

La conjecture de Collatz a été découverte par ce dernier dans les années vingt du 20^e siècle. Elle était en ce moment là appelé « problème $3x+1$ » ; elle a pris d'autres noms parmi autres la suite de Collatz qui se définit simplement comme suit :

$\forall x \in \mathbb{N}^*$, partant de x ; s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ($3x+1$) ; s'il est pair on le divise par 2 ($x/2$) ; si on répète la transformation, on finit par tomber sur 1 qui suit son « vol » infiniment dans le cycle trivial, c'est-à-dire 1, puis 4, puis 2, puis encore 1, ainsi de suite.

Depuis on a cessé d'utiliser l'informatique pour marquer des records de x grand, $\in \mathbb{N}^*$ qui permettent de rechercher un hypothétique contre exemple . Le projet « $3x+1@home$ » entend s'attaquer à toutes les suites de Collatz comprises entre 2^{71} et 2^{72} . Jusqu'à peu près cette limite, la conjecture est vérifiée.

Je crois que si on vérifie les trois étapes suivantes, on peut démontrer la conjecture à savoir :

- 1)- $\exists!$ Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1
- 2)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de Collatz décroît vers un $x' / x' < x$
- 3)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de Collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit Élément.

1)- $\exists!$ Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1

PROPOSITION I :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; \forall le cycle de la suite de Collatz défini sur n , son plus petit élément est toujours Impair.

Démonstration : soit m le plus petit élément du cycle C ; C étant la trajectoire de m . Soit m' le nombre qui suit m , dont il est issu

Alors m' est aussi dans la trajectoire m ; $m' > m$, puisque m est le plus petit élément d'après notre proposition . Si m est pair $\Rightarrow m' = m/2 \Rightarrow m > m'$ ce qui est absurde, donc m est impair et $m' = 3m + 1$ avec m toujours $< m'$. **CQFD.**

Partant de notre proposition I, soit un cycle de longueur $k = 3$ dans \mathbb{N}^* . On notera ses k éléments distincts deux à deux a_1, a_2, a_3 .

Supposant que le plus petit des éléments est a_3 . Alors a_3 est forcément impair, et en

particulier $a_1 = 3a_3 + 1$. a_2 devra être $> a_3 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2}$

Si a_1 est impair $\Rightarrow a_2 = \frac{3a_1 + 1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{(a_2 - 1)}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{((2a_3) - 1)}{3} \Rightarrow a_1 \approx (\frac{2}{3} \cdot a_3) \Rightarrow a_1 < a_3$

Absurde, donc a_1 est pair $\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2}$

Arrivant au calcul du Produit P , des termes du cycle :

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \quad \text{remplaçant par leurs valeurs calculées,}$$

$$P = (3a_3+1) \cdot a_1/2 \cdot a_2/2 \quad \text{établissant l'équation associée au produit des termes du cycle.}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (3a_3+1) \cdot a_1/2 \cdot a_2/2$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{(3a_3+1) \cdot a_1 \cdot a_2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) = (3a_3+1) \cdot a_1 \cdot a_2$$

$\Rightarrow 4 = \left(3 + \frac{1}{a_3}\right)$: l'équation sous sa forme épurée admet comme solution $a_3 = 1$ ($4=4$), donc $a_2 = 2$, $a_3 = 2$ et $a_1 = 3 \cdot a_3 + 1 = 4$, l'équation associée au cycle trivial $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Existent-ils d'autres x_1, x_2, x_3 définis dans \mathbb{N}^* , qui forment un autre cycle avec $k=3$?

Nous avons 3 nombres x_1, x_2 et x_3 avec chacun 2 façons de se présenter, s'il est pair, soit en $(x/2)$ dite a , soit en $(3x+1)$ dite b s'il est impair, donc nous avons $2^3 = 8$ cas possibles que nous allons examiner en permutant les opérations a et b par 3 :

$$\text{-1) cas : } a \ a \ a \Rightarrow ((x/2)/2) / 2 = x \Rightarrow x = 0$$

(Après 3 opérations, il retourne à x puisque c'est un cycle, donc $= x$)

$$\text{-2) cas : } a \ a \ b \Rightarrow 3((x/2)/2) + 1 = x \Rightarrow x = 4$$

$$\text{-3) cas : } a \ b \ a \Rightarrow ((3x+1)/2)/2 = x \Rightarrow x = 1$$

$$\text{-4) cas : } a \ b \ b \Rightarrow (3(3x+1)+1)/2 = x \Rightarrow x = -4/7$$

$$\text{-5) cas : } b \ b \ b \Rightarrow 3(3(3(x+1) + 1) + 1) = x \Rightarrow x = -1/2$$

$$\text{-6) cas : } b \ a \ b \Rightarrow 3((3x+1)/2)+1 = x \Rightarrow x = -5/7$$

$$\text{-7) cas : } b \ b \ a \Rightarrow 3(3(x/2)+1)+1 = x \Rightarrow x = -8/7$$

$$\text{-8) cas : } b \ a \ a \Rightarrow (3(x/2) + 1) / 2 = x \Rightarrow x = 2$$

Les seules solutions de nos équations dans \mathbb{N}^* sont $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$ qui sont celles du cycle trivial $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$; les autres solutions $(0, -4/7, -1/2, -5/7, -8/7)$ n'appartiennent pas à \mathbb{N}^*

PROPOSITION II

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ définissant la suite de Collatz $\exists!$ cycle de longueur $k=3$,
c'est le cycle trivial $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

CQFD

Cas si la longueur du cycle $k > 3$:

Supposons qu'il existe un cycle de la suite de Collatz de longueur $k > 3$, a_1 étant le plus petit élément, défini par les termes suivants:

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_k \quad [1]$$

Pour opérer les calculs selon la suite de Collatz sur les termes $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_k$ Nous devrions connaître leur parité. Or tout ce que nous savons par notre proposition I ci-dessus, c'est que c_1 , le plus petit élément est impair. Quant aux autres termes, soit en procédant théoriquement par un tri des termes du cycle suivant la parité ; indépendamment de l'indice et de sa position exacte dans la suite, puisqu'on l'ignore.

