La conjecture de Collatz a été découverte par ce dernier dans les années vingt du 20° siècle. Elle était en ce moment là appelé « problème 3x+1 » ; elle a pris d'autre noms parmi autres la suite de Collatz qui se définit simplement comme suit :

$\forall x \in N^*$, *partant* de x ; s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1 (3x+1) ; s'il est pair on le divise par 2 (x/2) ; si on répète la transformation, on finit par tomber sur 1 qui suit son « vol » infiniment dans le cycle trivial, c'est-à-dire 1, puis 4, puis2, puis encore 1, ainsi de suite.

Depuis on a cessé d'utiliser l'informatique pour marquer des records de x grand, ∈ N* qui permettent de rechercher un hypothétique contre exemple . Le projet « 3x+1@home » entend s'attaquer à toutes les suites de Collatz comprises entre 2^{71} et 2^{72} . Jusqu' à peu prés cette limite, la conjecture est vérifiée.

Je crois que si on vérifie les trois étapes suivantes, on peut démontrer la conjecture à savoir :

1)- *∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1*
2)- *$\forall x \in N^*$, la suite de Collatz décroit vers un x' / $x' < x$*
3)- *$\forall x \in N^*$, la suite de Collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit Élément.*

1)- ∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1

PROPSITION I :

$\forall x \in N^*$; $\forall$ le cycle de la suite de Collatz défini sur x, son plus petit élément est toujours Impair.

Démonstration : soit *m* le plus petit élément du cycle C ; C étant la trajectoire de *m*. Soit m' le nombre qui suit *m*, dont il est issu

Alors m'est aussi dans la trajectoire *m* ; $m' > m$, puisque m est le plus petit élément d'après notre proposition . Si *m* est pair $\Rightarrow m' = m/2 \Rightarrow m > m'$ ce qui est absurde, donc <u>*m* est impair</u> et $m' = 3m + 1$ avec *m* toujours $< m'$.

CQFD.

Partant de notre proposition I, soit un cycle de longueur $k = 3$ dans N*. On notera ses k éléments distincts deux à deux a_1, a_2, a_3.

Supposant que le plus petit des éléments est a_3. Alors a_3 est forcément impair, et en particulier $a_1=3a_3+1$. a_2 devra être $> a_3 \Rightarrow$ $a_3 = a_2/2$

Si a_1 est impair $==> a_2= 3a_1+1 \Rightarrow a_1= (a_2-1)/3 \Rightarrow a_1= ((2a_3)-1)/3 \Rightarrow a_1 \simeq 2/3 .a_3 \Rightarrow a_1 < a_3$

Absurde, donc a_1 est pair $\Rightarrow$ $a_2=a_1/2$

Arrivant au calcul du Produit P, des termes du cycle :

$P = a_1. a_2 .a_3$ remplaçant par leurs valeurs calculées,

$P = (3a_3+1). a_1/2. a_2/2$ établissant l'équation associée au produit des termes du cycle.

$$a_1. a_2 .a_3 = (3a_3+1). a_1/2. a_2/2$$

== > $a_1. a_2 .a_3 = \frac{(3a3+1).a1.a2}{4}$

== > $4(a_1. a_2 .a_3) = (3a_3+1). a_1. a_2$

== > $4 = (3 + \frac{1}{a3})$: l'équation sous sa forme épurée admet comme solution $a_3 = 1$ (4=4) , donc $a_2 =2.a_3= 2$ et $a_1= 3.a_3+1 = 4$, l'équation associée au cycle trivial 4->2 ->1

Existent – ils d'autres x1, x2, x3 définis dans N*, qui forment un autre cycle avec k =3 ?

