Proof of the Four color theorem without computer usage

By Ali Reza NAJAR SALIGHEH

(French version to page 13 - 24)
(Version française à partir de la page 13)

Abstract

The four color theorem has been already proved by using computer's help. Here we will again prove the veracity of the theorem, but this time without using computer.

In order to do that, we will prove that no disproof can exist.

We will look for some characteristics needed for a disproof and then we will prove that none of these characteristics can exist.

Table of contents

1) Four color theorem

"Given any separation of a plane into contiguous regions, called a map, the regions can be colored using at most four colors so that no two adjacent regions have the same color."

2) Introduction

Plane edge:

We will prove the theorem in a 2D plane that doesn't have edges (or edges placed to infinity). Once that will be done, we will generalize the result to a plane that have edges.

Needed conditions for the existence of a disproof:

In order to be a disproof, we need two adjacent regions that can not be colored with two different color.

In order to be a disproof, we need :

- 4 surfaces forced to be colored with 4 different colors
- and all these 4 surfaces being adjacent to a 5^{th} surface, that we will call Country P (for Problematic Country).

3) Some affirmations

Affirmation 1

Let A a surface.

If the surface A doesn't already exist on the plane, in order to add A, at least we need an empty area located where A will be located.

Affirmation 2: Empty areas merged

Let 3 empty areas named A, B and C.
A and B are adjacent.
C exactly covers A and B.

In this case, we can see that A + B = C.
Consequently, we always can replace A and B by C, or inversely C by A and B.

Affirmation 3: Add and deformation theorem

As long as we don't split a surface and as long as each surface stay adjacent to the same surfaces with which it was initially adjacent, we can:

- Add a new region X (= solid surface or empty area) anywhere in the plane,
- And/of change the shape of the surfaces.

That won't make lower our ability to create new surfaces adjacent to existing surfaces.

4) Conditions needed to create a disproof

4.0. General properties

What do we need in order to force 4 surfaces to be colored with 4 different colors?

- It is necessary that each surface is forced to be colored with a different color from the others 3 surfaces.

What do we need in order to force 1 surface E to be colored with a different color from the others 3 surfaces (F, G, and H)?

- E must be adjacent to 3 surfaces respectively forced to be colored with the same color as F, G and H.

What do we need in order to force 2 surfaces (I et J) to be forced to be colored with the same color?

- If the 2 surfaces are the same one, they will be colored with the same color.
- If the 2 surfaces are distinct,
  - I must be adjacent to 3 surfaces (K, L and M),
  - J must be adjacent to 3 surfaces (N, M and O),
  - And K, L and M have to be respectively forced to be colored with the same color as N, M and O.
- If the 2 surfaces are distinct, at least we need:
  - The existence of an empty area adjacent to I and. And into this area, we need:
    - 3 surfaces adjacent to I and J
    - Or 3 pairs of same color surfaces adjacent to I and J

⇨ Let's apply all this for the rest of the demonstration…

4.1. Step 1 – Force 4 surfaces to adopt 4 different colors

As we said, in order to be a disproof, we need :

- 4 surfaces forced to be colored with 4 different colors
- and all these 4 surfaces being adjacent to a 5th surface, that we will call Country P (for Problematic Country).

Let A, B, C and D be the 4 surfaces forced to be colored with 4 different colors.
Let P be the Problematic surface who is adjacent to A, B, C and D

What do we need in order to force 4 surfaces to be colored with 4 different colors?

- A forced to be colored with a different color from B, C and D
- B forced to be colored with a different color from A, C and D
- C forced to be colored with a different color from A, B and D
- D forced to be colored with a different color from A, B and C

4.2. Step 2 – Force 1 surfaces to adopt a different color from the 3 others

What do we need in order to force D to be colored with a different color from A, B and C?