Nous posons ensuite le produit de ces k termes, qu'on appellera P . (la commutativité du produit nous dispense de la position des vrais indices du cycle)

En posant d'abord, en les triant par parité, puis en spécifiant les termes impairs par a , les termes pairs par b ; puis en désignant par m le nombre de termes (ou cardinal) impairs, et h le nombre de termes pairs ($m \& h \in \mathbb{N}^*$)

On obtient

$$P = a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h \quad [2]$$

Exprimant maintenant chaque terme par sa valeur puisque nous avons défini sa parité en le multipliant par $3x+1$ s'il est impair et en le multipliant par $x/2$ s'il est pair :

$$P = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2. \quad [3]$$

Soit l'équation qui relie les deux formes du produit sous sa forme brute :

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2.$$

Simplifions l'équation par :

$$(a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot (b_1 \cdot b_2 \dots b_h) = \frac{(3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h)}{2^h}$$

$$\Rightarrow 2^h \cdot (a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot (b_1 \cdot b_2 \dots b_h) = (3a_1+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h)$$

$$\Rightarrow 2^h (a_1 \cdot a_2 \dots a_m) = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1)$$

$$2^h = \frac{(3a_1+1)}{a_1} \cdot \frac{(3a_2+1)}{a_2} \dots \frac{(3a_m+1)}{a_m}$$

$$2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right) \quad [4]$$

Intéressons nous un instant au terme de droite que l'on nomme D .

4/19

$$2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

Vérifions l'équation avec 3^m , borne minimale de $D \iff 3^m < D$

Sachant que $D > 3^m$, par : $2^h < 3^m < D \Rightarrow 2^h < 3^m$ ou $3^m < 2^h < D \Rightarrow 2^h > 3^m$

Selon h et m , trois cas peuvent se présenter :

1) - si $m=h$, $2^h < 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 < m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} < \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3}$

$\Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, comme $\frac{m}{h} = 1, \Rightarrow 1 > \frac{\log 2}{\log 3}$ ce qui est évident

2) - si $m > h$, $2^h < 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 < m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} < \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$

Comme $m > h \Rightarrow \frac{m}{h} > 1 \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, ce qui est évident

3) - si $m < h$: la solution n'est pas évidente, comme $m < h$, il se peut que $\frac{m}{h}$ soit $= \frac{\log 2}{\log 3}$

Or nous avons :

a) soit $2^h < 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 < m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} < \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$, ex $2^4 < 3^3$

Ou bien

b) soit $2^h > 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 > m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} > \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$, ex $2^7 > 3^4$ [5]

Or nous avons $2^h < 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3} \iff 2^h > 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$ [6] ; cette équivalence logique est dû,

si on multiplie ou divise les 2 membres d'une inéquation par une même valeur strictement négative (ex : -1), le sens de l'inéquation change tandis que les solutions de l'inéquation restent les mêmes.

Il suffit donc de démontrer, si $m < h$, l'une des cas en a) ou en b) par la transformation de Collatz et d'en tirer les conclusions

Démontrons alors cette inégalité $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$:

Si le vol N atterrit en 1 alors le nombre **h** d'étapes paires du vol N et

5/19

Le nombre **m** d'étapes impaires du vol N vérifient

$$\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \quad \text{:Démonstration}$$

Soit $N = U(0), U(1), \dots, U(p)=1$ le vol N

Posons la suite de simplification pour $N = \left(\frac{U(0)}{U(1)}\right) \cdot \left(\frac{U(1)}{U(2)}\right) \cdot \left(\frac{U(2)}{U(3)}\right) \dots \left(\frac{U(p-1)}{U(p)}\right)$

$$\text{Donc } \log N = \log \left(\frac{U(0)}{U(1)}\right) + \log \left(\frac{U(1)}{U(2)}\right) + \log \left(\frac{U(2)}{U(3)}\right) \dots + \log \left(\frac{U(p-1)}{U(p)}\right)$$

Lorsque *i* est une étape paire on a : $\log \left(\frac{U(i)}{U(i+1)}\right) = \log \left(\frac{U(i)}{U(i)*2}\right) = \log 2$

Lorsque *i* est une étape impaire on a :

$$\log \left(\frac{U(i)}{U(i+1)}\right) = \log \left(\frac{U(i)}{3*U(i)+1}\right) = \log \left(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}}\right) = -\log \left(3 + \frac{1}{U(i)}\right)$$

$$\Rightarrow \log N = h \cdot \log(2) + m \cdot \log \left(\frac{1}{3+\frac{1}{U(i)}}\right)$$

$$\Rightarrow \log N = h \cdot \log(2) + (-m \cdot \log \left(3 + \frac{1}{U(i)}\right)) \quad (1)$$

Avec $U(i)$ grand $\Rightarrow \frac{1}{U(i)} \approx 0$, prenant seulement la borne minimale $\log(3)$ sans les $\frac{1}{am}$

puisque $h \cdot \log(2) - m \cdot \log \left(3 + \frac{1}{U(i)}\right) < h \cdot \log(2) - m \cdot \log(3)$; l'équation (1) devient donc :

$$0 < \log N < h \cdot \log(2) - m \cdot \log(3)$$

$$\Rightarrow 0 < h \cdot \log(2) - m \cdot \log(3)$$

$$\Rightarrow m \cdot \log(3) < h \cdot \log(2) \quad , \text{ divisons les 2 parties de l'inéquation par } h \cdot \log(3)$$

$$\text{D'où } \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$$

Comme dans [6] nous avons vérifié que $2^h > 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$, on peut conclure par la proposition suivante :

PROPOSITION III :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \text{ la suite de Collatz atterri de } n \text{ vers } 1 \Rightarrow (2^h > 3^m \text{ et } \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}) \quad [7]$$

Vérifiant l'implication réciproque de cette proposition III :

Soit $C = \langle \forall n \in \mathbb{N}^* ; \text{ la suite de Collatz atterri de } n \text{ vers } 1 \rangle$

Soit $A = \langle 2^h > 3^m \rangle$

Soit $A = \langle \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \rangle$

Nous avons l'implication $C \Rightarrow (A \wedge B)$, et sa réciproque $(A \wedge B) \Rightarrow C$

6/19

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \Rightarrow C &\equiv \neg C \Rightarrow \neg(A \wedge B) \\ &\equiv \neg C \Rightarrow \neg A \vee \neg B \\ (A \wedge B) \Rightarrow C &\equiv \neg C \Rightarrow \neg A \end{aligned}$$

Démontrons alors $\neg C \Rightarrow \neg A$

$\neg C = \ll \exists n \in \mathbb{N}^* / \text{la suite de Collatz n'atterri pas de } n \text{ vers } 1 \gg$ qui se traduit par un Produit des termes de cette suite dont n atterrit vers un entier différent de 1.

$$\text{Soit } P = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2 \neq 1$$

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} \left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(a_m + \frac{1}{a_m}\right) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h) \neq 1$$

Comme $\neg C \Rightarrow \neg A$ c'est-à-dire $\neg C \Rightarrow 2^h \leq 3^m$, et comme le produit des tout les termes pairs & impairs est toujours > 1 et que $\left(\frac{3^m}{2^h}\right) \geq 1$, $(2^h = 3^m \text{ si } \frac{m}{h} = \frac{\log 2}{\log 3})$

ce qui donne, dans tous les cas, forcément $P \neq 1$.