Nous avons 3 nombres x_1, x_2 et x_3 avec chacun 2 façons de se présenter, s'il est pair, soit en (x/2) dite a, soit en (3x+1) dite b s'il est impair, donc nous avons $2^3= 8$ cas possibles que nous allons examiner en permutant les opérations a et b par 3 :

-1) cas : a a a ⇒ ((x/2)/2) / 2 = x ⇒ x = 0

(Après 3 opérations, il retourne à x puisque c'est un cycle, donc = x)

-2) cas : a a b ⇒ 3((x/2)/2) +1 = x ⇒ x = 4

-3) cas : a b a ⇒ ((3x+1)/2)/2 = x ⇒ x = 1

-4) cas : a b b ⇒ (3(3x+1) +1)/2 = x ⇒ -4/7

-5) cas : b b b ⇒ 3(3(3(x+1) +1) +1 = x ⇒ x = -1/2

-6) cas : b a b ⇒ 3((3x+1)/2) +1 = x ⇒ x = -5/7

-7) cas : b b a ⇒ 3(3(x/2) +1) +1 = x ⇒ x = -8/7

-8) cas : b a a ⇒ (3(x/2) +1) /2 = x ⇒ x = 2

Les seuls solutions de nos équations dans N* sont $x_1= 1$, $x_2=2$ x, $x_3= 4$ qui sont celles du cycle trivial 4 -> 2-> 1 ; les autres solutions (0, -4/7,-1/2,-5/7,-8/7) n'appartiennent pas à N*

Donc, dans N*, ∃!cycle de longueur k=3, c'est le cycle trivial 4->2->1 CQFD

Cas ou la longueur du cycle $k > 3$:

Supposons qu'il existe un cycle de la suite de Collatz de longueur $k > 3$, $a1$ étant le plus petit élément, défini par les termes suivants:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$$

Pour opérer les calculs selon la suite de Collatz sur les termes $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_k$ Nous devrions connaitre leur parité. Or tout ce que nous savons par notre proposition I ci-dessus, c'est que a_1, le plus petit élément est impair. Quant aux autres termes, soit en procédant théoriquement par un tri des termes du cycle suivant la parité ; indépendamment de l'indice et de sa position exacte dans la suite, puisqu' on l'ignore.

Nous posions ensuite le produit de ces k termes, qu'on appellera P.(la commutativité du produit nous dispense de la position des vrais indice du cycle)

En posant d'abord, en les triant par parité, puis en spécifiant les termes impairs par a, les termes pairs par b ; puis en désignant par m le nombre de termes (ou cardinal) impairs, et h le nombre de termes pairs.

On obtient

$$\mathbf{P = a_1 . a_2 \ldots . a\,m \quad . b_1 . \ b_2 \ldots . bh}$$

Exprimant maintenant chaque terme par sa valeur puisque nous avions défini sa parité en le multipliant par3x+1 s'il impair et en le multipliant par x/2 s'il est pair :

$$\mathbf{P = (3a_1+1). (3\,a_2+1) \ldots . (3\,am+1). \quad (b_1)/2. (b_2)/2 \ldots (bh)/2.}$$

Soit l'équation qui relie les deux formes du produit sous sa forme brute :

$$a_1 . a_2 \ldots . a\,m \quad . b_1 . \ b_2 \ldots . bh = (3a_1+1). (3\,a_2+1) \ldots . (3am+1). \ (b_1)/2. (b_2)/2 \ldots (bh)/2.$$

Simplifions l'équation par :

$$(a1 . a_2 \ldots . a\,m). (b_1 . \ b_2 \ldots . bh) = \frac{(3a1+1).(3\,a2+1) \ldots . (3\,a\,m+1). \ (b1).(b2) \ldots (bh))}{2\hat{}h}$$

$$== > 2^h . (a_1 . a_2 \ldots . a\,m) \quad . (b_1 . \ b_2 \ldots . bh) = (3\,a2+1) \ldots . (3\,a\,m+1). \ (b1). (b2) \ldots \ (bh)$$

$$== > \qquad 2^h (a_1 . a_2 \ldots . a\,m \quad) = (3a1+1). (3\,a2+1) \ldots . (3\,a\,m+1)$$

$$2^h = \frac{(3a1+1)}{a1} . \frac{(3a2+1)}{a2} \ldots . \frac{(3am+1)}{am}$$

$$2^h = (3+ \frac{1}{a1}) . (3 + \frac{1}{a2}) \ldots . (3 + \frac{1}{am})$$

Intéressons nous un instant au terme de droite que l'on nomme D.

