  et  $k'' = (6p-1)(=)$

. Si  $k > 0$ ,  $k' > 0$  et  $k'' > 0 \Rightarrow (m+k), (n+k')$  et  $(p+k'') \neq 6xy + x - y$

$\Leftrightarrow 6m - 1, 6n - 1$  et  $6p - 1$  sont sûrement Premiers sans avoir à déterminer  $x$  et  $y$ .

**PREMIERE CONCLUSION : Tout nombre impair  $> 5$ , est la somme de trois nombres premiers,**

Soit la proposition **P = Toute somme S de trois nombres premiers  $> 5$  est impaire**

Et sa réciproque **Q = Tout nombre impair  $> 5$  est la somme de trois nombres premiers**

Notez bien ' encore une fois, que Q est bien la réciproque de P, car tout les impairs et les nombres premiers, dont il est question ici sont bien minorés, puisque que le premier impair commence par **15** ( $5+5+5$ ), et les nombres premiers sont de la forme  $6n \pm 1$  dont le premier commence par **5**.

**Supposons que Q est Fausse :**

a)  $\Rightarrow \exists$  un nombre PAIR  $> 5$  qui est la somme de trois nombres premiers (\* nom impair = Pair)

Ou

b)  $\Rightarrow \exists$  un nombre IMPAIR  $> 5$  qui n'est pas la somme de trois nombres premiers

**Démonstration du a) :**

Soit  $p, p'$  et  $p''$  3 nombres premiers,  $\exists$  un nombre PAIR  $P / P = p + p' + p''$

Or le « théorème-3 » nous apprend que *la somme  $p + p'$  est paire et que un nombre Pair  $+ p''$  impair donne un nombre impair*, et pour  $\exists$  un nombre PAIR  $> 5 = (p + p' + p'')$  PAIR, il faut que l'un des nombres premiers  $p$  soit pair

$\Rightarrow$  l'un des trois premiers  $p, p'$  ou  $p''$  doit être pair

$\Rightarrow \exists$  un nombre premier pair  $> 5$

$\Rightarrow$  Donc ce nombre premier pair  $> 5$  sera divisible par lui-même, 1 et 2 puisque qu'il est pair, donc ce n'est pas Un nombre premier, Absurde.

$\Rightarrow$  Il n'existe pas de premiers  $p$  ou  $p'$  ou  $p''$ , pair  $> 5$

**$\Rightarrow$  Donc il n'existe pas de nombre PAIR  $> 5$  qui est la somme de trois nombres premiers (3)**

**Démonstration du b-1) :**

$\exists$  Un nombre IMPAIR  $> 5$  qui n'est pas la somme de trois nombres premiers

or  $\forall x \in \mathbb{N}, x > 5; \forall p, p', p''$ , premiers  $\in \mathbb{N}; \exists y \in \mathbb{N}$ , que si  $x > y$ , alors  $(x-y) = p + p' + p''$  ou bien si  $x < y$ , alors  $(y-x) = p + p' + p''$

Comme  $p, p'$  et  $p''$  premiers  $> 5$  sont toujours impairs, leurs somme  $(p + p' + p'')$  est toujours impair selon le « théorème-3 » :

Si  $x > y$ ,  $x$  est pair,  $(p + p' + p'') = l$  impair  $\Rightarrow x - y = l \Rightarrow x = (l + Y)$ ,  $(l + Y)$  est pair selon le « théorème-3 » ssi  $Y$  est impair.

Ou

Si  $x > y$ ,  $x$  est impair,  $(p + p' + p'') = l$  impair  $\Rightarrow x - y = l \Rightarrow x = (l + Y)$ ,  $(l + Y)$  est impair selon le « théorème-3 » ssi  $Y$  est pair.

Si  $x < y$ ,  $x$  est pair,  $(p + p' + p'') = l$  impair  $\Rightarrow y - x = l \Rightarrow x = (Y + l)$ ,  $(Y + l)$  est pair selon le « théorème-3 » ssi  $Y$  est impair.

Ou

Si  $x < y$ ,  $x$  est impair,  $(p + p' + p'') = l$  impair  $\Rightarrow y - x = l \Rightarrow x = (Y + l)$ ,  $(Y + l)$  est impair selon le « théorème-3 » ssi  $Y$  est pair.

$x$  et  $y$  doivent être de parité différente ( $x$  et  $y$  de même parité dans la conjecture forte), comme il y'a autant de nombres pairs que d'impairs,  $\forall x > 5 \in \mathbb{N}$ ,  $(x-y)$  ou  $(y-x) = (p + p' + p'')$  sont toujours impairs aussi.

**Donc il n'existe pas de nombre IMPAIR  $> 5$  qui n'est la somme de trois premiers. (4)**

**Démonstration du b-2) :**

$\mathbb{I}$ , l'ensemble des entiers impairs, et  $\mathbb{P}$  l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de  $\mathbb{N}$

D'après le Lemme 1, ils sont donc équipotents à  $\mathbb{N}$ , comme selon le Lemme 3,  $\mathbb{N}^3$  est équipotents à  $\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^3 \text{ est équipotents à } \mathbb{N}. \quad \Rightarrow \text{Card}(\mathbb{I}) = \text{Card}(\mathbb{P}^3).$$

### CONCLUSION FINALE :

Si  $\text{Card}(\mathbb{I}) > \text{Card}(\mathbb{P}^3)$ , alors il y aurait des nombres impairs qui ne peuvent générer des sommes de 3 premiers. Puisque que les images de l'ensemble  $\mathbb{P}^3$  ont déjà un et un seul antécédent dans  $\mathbb{I}$ , et que pour le restant des impairs de l'ensemble  $\mathbb{I}$ , la seule possibilité est de générer des somme de 3 nombres non premiers ; comme dans notre cas  $\text{Card}(\mathbb{I}) = \text{Card}(\mathbb{P}^3)$ . cette possibilité est nulle, donc :  $\Rightarrow f : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{D}$  est une bijection :

-  $f$  est donc injective :  $\forall (p, p', p'') \text{ et } (c, c', c'') \in \mathbb{P}^3, (p+p'+p'') = n \text{ et } (c+c'+c'') = n', \text{ si } (p+p'+p'') = (c+c'+c'')$   
Alors  $n = n'$  ( $n$  et  $n'$  impairs  $\in \mathbb{I}$ )

-  $f$  est donc surjective :  $\forall n$  impair  $\in \mathbb{I}, \exists (p, p', p'') \in \mathbb{P}^3, (p+p'+p'') = n.$

Donc :

**Il n'existe pas de nombre IMPAIR  $> 5$  qui n'est pas la somme de trois premiers. (5)**

Selon (3) ou (4) ou (5)  $\Rightarrow$  Q n'est pas Fausse

$\Rightarrow$  Nous déduisons alors, selon le principe du tiers exclu, que Q est Vraie

P est vraie, Q est Vraie  $\Rightarrow P \Leftrightarrow Q$ , autrement dit **si Toute somme S de trois nombres premiers  $> 5$  est impaire, alors Tout nombre impair  $> 5$  est la somme de trois nombres premiers**, la conjecture faible de Goldbach est donc vraie

CQFD.

Casablanca le 12/05/2016 - 22:00

BERKOUK Mohamed ; email: [bellevue-2011@hotmail.com](mailto:bellevue-2011@hotmail.com)

### REFERENCE

[1] Conference du Mr. KRAFFT du 12 avril 1798, in *Nova acta Academiae Scientiarum Imperialis* – p.220