(exemple si $m=1$ & $h=1$, P avec 1 terme pair et 1 terme impair $= \frac{3^1}{2^1} \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 2 = 6 \neq 1$)

Ce qui vérifie que $\neg C \Rightarrow \neg A$ est toujours Vraie, donc $(A \wedge B) \Rightarrow C$ est Vraie également. Sachant par la proposition III que l'implication $C \Rightarrow (A \wedge B)$ est vrai aussi :

PROPOSITION IV :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; la suite de Collatz atterri de n vers **1** $\Leftrightarrow (2^h > 3^m \text{ et } \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3})$ [8]

Vérifiant maintenant qu'il n'existe aucun cycle de longueur k , $\forall k > 3 \in \mathbb{N}$:

P étant le produit des termes de la suite de Collatz

$$\text{Soit } P = c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_k \quad [1]$$

$$P = a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h \quad [2]$$

$$P = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2 \quad [3]$$

$$\text{Et } 2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right) \quad [4]$$

Sachant par la PROPOSITION I, que le dernier terme C_k de la suite de Collatz est toujours impair soit $k \in \mathbb{N}$ (k : longueur du cycle de la suite) :

. Supposons que C_k un nombre entier positif impair $\leq (3a_m+1)$ qui définit un cycle de longueur $k > 3$.

Preuve :

le produit P final des termes de cette supposé suite soit $= C_k$

et C_k se trouve dans le produit $=$ à l'un des termes impairs de ce produit.

$$\Rightarrow (3a_1+1). (3a_2+1)...C_k... (3a_m+1). (b_1)/2. (b_2)/2... (b_h)/2. = C_k \quad [3] \quad 7/19$$

$$\Rightarrow (3a_1+1). (3a_2+1)...C_k... (3a_m+1). (b_1.b_2 \dots .b_h) / 2^h = C_k$$

$$\Rightarrow (3a_1+1). (3a_2+1)...C_k... (3a_m+1). (b_1.b_2 \dots .b_h) / C_k = 2^h \quad [9]$$

$$\text{D'après [4], } 2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

$$\Rightarrow 2^h = \left(\frac{3a_1+1}{a_1}\right) \cdot \left(\frac{3a_2+1}{a_2}\right) \dots \left(\frac{3a_m+1}{a_m}\right)$$

$$\Rightarrow 2^h = \left(\frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a_2}\right) \dots \left(\frac{1}{a_m}\right) \cdot (3a_1+1). (3a_2+1)... (3a_m+1).$$

$$\Rightarrow 2^h = \left(\frac{1}{a_1.a_2 \dots .a_m}\right) \cdot (3a_1+1). (3a_2+1)... (3a_m+1).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a_1.a_2 \dots .a_m}\right) \cdot (3a_1+1). (3a_2+1)... (3a_m+1). = (3a_1+1). (3a_2+1)...C_k... (3a_m+1). (b_1.b_2 \dots .b_h) / C_k \quad [9]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a_1.a_2 \dots .a_m}\right) = \left(\frac{b_1. b_2 \dots .b_h}{C_k}\right)$$

$$\Rightarrow (a_1. a_2 \dots .a_m) \cdot (b_1. b_2 \dots .b_h) = C_k$$



D'où l'on tire que impair x paire = impair ?

⇒ **ABSURDE**

il n'existe aucun cycle de longueur $k > 3$, et selon PROPOSITION II, ∃! Cycle trivial, d'où :

PROPOSITION V

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \exists!$ Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1.

2)- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la suite de collatz décroît vers un $n' / n' < n$

De \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels, considéré comme suite croissante, on peut extraire 4 sous-suites, étant donné leurs coefficients directeur positifs, donc également croissantes sous forme de $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, et $4k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Si nous observons la transformation de Collatz sur ces 4 sous-suites nous constatons :

1° - $4k+2$ et $4k+4$ tous deux pairs, après 1 ou 2 suites de divisions successives par 2, finissent par décroître : $4k+2$ pair $\rightarrow 2k+1$ ($2k+1$ impair, $\forall k \in \mathbb{N}$) $\rightarrow 6k+4 \rightarrow 3k+2$; donc $3k+2 < 4k+2$

$$4k+4 \text{ pair} \rightarrow 2k+2 \rightarrow k+1; \text{ donc } k+1 < 4k+4$$

8/19

(En Sachant que la parité de $k+1$ ou $3k+2$ dépend de la parité de k)

2° - $4k+1$ est impair \Rightarrow 1^{er} étape : $3(4k+1) + 1 = 12k+4$ qui est pair

\Rightarrow 2^{er} étape : $(12k+4)/2 = 6k+2$ qui est pair

\Rightarrow 3^{er} étape : $(6k+2)/2 = 3k+1$ parité inconnue, mais nous constatons que $4k+1$ décroisse puisque $3k+1 < 4k+1$

3° - $4k+3$ est impair \Rightarrow 1^{er} étape : $3(4k+3) + 1 = 12k+10$ qui est pair

\Rightarrow 2^{er} étape : $(12k+10)/2 = 6k+5$ qui est impair

\Rightarrow 3^{er} étape : $3(6k+5) + 1 = 18k+16$ qui est pair

\Rightarrow 4^{er} étape : $(18k+16)/2 = 9k+8$ parité inconnue, mais nous constatons que $4k+1$ croisse puisque $9k+8 > 4k+1$

Démontrons dans un premier temps que tout nombre entier de la forme $4k+3$ suivant la suite de Collatz pourrait se transformer en $4k+1$:

- **Tout nombre impair peut s'écrire sous forme $2^p \cdot x - 1, \forall p \in \mathbb{N}^*$:**

$\forall x \in \mathbb{N}$, le produit = $x \cdot$ une puissance de 2 est Pair, ôté de 1 est un nombre IMPAIR

- **Tout nombre impair de forme $4k+1$ peut s'écrire sous forme $2^p \cdot x - 1$ avec $p=1$; (ou $2x - 1$) :**

$\forall k \in \mathbb{N}$, $4k+1$ est impair, $\forall x \in \mathbb{N} / 4k+1 = 2x - 1$

Preuve : soit $4k+1 = I$ (impair)

$$I = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{I+1}{2}; \text{ comme } (I+1) \text{ est pair (somme de 2 impairs = pair)}$$

Donc $(I+1) = 2 \cdot m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow x$ est également un entier $\in \mathbb{N}^*$

- **Tout nombre impair de forme $4k+3$ peut s'écrire sous forme $2^p \cdot x - 1$ avec $p > 1$, leurs proportion tend vers zéro quand p tend vers ∞ :**

$\forall k \in \mathbb{N}$, $4k+3$ est impair, $\exists x \in \mathbb{N} / 4k+3 = 2^p \cdot x - 1$

Preuve :

$$4k+3 = 2^p \cdot x - 1 \Rightarrow x = \frac{4k+4}{2^p}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k+1}{2^{p-2}} \quad (1)$$

Si dans (1) la proportion, selon étude de la récurrence, parmi les nombres de forme $4k+3$ qui

croissent est $P(4k+3) = \frac{1}{2^{p-2}} \Rightarrow$ la proportion des nombres de forme $4k+3$ qui décroissent est égale

au complémentaire de $P(4k+3)$, soit $(1 - \frac{1}{2^{p-2}})$ qui bien entendu si on considère cette fois ci sur l'ensemble \mathbf{N} , des entiers naturels, représente la proportion $P(4k+1)=1$ et $P(4k+2)=1$ et $P(4k+4)=1$ Et $(1 - \frac{1}{2^{p-2}})$; c'est-à-dire $Pr = (1 - \frac{1}{2^{p-2}}) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = (1 - \frac{1}{2^{p-2}})$ représentant la proportion de tout les entiers suivants la transformation de Collatz, décroissants durant les premières étapes .soit

$$Pr = (1 - \frac{1}{2^{p-2}})$$

$$Pr = \frac{2^{p-2}-1}{2^{p-2}}$$

$$= \frac{4 \cdot 2^{p-2}-4}{4 \cdot 2^{p-2}}$$

$$Pr = \frac{2^p-4}{2^p}$$

nous constatons enfin que $P(4k+3) = \frac{1}{2^{p-2}}$ proportion des nombres qui croissent dans \mathbf{N} suivant la suite de Collatz, le reste, c'est-à-dire $Pr = \frac{2^p-4}{2^p}$ décroissant en suivant la transformation de Collatz dans \mathbf{N} ,

nous vérifions que leurs somme est égale à l'unité :

$$\frac{2^p-4}{2^p} + \frac{1}{2^{p-2}} = \frac{2^p-4}{2^p} + \frac{4}{2^p} = \frac{2^p}{2^p} = 1$$

nous vérifions aussi que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{p-2}} \text{ quand } p \rightarrow \infty \text{ est } 0 \text{ (comme nous avons annoncé ci-dessus)}$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^p-4}{2^p} \text{ quand } p \rightarrow \infty \text{ est } 1; \text{ qui va dans le sens de } \underline{\forall x \in \mathbf{N}^*, \text{ la suite de collatz décroît vers un } x' / x' < x}$$

(ex : pour $p=10$, en appliquant les 2 formules, $Pr = 99.60\%$ des nombres décroissent suivant la transformation de Collatz, alors que 0.40% croissent,)

l'argument de la probabilité n'est point suffisant, il faudra alors que nous démontrons qu'un nombre impair de la forme $4k+3$ peut par la suite de Collatz passer à la forme $4k+1$:

Appliquons la transformation de Collatz sur le nombre impair $4k+3$:

$$\text{Soit le nombre } N_1 = 4k+3 = 2^p \cdot x - 1$$

$$\text{Calculons } N_2 = (3N_1 + 1)/2 = (3(2^p \cdot x - 1) + 1)/2 = (3 \cdot 2^p \cdot x - 2)/2 = 3 \cdot 2^{p-1} \cdot x - 1 \quad : 1^\circ \text{étape}$$

$$N_3 = (3N_2 + 1)/2 = (3(3 \cdot 2^{p-1} \cdot x - 1) + 1)/2 = (3^2 \cdot 2^{p-1} \cdot x - 2)/2 = 3^2 \cdot 2^{p-2} \cdot x - 1 \quad : 2^\circ \text{étape}$$

$$\dots \text{Déduisons par récurrence le terme général de la suite ; } N_p = 3^{p-1} \cdot 2 \cdot x - 1 \quad : (p-1)^\circ \text{étape}$$

Finalement la puissance p , de 2 descend à 1, le nombre prend donc la forme $2x'-1$ ($x' = 3^{p-1} \cdot x$),

Récapitulation :

- le nombre $4k+4$ décroît à $k+1$ au bout de 1 étape, la suite dépend de la parité de k
- le nombre $4k+2$ décroît à $3k+2$ au bout de 2 étapes, la suite dépend de la parité de k
- le nombre $4k+1$ décroît à $3k+1$ au bout de 3 étapes, la suite dépend de la parité de k
- le nombre $4k+3$ croît à $9k+8$ au bout de 4 étapes, la suite dépend de la parité de k

Démontrons respectivement que pour tout nombre de forme $k+1$, $3k+2$, $3k+1$, $9k+8$; il finit par décroître \forall la parité de k :

Les nombres $(k+1)$, $(3k+2)$, $(3k+1)$ et $(9k+8)$ seront impairs si respectivement k est pair pour $(k+1)$ et $(3k+1)$, ou k est impair pour les nombres $(3k+2)$ et $(9k+8)$ et inversement, ils seront pairs si k est impair pour $(k+1)$ et $(3k+1)$, ou k est pair pour les nombres $(3k+2)$ et $(9k+8)$.