$$2^h = (3+\frac{1}{a1}).(3+\frac{1}{a2})\ \ldots.(3+\frac{1}{am})$$

Vérifions l'équation avec 3^m, borne minimale de D <==> $3^m < D$

Pour qu'il n'existe aucun cycle de longueur k, $\forall$ k>3 $\in N$; il suffit de vérifier l'inégalité de 2^h avec ***D.***

Sachant que D > 3^m, par : $2^h < 3^m < D \Rightarrow 2^h < 3^m$

Selon h et m, trois cas peuvent se présenter :

*1) – **<u>si m=h</u>** , $2^h < 3^m \Rightarrow h.\log 2 < m.\log 3 \Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} < \frac{m.\log 3}{h.\log 3}$*

$$\Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3},\ comme\ \frac{m}{h} = 1,\ \Rightarrow 1 > \frac{\log 2}{\log 3}\ \text{ce qui est évident}$$

*2)- **<u>si m >h,</u>** $2^h < 3^m \Rightarrow h.\log 2 < m.\log 3 \Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} < \frac{m.\log 3}{h.\log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$*

Comme $m > h \Rightarrow \frac{m}{h} > 1 \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, ce qui est évident

*3)- **<u>si m < h</u> :** la solution n'est pas évidente, comme m<h, il se peut que $\frac{m}{h}$ soit $= \frac{\log 2}{\log 3}$*

Et vérifie notre équation ci-dessus, et donc l'existence du cycle de longueur k> 3. Or nous avons :

a) soit $2^h < 3^m \Rightarrow h.\log 2 < m.\log 3 \Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} < \frac{m.\log 3}{h.\log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, *ex $2^4 < 3^3$*

Ou bien

b) soit $2^h > 3^m \Rightarrow h.\log 2 > m.\log 3 \Rightarrow \frac{h.\log 2}{h.\log 3} > \frac{m.\log 3}{h.\log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$, *ex $2^7 > 3^4$*

Or nous avons $2^h < 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3} \Leftrightarrow 2^h > 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$; cette équivalence logique est dû, si on multiplie ou divise les 2 membres d'une inéquation par une même valeur strictement négative (ex : -1), le sens de l'inéquation change tandis que les solutions de l'inéquation <u>restent les mêmes.</u>
Il suffit donc de démontrer, si m< h, l'une des cas en a) ou en b) par la transformation de Collatz et d'en tirer les conclusions

Démontrons alors cette inégalité $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$:

Si le vol N atterrit en 1 alors le nombre **h** d'étapes paires du vol N et

Le nombre **m** d'étapes impaires du vol N vérifient

$\frac{m}{h} < \frac{log2}{log3}$ ***: Démonstration***

Soit N = U(0), U(1), ..., U(p)=l le vol N

Posons la suite de simplification pour $N = \left(\frac{U(0)}{U(1)}\right).\left(\frac{U(1)}{U(2)}\right).\left(\frac{U(2)}{U(3)}\right)\ldots\ldots\left(\frac{U(p-1)}{U(p)}\right)$

Donc $\log N = \log\left(\frac{U(0)}{U(1)}\right) + \log\left(\frac{U(1)}{U(2)}\right) + \log\left(\frac{U(2)}{U(3)}\right) \ldots + \log\left(\frac{U(p-1)}{U(p)}\right)$

Lorsque i est une étape paire on a : $\log\left(\frac{U(i)}{U(i+1)}\right) = \log\left(\frac{U(i)}{U(i)}*2)\right) = \log 2$

Lorsque i est une étape impaire on a :

$$\text{Log}\left(\frac{U(i)}{U(i+1)}\right) = \log\left(\frac{U(i)}{3*U(i)+1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}}\right) = -\log\left(3+\frac{1}{U(i)}\right)$$

$==>$ $\log N =$ **h**.log(2) + **m**. $\log\left(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}}\right)$

$==>$ $\log N =$ **h**.log(2) + (-**m**. $\log\left(3+\frac{1}{U(i)}\right)$) (1)