- We need a D adjacent to 3 surfaces (E, F and G) respectively forces to be colored with the same color as A, B and C.
- Pair 1: E et A
- Pair 2: F et B
- Pair 3: G et C

We will distinguish four situations:

- Situation 1: The two surfaces of the 3 pairs are identical
- Situation 2: The two surfaces of the 2 pairs are identical, the 2 others distinct
- Situation 3: The two surfaces of the 1 pairs are identical, the 4 others distinct
- Situation 4: The six surfaces are distinct

4.3. Step 3 - Situation 1: The two surfaces of the 3 pairs are identical

- E = A
- F = B
- G = C
- ⇨ D is adjacent to A, B et C.
- ⇨ D has always a different color from the 3 others surfaces.

4.4. Step 4 - Situation 4: The six surfaces are distinct

What is needed in order to force E and A to be colored with the same color?
What is needed in order to force F and B to be colored with the same color?
What is needed in order to force G and C to be colored with the same color?

- At least, it's necessary to have an empty area (called empty area H) adjacent to E and A.
- At least, it's necessary to have an empty area (called empty area I) adjacent to F and B.
- At least, it's necessary to have an empty area (called empty area J) adjacent to G and C.

Each empty area (H, I and J) may be filled with P but not entirely. At least, 3 other empty areas (respectively named K, L, M) respectively adjacent to E and A, F and B, G and C are needed.

Summary:

- Empty area K is adjacent to E and A
- Empty area L is adjacent to F and B
- Empty area M is adjacent to G and C

For the existence of E, F and G, each oh them need an empty area.

- ⇨ Empty areas of K, L and M are respectively adjacent to the empty areas needed for E, F and G.
- ⇨ This areas can merge to empty areas respectively named N, O and Q.
- ⇨ N is adjacent to A and D
- ⇨ O is adjacent to D and D
- ⇨ Q is adjacent to C and D

For the existence of D an empty area is needed. This empty area is adjacent to N, O and Q. They can merge into the empty area R.

R is adjacent to A, B and C.

As P is adjacent to D, P is also adjacent to R.

R is adjacent to A, B, C and P.

4.5. Step 5 - Generalization of Situation 4 to the 3 others

Situations 1, 2 and 3 are particular case of the situation 4 where 2 surfaces of 1, 2 or 3 pairs are identical.

4.6. Step 6 – Gathering information - Force 1 surfaces to adopt a different color from the 3 others

Finally, to the question “What do we need in order to force D to be colored with a different color from A, B and C?”, we answer “It needs R”.

Same way for these questions:

- “What do we need in order to force A to be colored with a different color from B, C and D?”, we answer “It needs S”.
- “What do we need in order to force B to be colored with a different color from A, C and D?”, we answer “It needs T”.
- “What do we need in order to force C to be colored with a different color from A, B and D?”, we answer “It needs U”.

(S, T and U are equivalent to R but respectively applied to A, B and C.)

4.7. Step 7 – Gathering information - Force 4 surfaces to adopt 4 different colors

To the question: “What do we need in order to force 4 surfaces to be colored with 4 different colors?”, we answer “It needs R, S, T and U” with:

- R adjacent to A, B, C and P.
- S adjacent to B, C, D and P.
- T adjacent to A, C, D and P.
- U adjacent to A, B, D and P.

As R, S, T and U include respectively D, A, B and C, we can conclude that:

- R is adjacent to S, T and U.
- S is adjacent to R, T and U.
- T is adjacent to R, S and U.
- U is adjacent to R, S and T.

As a reminder: R, S, T et U are each adjacent to P.

4.8. Setp 8 – Conclusion

To the question: “What do we need in order to force 4 surfaces to be colored with 4 different colors?”, we answer “A structure of 5 surfaces where each surface is adjacent to 4 other surfaces.”

Can such structure exist? We will answer to it at the next point.