A) - soit P_1 , le produit de ces termes impairs

Optant pour un choix de parité de k , $\forall k \in \mathbb{N}^*$, de façon à ce que tout les termes obtenus de la suite de Collatz à partir de $(A_{1,k} + B_1)$ soient impairs et ne nécessitent que la multiplication par 3 ajouté à 1 avant de passer à la division par 2.

$$P_1 = (A_{1,k} + B_1) \cdot \left(3 \left(\frac{A_{1,k} + B_1}{2}\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(\frac{A_{1,k} + B_1}{2}\right) + 1\right) + 1 \dots (A_{m,k} + B_m)$$

Pour $3k+1$ impair, k est pair :

$$\begin{aligned} P_1 &= (3k+1) \cdot \left(3 \left(\frac{3k+1}{2}\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(\frac{3k+1}{2}\right) + 1\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(3 \left(\frac{3k+1}{2}\right) + 1\right) + 1\right) + 1\right) \dots (A_{m,k} + B_m) \\ &= (3k+1) \cdot \left(\frac{9k+5}{2}\right) \cdot \left(\frac{27k+17}{2}\right) \cdot \left(\frac{81k+53}{2}\right) \dots (A_{m,k} + B_m) \end{aligned}$$

Nous remarquons que les $(A_{m,k})$ progressent par rapport à m de $\frac{1}{2} \cdot 3^{m+1}$

tandis que les (B_m) s'expriment selon la somme S , d'une suite géométrique $\frac{1}{2} \cdot 3^{m+1}$

$$\begin{aligned} U_{0=1}, \quad (B_m) &: \frac{1}{2} (1, 5, 17, 53, 161 \dots) \\ &: \frac{1}{2} (4 \cdot 3^0, 4 \cdot 3^1, 4 \cdot 3^2, 4 \cdot 3^3, \dots, 4 \cdot 3^m) \\ &: 2 \cdot (3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad S &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^m \\ 3S &= 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{m+1} \end{aligned}$$

$$3S - S = 3^{m+1} + (3^m - 3^m) + \dots + (3 - 3) - 1 = 3^{m+1} - 1$$

$$S = \frac{3^{m+1} - 1}{3 - 1} \quad \Rightarrow \quad (B_m) = \frac{1}{2} (U_0 + 2 \cdot (3^m - 1)) = \frac{1}{2} (2 \cdot 3^m - 1)$$

D'où l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = 3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1)$ étant le dernier terme avant de passer à la division par 2

pour $3k+2$ impair, k impair:

$$P_1 = (3 \cdot k + 2) \cdot \left(3 \left(\frac{3k+2}{2}\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(\frac{3k+2}{2}\right) + 1\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(3 \left(\frac{3k+2}{2}\right) + 1\right) + 1\right) + 1\right) \dots \cdot (A_{m,k} + B_m)$$

$$= (3 \cdot k + 2) \cdot \left(\frac{9k+8}{2}\right) \cdot \left(\frac{27k+26}{2}\right) \cdot \left(\frac{81k+80}{2}\right) \dots \cdot (A_{m,k} + B_m)$$

Nous remarquons que les $(A_{m,k})$ progressent par rapport à m de $\frac{1}{2} \cdot 3^{m+1}$

tandis que les (B_m) s'expriment aussi par rapport à $\frac{1}{2} \cdot 3^{m+1}$ ôté de 1:

avec $(A_{m,k}) = \frac{1}{2} \cdot 3^{m+1}$, nous remarquons que les (B_m) progressent de $\frac{1}{2} \cdot (3^{m+1} - 1)$:

$$(B_m) = \frac{1}{2} \cdot ((3-1), (9-1), (27-1), \dots, (3^m-1)) = \frac{1}{2} \cdot (2, 8, 26, 80, \dots, (3^m-1))$$

D'où l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = 3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1)$ étant le dernier terme avant de passer à la division par 2

Pour $k+1$ impair, k pair :

$$P_1 = (k+1) \cdot \left(3 \left(\frac{k+1}{2}\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(\frac{k+1}{2}\right) + 1\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(3 \left(\frac{k+1}{2}\right) + 1\right) + 1\right) + 1\right) \dots \cdot (A_{m,k} + B_m)$$

$$= (k+1) \cdot \left(\frac{3k+4}{2}\right) \cdot \left(\frac{9k+14}{2}\right) \cdot \left(\frac{27k+44}{2}\right) \cdot \left(\frac{81k+134}{2}\right) \cdot \dots \cdot (A_{m,k} + B_m)$$

Nous remarquons que les $(A_{m,k})$ progressent par rapport à m de $\frac{1}{2} \cdot 3^m$

tandis que les (B_m) s'expriment selon la progression suivante :

$$(B_m) = \frac{1}{2} \cdot (1, 4, 14, 44, 134, \dots, B_m)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ((4-1)=3, (14-4)=10, (44-14)=30, (134-44)=90, \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + 3 + 10(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \left(\frac{3^m-1}{2}\right) \text{ avec } (U_0 = 1, m = 1 \Rightarrow U_1 = 4, m = 2 \Rightarrow U_2 = 14, m = 3 \Rightarrow U_3 = 44 \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 3^{m-1} - 1)$$

D'où l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = 3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1$, étant le dernier terme impair, avant de passer à la division par 2).

Pour $9k+8$ impair, k impair:

$$P_1 = (9k+8) \cdot \left(3 \left(\frac{9k+8}{2}\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(\frac{9k+8}{2}\right) + 1\right) + 1\right) \cdot \left(3 \left(3 \left(3 \left(\frac{9k+8}{2}\right) + 1\right) + 1\right) + 1\right) \dots \cdot (A_{m,k} + B_m)$$

$$= (9k+8) \cdot \frac{(27k+26)}{2} \cdot \frac{(81k+80)}{2} \cdot \frac{(243k+242)}{2} \dots (A_{m,k} + B_m) \quad (1) \quad 12/19$$

Nous remarquons que les $(A_{m,k})$ progressent par rapport à m de $\frac{1}{2} \cdot 3^{m+2}$

tandis que les (B_m) s'expriment selon les $(A_{m,k})$ ôté de 1 :

$$(B_m) = \frac{1}{2} \left((9-1), (27-1), (81-1), (243-1) \dots, (3^{m+2}-1) \right) = \frac{1}{2} \left(8, 27, 80, 242, \dots, (3^m-1) \right)$$

D'où l'on tire la formule explicite du produit des termes impairs de la transformation du Collatz $P_1 = 3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1$ étant le dernier terme avant de passer à la division par 2.