Avec $U(i)$ grand $==>$ $\frac{1}{U(i)} \approx 0$, prenant seulement la borne minimale log(3) sans les $\frac{1}{am}$

puisque **h**.log(2) -**m**. $\log\left(3+\frac{1}{U(i)}\right) <$ **h.** log(2) – **m.** log(3) ; l'équation (1) devient donc :

0 < log N < **h.** log(2) – **m.** log(3)

$==>$ 0 < h.log(2) –m .log(3)

$==>$ m.log(3) < h .log (2) , divisons les 2 parties de l'inéquation par h.log(3)

$$\text{D'où} \quad \frac{m}{h} < \frac{log2}{log3}$$

=> ***∀ k>3 ∈N ; il n'existe aucun cycle de longueur k>3***

Donc, ∃! Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1 CQFD

2)- ∀x ∈N*, la suite de collatz décroit vers un x' / x' < x

De ℕ, l'ensemble des entiers naturels, considéré comme suite croissante, on peut extraire 4 sous-suites , étant donné leurs coefficients directeur positifs , donc également croissantes sous forme de 4k+1 , 4k+2, 4k+3, et 4k+4 avec k ∈ à ℕ .

Si nous observons la transformation de Collatz sur ces 4 sous-suites nous constations :

1° - 4K+2 et 4k+4 tous deux pairs, après 1 ou 2 suites de divisions successives par 2 , finissent par décroitre : 4k+2 pair -> 2k+1 (2k+1 impair, $\forall$ **k** ∈ **N)** ->6k+4 ->3k+2 ; donc 3k+2 < 4k+2

4k+ 4 pair -> 2k+2 - > k+1 ; donc k+1 < 4k + 4

(En Sachant que la parité de k+1 ou 3k +2 dépend de la parité de k)

2° - 4k+1 est impair ⇒ 1er étape : 3(4k+1) +1 = 12k+4 qui est pair

⇒ 2er étape :(12k+4)/2 = 6k+2 qui est pair

⇒ 3er étape :(6k+2)/2 = 3k+1 parité inconnue, mais nous constations que 4k+1 décroisse puisque 3k+1 < 4k+1

3° - 4K+3 est impair ⇒ 1er étape : 3(4k+3) +1 = 12k+10 qui est pair

⇒ 2er étape : (12k+10)/2 = 6k+5 qui est impair

⇒ 3er étape : 3(6k+5) +1 = 18k+16 qui est pair

⇒ 4er étape : (18k+16)/2 = 9k+8 parité inconnue, mais nous constations que 4k+1 croisse puisque 9k+8 > 4k+1

Démontrons dans un premier temps que tout nombre entier de la forme 4k+3 suivant la suite de Collatz pourrait se transformer en 4k+1 :

- ***Tout nombre impair peut s'écrire sous forme $2^p.x - 1$,*** ∀ p ∈ **N* :**

∀ x ∈ N, le produit = x * une puissance de 2 est Pair, ôté de 1 est un nombre IMPAIR

- ***Tout nombre impair de forme 4k+1 peut s'écrire sous forme $2^p.x - 1$ avec p=1 ;(ou* 2x – 1) :**

Soit x= 4k+1 ⇒ 2x - 1 = 2(4k+1)-1 = 8k + 1 posons k'=double de k =2 k

⇒ 2x - 1 = 4k' +1 (k' ∈ à ℕ)

∀ k & k' ∈ N, ∀ x impair ∈ N, 2x-1 est de la forme 4 k'+1

- ***Tout nombre impair de forme 4k+3 peut s'écrire sous forme $2^p.x - 1$ avec p> 1 :***

Comme les nombres impairs de la forme $2^p.x – 1$ *, avec p=1 s'écrivent sous forme 4k +1*

⇒ $2^p.x - 1$ avec p = 1 ≠ $2^p.x - 1$ avec p > 1 , donc les nombres impairs $2^p.x - 1$ avec p > 1

Ne peuvent s'écrire sous forme 4k+1 , et comme l'ensemble des nombres impair est constitué par les impairs 4k+1 et 4k+3 ⇒ que les nombres impairs $2^p.x - 1$ avec p > 1 doivent nécessairement

Etre de la forme 4k+3.