5) Specific case: 5 surfaces all adjacent the 4 others

In order to create 5 surfaces adjacent each one to each other, we need :
- first create 1 surface
- then create a 2th surface adjacent to the precedent
- then create a 3th surface adjacent to the precedents
- then create a 4th surface adjacent to the precedents
- then create a 5th surface adjacent to the precedents

(Add and deformation theorem will be used)

Method used to create a surface:

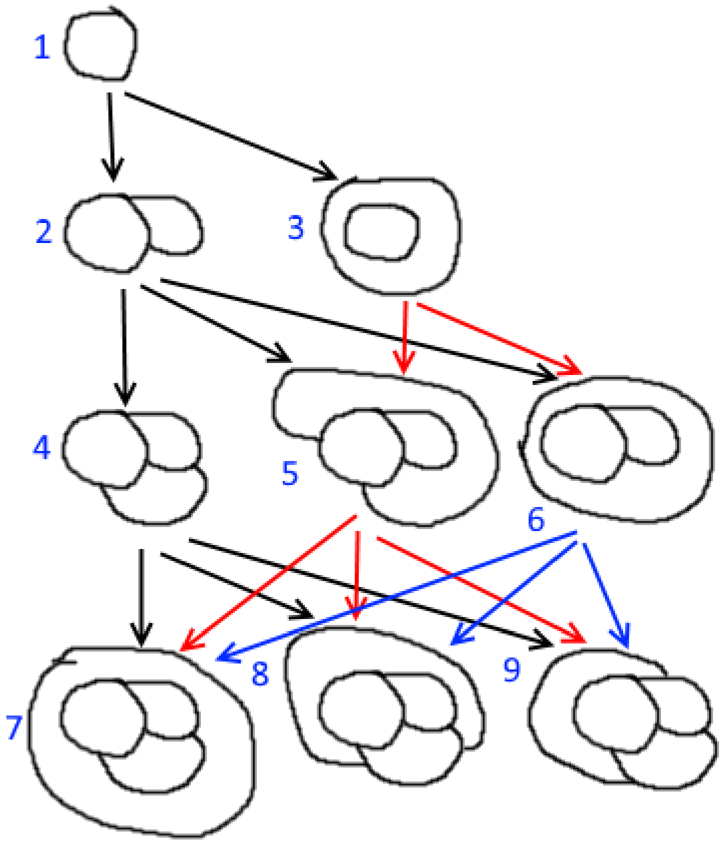
1) Create an empty area where we can put the surface (if it didn't exist before).
2) Fill the empty are with the surface.
3) Erase in order to get the final form of the surface.

I drew some example of plane including 1, 2, 3 or 4 surfaces all adjacent to the others.

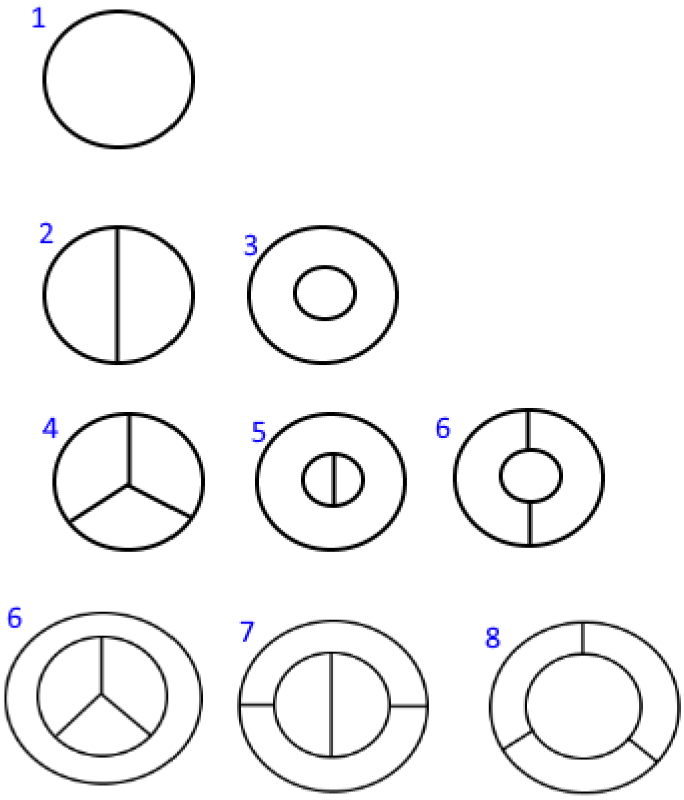
These examples differ by the number of surfaces and the surfaces / areas to which each surface is adjacent.