$(A_{i,k} + B_i)$	$3k+1$	$3k+2$	$k+1$	$9k+8$
$i=1$	$9k+5$	$9k+8$	$3k+4$	$27k+26$
$i=2$	$27k+17$	$27k+26$	$9k+14$	$81k+80$
$i=3$	$81k+53$	$81k+80$	$27k+44$	$243k+242$
$i=4$	$243k+161$	$243k+242$	$81k+134$	$729k+728$
""	""	""	""	""
""	""	""	""	""
""	""	""	""	""
$i=m$	$3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1)$	$3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1)$	$3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1$	$3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1$

B) - soit P_2 , le produit de ces termes pairs

Optant pour un choix de parité de k , $\forall k \in \mathbb{N}^*$, de façon à ce que tout les termes obtenus de la suite de Collatz à partir de $(A_{m,k} + B_m)$ qui est le dernier terme impair vu en **A)**

Dont nous remarquons que selon l'ordre de parité de k , $(A_{m,k} + B_m)$ marque une altitude maximale quand il devient une puissance de 2 garantissant un atterrissage vers 1.

$$P_2 = (A_{m,k} + B_m) / 2 \cdot (A_{m,k} + B_m) / 2^2 \dots (A_{m,k} + B_m) / 2^h$$

$$P_2 = \frac{(A_{m,k} + B_m)}{2^h}$$

Qui pour $3k+1$ pair et k impair, $P_2 = \frac{3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1)}{2^h}$

pour $3k+2$ pair et k pair, $P_2 = \frac{3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1)}{2^h}$

pour $k+1$ pair et k impair $P_2 = \frac{3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1}{2^h}$

Qui pour $9k+8$ pair et k pair, $P_2 = \frac{3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1}{2^h}$

C) - soit P, le produit de tous les termes de notre suite

13/19

Notre choix se limite au premier terme impair dont le produit $P=P_1 \cdot P_2$ qui nécessite P_1 et P_2 , d'abord P_1 des termes impairs, ensuite P_2 selon l'ordre i, p, i, p, i, p

$$P = (A_{1,k} + B_1) \cdot (3(A_{1,k} + B_1) + 1) \cdot (3(A_{1,k} + B_1) + 1) \dots (A_{m,k} + B_m) / 2 \dots (A_{m,k} + B_m) / 4 \dots (A_{1,k} + B_1) / 2^h$$

- pour $3k+1$:

$$P = 3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1) \cdot \left(\frac{3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1)}{2^h} \right)$$

$$= \left(3^m \cdot 3 \cdot k + 3^m \cdot 2 - 3^m \cdot \frac{1}{3^m} \right) \cdot \left(\frac{3^{m+1} \cdot k + \frac{3^{m+1} - 1}{2}}{2^h} \right)$$

$$P = \frac{3^m}{2^h} \left(3 \cdot k + 2 - \frac{1}{3^m} \right) \cdot (3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1))$$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1, veut dire aussi que P , compte tenu cette fois-ci de la parité de k , $P=1$:

$$\frac{3^m}{2^h} \left(3 \cdot k + 2 - \frac{1}{3^m} \right) \cdot (3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1)) = 1$$

$$\frac{3^m}{2^h} \quad \times \quad Q1 \quad \times \quad Q2 \quad = \quad 1$$

$Q1 = \left(3 \cdot k + 2 - \frac{1}{3^m} \right)$ est toujours > 1 (pour $m=1$ & $k=0 \Rightarrow Q1=5/3$ minimum)

$Q2 = 3^{m+1} \cdot k + (2 \cdot 3^m - 1)$ est toujours > 1 (pour $m=1$ & $k=0 \Rightarrow Q2=5$ minimum)

Pour que l'équation $\left(\frac{3^m}{2^h} \times Q1 \times Q2 \right) = 1$; forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$$

$$2^h > 3^m \Rightarrow h \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \quad (m \& h \in \mathbb{N}^*)$$

$(2^h > 3^m)$ et $\left(\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$; la suite de Collatz atterrit de n vers 1; d'après la PROPOSITION IV.

- pour $3k+2$

$$P = 3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1) \cdot \left(\frac{3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1)}{2^h} \right)$$

$$= \left(3^m \cdot 3 \cdot k + 3^m \cdot 3 - 3^m \cdot \frac{1}{3^m} \right) \cdot \left(\frac{3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1)}{2^h} \right)$$

$$P = \frac{3^m}{2^h} \left(3 \cdot k + 3 - \frac{1}{3^m} \right) \cdot (3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1))$$

La suite de Collatz atterrit de n vers 1, veut dire aussi que P , compte tenu cette fois-ci de la parité de k , $P=1$:

$$\frac{3^m}{2^h} \left(3 \cdot k + 3 - \frac{1}{3^m} \right) \cdot (3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1)) = 1$$

$$\frac{3^m}{2^h} \quad \times \quad Q1 \quad \times \quad Q2 \quad = \quad 1$$

$Q1 = \left(3 \cdot k + 3 - \frac{1}{3^m} \right)$ est toujours > 1 (pour $m=1$ & $k=0 \Rightarrow Q1=8/3$ minimum)

$Q2 = (3^{m+1} \cdot k + (3^{m+1} - 1))$ est toujours > 1 (pour $m=1$ & $k=0 \Rightarrow Q2=17$ minimum)

Pour que l'équation $\left(\frac{3^m}{2^h} \times Q1 \times Q2 \right) = 1$; forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$$

$$2^h > 3^m \Rightarrow h \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \quad (m \& h \in \mathbb{N}^*)$$

$(2^h > 3^m)$ et $(\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

$$\begin{aligned} \text{- pour } \underline{k+1} : P &= (3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1) \cdot \left(\frac{3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1}{2^h} \right) \\ &= (3^m \cdot k + 15 \cdot 3^m - 3^m \cdot \frac{1}{3^m}) \cdot (3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1) \\ P &= \frac{3^m}{2^h} (k + 15 - \frac{1}{3^m}) \cdot (3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1) \end{aligned}$$

La suite de Collatz atterri de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P=1 :

$$\begin{aligned} \frac{3^m}{2^h} (k + 15 - \frac{1}{3^m}) \cdot (3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1) &= 1 \\ \frac{3^m}{2^h} \quad \times Q1 \quad \times Q2 &= 1 \end{aligned}$$