Nous démontrons ensuite qu'un nombre impair de la forme $2^p.x - 1$ avec p > 1 peut par la suite de Collatz passer à la forme 2x-1 (avec p=1), c'est-à-dire de la forme 4k+3 à la forme 4k+1.

Appliquons la transformation de Collatz sur le nombre impair 4k+3 :

Soit le nombre N1= 4k+3 $= 2^p.x - 1$

Calculons N2 = (3N1 +1)/2 $= (3(2^p.x - 1) + 1)/2 = (3.2^p.x - 2)/2 = 3.2^{p-1}.x - 1$: 1° étape

N3 = (3N2 +1)/2 $= (3(3.2^{p-1}.x - 1) + 1)/2 = (3^2.2^{p-1}.x - 2)/2 = 3^2.2^{p-2}.x - 1$:2° étape

…… Déduisons par récurrence le terme général de la suite ; $Np = 3^{p-1}.2.x - 1$: (p-1) °étape

Finalement la puissance p, de 2 descend à 1 , le nombre prend la forme 2x'-1 ($x' = 3^{p-1}.x$), (avec x' toujours impair comme x), c'est-à-dire de la forme 4k+1, mais reste supérieur au 4k+3 du départ comme nous le montrons :

$$2^p.x - 1 < 3^{p-1}.2.x - 1 \Rightarrow 2^p. < 3^{p-1}.2 \Rightarrow 2^{p-1} < 3^{p-1} \text{ Ce qui est évident}$$

Nous avons vu en 1° que les formes 4k+2 et 4k +4 (ou 4k) finissent par décroitre mais nous remarquions que le processus est plus évident dans la forme 4k+4 que dans la forme 4k+2

Parce que seuls les 4k+4 contiennent les puissance de 2 (P2) qui garantissent un trajectoire vers 1 suite à des divisions successives par 2 , mais il ya aussi des non- P2 dans 4k+4 et seulement des non P2 dans la forme 4k+2 .(selon études des 2 suites.)

En ce qui concerne les 4k+1 et les 4k+3 , si 4k+1 décroit au bout de trois étapes et durant la transformation de Collatz, les 4k+3 finissent par se transformer en 4k+1 et décroitre rien nous garantit que ce dernier 4k+1 , reste dans cette forme et décroit vers 1 car le processus de la transformation est en réalité réciproque comme le montre cette exemple du nombre 19 de forme 4k+3 (4*4+3) génère dans la trajectoire 29 de forme 4k+1 (4*7 +1) qui donne 11 de forme 4k+3 (4*2+3), qui donne à son tour un 4k+1 : 17 (puis 13, puis 5 qui reste le dernier 4k+1 de la suite de Collatz si bien *sur* 32 ne prend pas sa place dans un autre $x \in N^*$.

19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1

$\forall x \in N^*$, la suite de collatz décroit vers un x' / x' < x

Nous constations que la décroissance de 4k+2 et 4k+4 est acquise , et si du fait de la réciprocité du passage de la forme 4k+3 à 4k+1, nous considérons qu'ils se transforment entre eux équitablement ;

Nous concluons que dans les ¾ des cas , la tendance est à la décroissance, il nous reste que de trouver le moyen de suivre le vol et de démontrer effectivement qu'ils terminent dans le cycle trivial c'est que nous essayons de faire dans la 3° partie qui suit.

3)- *∀x ∈N*, la suite de collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1 , est le plus petit élément.*

PROPOSITION –II

∀ x impair ∈ N, ∀ n ∈ N* ; ∃! x / $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x_i$; soit $x_i = 1$. *(Moyenne arithmétique)*

Démonstration :

Soit Un ; la suite des nombres impairs ; ∀ n∈ N , $U_n = 2n + 1$ ($x_1=U_1=1$; $x_2=U_2=3$; $x_3=U_3=5$; $x_4=U_4=7$ …).