$Q1 = (k + 15 - \frac{1}{3^m})$ est toujours > 1 (pour m=1 & k=0 $\Rightarrow Q1=14$ minimum)

$Q2 = (3^m \cdot k + 5 \cdot 3^{m-1} - 1)$ est toujours > 1 (pour m=1 & k=0 & $\Rightarrow Q2=4$ minimum)

Pour que l'équation $(\frac{3^m}{2^h} \times Q1 \times Q2 = 1)$ forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$$

$$2^h > 3^m \Rightarrow h \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \quad (m \& h \in \mathbb{N}^*)$$

$(2^h > 3^m)$ et $(\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

$$\begin{aligned} \text{- pour } \underline{9k+8} : P &= 3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1 \cdot \left(\frac{3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1}{2^h} \right) \\ &= 3^m \cdot 9 \cdot k + 3^m \cdot 9 - 3^m \cdot \frac{1}{3^m} \cdot \left(\frac{3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1}{2^h} \right) \\ P &= \frac{3^m}{2^h} (9 \cdot k + 9 - \frac{1}{3^m}) \cdot (3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1) \\ P &= \frac{3^m}{2^h} (9 \cdot k + 9 - \frac{1}{3^m}) \cdot (3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1) \end{aligned}$$

La suite de Collatz atterri de n vers 1 , veut dire aussi que P ,compte tenu cette fois-ci de la parité de k , P=1 :

$$\begin{aligned} P &= \frac{3^m}{2^h} (9 \cdot k + 9 - \frac{1}{3^m}) \cdot (3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1) = 1 \\ &= \frac{3^m}{2^h} \quad \times Q1 \quad \times Q2 = 1 \end{aligned}$$

$Q1 = (9 \cdot k + 9 - \frac{1}{3^m})$ est toujours > 1 (pour m=1 & k=0 $\Rightarrow Q1=8$ minimum)

$Q2 = (3^{m+2} \cdot k + 3^{m+2} - 1)$ est toujours ≥ 1 (pour m=1 & k=0 & $\Rightarrow Q2=26$ minimum)

Pour que l'équation $(\frac{3^m}{2^h} \times Q1 \times Q2 = 1)$ forcément $\frac{3^m}{2^h} < 1$

$$\Rightarrow \frac{3^m}{2^h} < 1 \Rightarrow 3^m < 2^h \Rightarrow 2^h > 3^m$$

14/19

$$2^h > 3^m \Rightarrow h \log 2 > m \log 3 \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} \quad (m \& h \in \mathbb{N}^*)$$

$(2^h > 3^m)$ et $(\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$; la suite de Collatz atterri de n vers 1 ; d'après la PROPOSITION IV .

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^$, la suite de collatz décroît vers un $n' / n' < n$*

Nous remarquons que $4k+3$ en passant à $4k+1$, ce dernier reste supérieur à $4k+3$, comme nous le montrons :

$$2^p \cdot x - 1 < 3^{p-1} \cdot 2 \cdot x - 1 \Rightarrow 2^p < 3^{p-1} \cdot 2 \Rightarrow 2^{p-1} < 3^{p-1} \text{ Ce qui est évident}$$

Nous avons vu en 1° que les formes $4k+2$ et $4k+4$ finissent par décroître mais nous remarquons que le processus est plus évident dans la forme $4k+4$ que dans la forme $4k+2$

Parce que seuls les $4k+4$ contiennent les puissance de 2 (P2) qui garantissent un trajectoire sûr vers 1 suite à des divisions successives par 2, mais il ya aussi des non-P2 dans $4k+4$ et seulement des non P2 dans la forme $4k+2$. (selon études des 2 suites.)

En ce qui concerne les $4k+1$ et les $4k+3$, si $4k+1$ décroît au bout de trois étapes et durant la transformation de Collatz, les $4k+3$ finissent par se transformer en $4k+1$ et décroître rien nous garantit que ce dernier $4k+1$, reste dans cette forme et décroît vers 1, car le processus de la transformation est en réalité « réciproque » comme le montre cette exemple du nombre 19 de forme $4k+3$ ($4 \cdot 4 + 3$) génère dans la trajectoire 29 de forme $4k+1$ ($4 \cdot 7 + 1$) qui donne 11 de forme $4k+3$ ($4 \cdot 2 + 3$), qui donne à son tour un $4k+1$: 17 (puis 13, puis 5 qui reste le dernier $4k+1$ de la suite de Collatz si bien sur 32 ne prend pas sa place dans un autre $x \in \mathbb{N}^*$).

19 58 29 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

Nous constatons que la décroissance de $4k+2$ et $4k+4$ est acquise, et si du fait de la réciprocity du passage de la forme $4k+3$ à $4k+1$, nous considérons qu'ils se transforment entre eux équitablement ;

Nous concluons que dans plus des $\frac{3}{4}$ des cas, la tendance est à la décroissance, il nous reste que de trouver le moyen de suivre le vol et de démontrer effectivement qu'ils terminent dans le cycle trivial c'est que nous essayons de faire dans la 3° partie qui suit.

3)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit élément.

PROPOSITION –VI

$$\forall x \text{ impair} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \exists ! x / \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x ; \text{ soit } x_i = 1$$

preuve :

Soit U_n ; la suite des nombres impairs ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2n + 1$ ($x_1=U_1=1$; $x_2=U_2=3$; $x_3=U_3=5$; $x_4=U_4=7$...).

$$\text{Soit } V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i ; V_1 = \frac{U(1)}{1} = 1 ; V_2 = \frac{(U_1+U_2)}{2} = 2 ; V_3 = \frac{(U_1+U_2+U_3)}{3} = 3 ;$$

$$V_4 = \frac{(U_1+U_2+U_3+U_4)}{4} = 4 \Rightarrow \dots \text{ Par récurrence, déduisons sa formule explicite } V_n = n$$

$n < 2n+1 \Leftrightarrow V_n < U_n$ et $V_n = U_n$ ssi $n=1$ c à d $x_i \text{ impair} = 1$; d'où la proposition II.

PROPOSITION –VII

Dans \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels ; il ya autant de nombre pairs que d'impairs

Preuve :

$$\text{Soit la formule du binome de Newton } (x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$\text{Avec } a = 1 \text{ \& } b = 1 ; \exists M \text{ parties de l'ensemble } E / M = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Rightarrow M = (1 + 1)^n = 2^n$$

$$\text{Soit } M_p \text{ le nombre de parties de cardinal pair : } M_p = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \dots = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p}$$

Soit M_i le nombre de parties de cardinal impair dont la somme est comptée jusqu'au dernier impair

$$\text{inferieur à } n : M_i = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1} ;$$

$$\text{Avec } a = 1 \text{ \& } b = -1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \dots - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} - \binom{n}{5} - \dots$$

parce que $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ signe négative qui affecte M_i

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1}$$

$$\text{Comme } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1} = 0 ; \text{ on déduit que } \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1}$$

\Rightarrow Le nombre de sous-parties de cardinal pair = nombre de sous-parties de cardinal impair

La suite de Collatz peut être présentée sous un produit en spécifiant les nombres impairs (a_1, a_2, \dots, a_m) et les nombres pairs (b_1, b_2, \dots, b_h); encore une fois, selon deux formes de produits P1, puis P2 exprimé suivant la transformation de Collatz. m et h étant respectivement le cardinal des nombres impairs et pairs. ($m \& h \in \mathbb{N}^*$)

$$P2 = a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h$$

$$P1 = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2$$

Utilisant encore une fois l'équation associée à ce produit sous sa forme brute

$$(a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2$$

$$(a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h = \frac{(3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h)}{2^h}$$

$$2^h = \frac{(3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1)}{(a_1 \cdot a_2 \dots a_m)}$$

$$2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

$$\text{Or } 2^h < 3^m < \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

$$\Rightarrow 2^h < \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

Remplaçons les a_i par M « moyenne arithmétique » défini sur $m \Rightarrow M = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{m}$

$$M > 0 \Rightarrow 2^h < \left(3 + \frac{1}{M}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{M}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{M}\right) m \text{ fois}$$

$$\Rightarrow 2^h < \left(\frac{3M+1}{M}\right)^m$$

- Supposons un nombre $x \in \mathbb{N}^*$ infiniment grand dont la trajectoire par la transformation de Collatz, puise dans tous les nombres pairs et impairs, comme selon la proposition VII, il y aura autant de pair que d'impair, on pose donc $m=h$

$$2^h < \left(\frac{3M+1}{M}\right)^h \text{ ou } 2^m < \left(\frac{3M+1}{M}\right)^m$$

Appliquons le théorème des fonctions réciproques, c'est-à-dire :

18/19

•

$\forall x \in \mathbb{N}^*$, si x est positif et $x = y^n \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{x}$ est unique.

Utilisant la racine nième jusqu'à m ou h , pour arriver au supposé dernier terme de la trajectoire parti d'un grand nombre infini :

$$\sqrt[m]{2^m} < \sqrt[m]{\left(\frac{3M+1}{M}\right)^m} \quad \text{Ou} \quad \sqrt[h]{2^h} < \sqrt[h]{\left(\frac{3M+1}{M}\right)^h}$$

$$2 < \left(\frac{3M+1}{M}\right)$$

- soit un entier quelconque k qui puisse égaliser notre inéquation de manière à chercher un autre entier, si il existe, commun à la fin du parcours de la transformation de Collatz des termes pairs d'un coté (puissance de 2), d'un autre coté, les termes impairs :

$$2 + k = \frac{3M+1}{M}$$

$$2M + kM = 3M + 1$$

$$kM - M = 1$$

$$M(k - 1) = 1 \Rightarrow \text{admet comme solutions : } \underline{M=1} \text{ \& } \underline{k=2} (\in \mathbb{N}^*)$$

Comme, **suyant proposition II** : $\exists! M \in \mathbb{N}^* / M = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{m} = a_i$ soit $a_i = 1$, et comme $M=1$ donc a_i , le dernier terme impair est connu soit $a_i = 1$. (c'est comme nous avons vu dans la suite V_n et U_n , en sens inverse, dans la **proposition II**).

Notre équation épurée et simplifiée devient : $4 = \frac{3a_i+1}{a_i}$, observons des 2 cotés :

Du coté droit, l'équation garde les nombres a_i impairs, avec a_i dernier terme = 1

Démonstration :

Si $a_i = 1$ est seulement premier terme de la suite de Collatz, sa transformation est celle qui concerne le cycle trivial : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, nous constatons aussi que c'est aussi le dernier terme $a_i=1$, qui est en même temps le plus petit élément impair, du cycle trivial. (Suyant proposition I).

Si a_i est dernier terme impair $> 1 \Rightarrow$ l'équation $4 = \frac{3a_i+1}{a_i}$, devient impossible puisque :

$$4 > \frac{3a_i+1}{a_i} \Rightarrow 4 > 3 + \frac{1}{a_i} \text{ si } a_i > 1$$

Donc a_i est forcément le dernier terme impair de la suite = 1 **CQFD**

Du coté gauche : partant d'une puissance de 2 très grande et arrivant au dernier terme La racine nième qui colle à la trajectoire de la suite, s'arrête dans notre équation à 4 Le reste est pris en charge finalement par le cycle trivial, par 4 ou par 1, **$\forall x$ pair ou impair $\in \mathbb{N}^*$** du départ.

Nous avons $4 = 2^2 = 2^h$, $h = 2$ étant le cardinal des nombres pairs dans ce dernier terme pair de la suite, nous connaissons déjà un : c'est 4 nous déduisons forcément le deuxième élément pair du cycle trivial : 2, solution aussi de l'équation avec 1 et passage obligé de 4 à 1 par la transformation de Collatz.

Conclusion finale :

Comme $\exists!$ Cycle trivial dans la suite de COLLATZ (1) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, n décroisse suivant la transformation de COLLATZ (2), atterri forcément dans le cycle trivial dont 1 son plus petit élément. (3)

CQFD

CASABLANCA LE 01.12.2015

BERKOUK MOHAMED, email : bellevue-2011@hotmail.com

Mohamed.berkouk@aei-maroc.ma

Référence :

J.P- Delahaye - Christian Lasou- UST- Licence S.T -2007.

- Shalom Eliahou, problème $3n+1$: y a-t-il des cycles non triviaux ? -I.des math-2011.

-Luc-Olivier Pochon & Alain Favre ; version du 13 juillet 2017