Soit $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_n$; $V_1= (\frac{U(1)}{1}) = 1$: $V_2=\frac{(U_1+U_2)}{2} = 2$; $V_3=\frac{(U_1+U_2+U_3)}{3} = 3$;

$V_4=\frac{(U_1+U_2+U_3+U_4)}{4} = 4$ ⇒ …. Par récurrence, déduisons sa formule explicite $V_n = n$

$n < 2n+1 \iff V_n < U_n$ et $V_n = U_n$ ssi $n=1$ c à d x_i impair $= 1$; d'où la proposition II.

PROPOSITION –III

Dans N, l'ensemble des entiers naturels ; il ya autant de nombre pairs que d'impairs

Soit la formule du binome de Newton $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$

Avec a = 1 & b = 1 ; ∃ M parties de l'ensemble E / $M = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ==> $M = (1+1)^n = 2^n$

Soit Mp le nombre de parties de cardinal pair : $M_p = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \ldots = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p}$

Soit Mi le nombre de parties de cardinal impair dont la somme est comptée jusqu'au dernier impair inferieur à n : $M_i = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots\ldots = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1}$;

Avec a = 1 & b =- 1 ==> $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \ldots - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} - \binom{n}{5} - \ldots$

parce que $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ signe négative qui affecte Mi

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$

$$==> \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1} = 0 \text{ ; on déduit que } \sum_{p=0}^{n/2}\binom{n}{2p} = \sum_{p=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2p+1}$$

$==>$ **Le nombre de sous-parties de cardinal pair = nombre de sous-parties de cardinal impair**

La suite de Collatz peut être présenté sous un produit en spécifiant les nombres impairs (a_1, a_2,...am) et les nombres pairs (b_1. b_2 ....bh) ; encore une fois, selon deux formes de produits P1, puis P2 exprimé suivant la transformation de Collatz. m et h étant respectivement le cardinal des nombres impairs et pairs.

P2 = a_1. a_2 ....a m . b_1. b_2 ....bh

P1 = (3a_1+1). (3 a_2+1).... (3 am+1). (b_1)/2. (b_2)/2... (bh)/2

Utilisant encore une fois l'équation associée à ce produit sous sa forme brute

$$(\mathbf{a1.a2 \ \ldots.a\,m}) \ \ \mathbf{.b1.\ b2\ \ldots.bh} = (\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3\,a2+1})\ldots.(\mathbf{3\,a\,m+1}). \ \ (\mathbf{b1})/\mathbf{2}.(\mathbf{b2})/\mathbf{2}\ldots(\mathbf{bh})/\mathbf{2}$$

$$(\mathbf{a1.a2 \ \ldots.a\,m}) \ \ \mathbf{.b1.\ b2\ \ldots.bh} = \frac{(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3\,a2+1})\ldots.(\mathbf{3\,a\,m+1}). \ \ (\mathbf{b1}).(\mathbf{b2})\ldots(\mathbf{bh})}{\mathbf{2\hat{}h}}$$

$$2^h = \frac{(\mathbf{3a1+1}).(\mathbf{3\,a2+1})\ldots.(\mathbf{3\,a\,m+1}).}{(\mathbf{a1.a2\ \ldots.a\,m}).}$$

$$2^h = \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$$

$$\text{Or } \ 2^h < 3^m < \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 2^h < \left(3+\frac{1}{a1}\right).\left(3+\frac{1}{a2}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{am}\right)$$

- ***Remplaçons les** ai **par La moyenne arithmétique défini sur m*** $= \sum_{i=1}^{m}\frac{ai}{m} = \mathrm{M}$

  M $>0 \Rightarrow \ 2^h < \left(3+\frac{1}{M}\right).\left(3+\frac{1}{M}\right)\ldots\left(3+\frac{1}{M}\right)$ **m fois**

  $$2^h < \left(\frac{(\mathbf{3M+1}).}{\mathbf{M}}\right)^{\mathbf{m}}$$

- *Supposons un nombre x ∈N* infiniment grand dont la trajectoire par la transformation de Collatz, puise dans tous les nombres pairs et impairs, comme selon la proposition III, il y aura autant de pair que d'impair, on pose donc m=h*

$$2^h < \left(\frac{(\mathbf{3M+1}).}{\mathbf{M}}\right)^{\mathbf{h}} \quad \text{ou} \quad 2^m < \left(\frac{(\mathbf{3M+1}).}{\mathbf{M}}\right)^{\mathbf{m}}$$

- *Appliquons le théorème des fonctions réciproques, c'est-à-dire :*

∀ x ∈ N* (ou $\boldsymbol{R}^+$), si x est positif t x=$\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ ⇔ y=$\sqrt[n]{y^n}$ est <u>unique</u>.

Utilisant la racine nième jusqu'à m ou h, pour arriver au supposé dernier terme de la trajectoire parti d'un grand nombre infini :

$$\sqrt[m]{2^m} < \sqrt[m]{\left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^{m}} \quad \text{Ou} \quad \sqrt[h]{2^h} < \sqrt[h]{\left(\frac{(3M+1).}{M}\right)^{h}}$$

$$2 < \left(\frac{(3M+1).}{M}\right)$$

- soit un nombre quelconque K qui puisse égaliser notre inéquation

$$2 + k = \frac{3M+1.}{M}$$
$$2M + kM = 3M + 1$$
$$kM - M = 1$$

$M(k-1) = 1 \Rightarrow$ admet comme solutions : M=1 & k=2 ($\in$ N*)

Comme, **suivant proposition II :** $\exists!\ M \in N^* / M = \sum_{i=1}^{m} \frac{ai}{m} = ai$ *soit* $ai = 1$, et comme M= 1 donc ai, le dernier terme impair est connu soit ai = 1.

Notre équation épurée et simplifiée devient : $4 = \frac{3ai+1.}{ai}$, observons des 2 cotés :

Du coté droit, l'équation garde les nombres ai impairs, avec ai dernier terme =1

Démonstration :

Si ai = 1 est seulement premier terme de la suite de Collatz, sa transformation est celle qui concerne le cycle trivial : 1->4->2->1, nous constations aussi que c'est aussi le dernier terme ai=1, qui est en même temps le plus petit élément impair, du cycle trivial. (Suivant proposition I).

Si ai est dernier terme impair $> 1 \Rightarrow$ l'équation $4 = \frac{3ai+1.}{ai}$,devient impossible puisque :

$$4 > \frac{3ai+1.}{ai} \Rightarrow 4 > 3 + \frac{1.}{ai} \text{ si ai} > 1$$

Donc ai est nécessairement le dernier terme impair de la suite =1 CQFD

Du coté gauche : partant d'une puissance de 2 très grande et arrivant au dernier terme La racine nième qui colle à la trajectoire de la suite, s'arrête dans notre équation à 4 Le reste est pris en charge finalement par le cycle trivial, par 4 ou par 1, **∀ x pair ou impair ∈ N*** du départ.

Nous avons $4 = \boldsymbol{2^2 = 2^h}$, h = 2 étant le cardinal des nombres pairs dans ce dernier terme pair de la suite, nous connaissons déjà un : c'est 4 nous déduisons nécessairement le deuxième élément pair du cycle trivial : 2, solution aussi de l'équation avec 1 et passage obligé de 4 à 1 par la transformation de Collatz.

Comme ∃! Cycle trivial dans la suite de COLLATZ (1) ⇒∀ x ∈ N*, x décroisse suivant la transformation de COLLATZ (2), atterri nécessairement dans le cycle trivial dont 1 son plus p?tit élém?nt. (3) CQFD

CASABLANCA LE 21.11.2014 16H :48

BERKOUK MOHAMED, email : b?ll?vu?-2011@hotmail.com

Moham?d.b?rkouk@a?i-maroc.ma

Référence :

J.P- Delahaye - Christian Lasou- UST- Licence S.T -2007.

- Shalom Eliahou, problème 3n+1 : y a-t-il des cycles non triviaux ? – I.des math-2011.