Any other group of 1, 2, 3 or 4 all-adjacent surfaces can be reformed from at least one of the examples using distortion or adding empty areas. This will have no impact to create the next surface.

Here is an illustration of this method:



And here the same results deformed in order to be prettier.



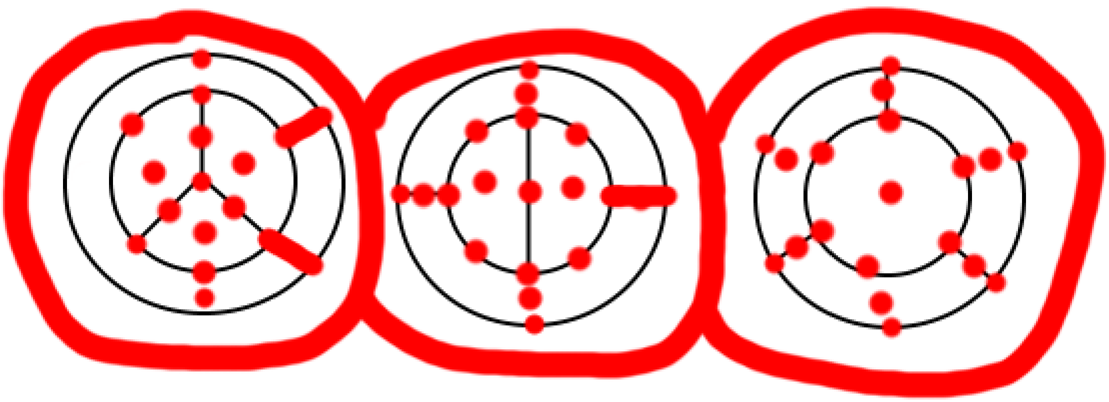
We will try to create the 5th surface (the surface P) from the examples with 4 surfaces.

To do this we must find empty areas where the surface P can be placed.

We define "empty areas of the same type" as empty areas adjacent to the same countries.

2 empty areas are different only by two things: their shape and type. Empty areas of the same type can be found using distortions.

Here at least one example for each type of empty area.



Empty areas are illustrated in red.

We can see that no empty area of the examples is is adjacent to 4 surfaces.
In this case no empty area of any type can be adjacent to 4 surfaces.

The surface P need to be created in an empty area. So P can't be adjacent to 4 other surfaces and each of them adjacent to the others.

We can say that on a plane, 5 surfaces can never be all adjacent to each other.

- ⇨ Therefor the existence conditions of a disproof are never validated. (The conditions written in point 4).
- ⇨ The theorem is true.

6) Generalization

The demonstration has been done on a plane with edges at infinity (or without edges).

But the theorem is also true for any plane with defined edges (bounded plane).

Indeed, every bounded plane may be the result of a cut in a borderless plane containing the same surfaces as the limited plan.

Therefore, if the surfaces can be colored with four colors in a plane borderless plane, they can also be colored the same way in a bounded plane.

7) Conclusion

There is no situation where we can make 5 surfaces adjacent to each other.

As explained above, given the nature of the examples given, we can say that any other example is a special case of the studied examples.

Therefore, we can say that 5 surfaces can never be all adjacent to each other on a plane.

We have also proved that in order to force 4 surfaces to be colored with four colors while making each of them adjacent to a 5^{th} country, there must be a structure with five adjacent surfaces to one another.

This structure cannot exist. We cannot force countries to adopt four distinct colors and each be adjacent to a fifth common country.

Therefore, two adjacent regions of a map can always be colored with two different colors (if we have 4 colors).

- ⇨ The theorem is always true and has no disproof.

Q.E.D.

Author:

- Ali Reza NAJAR SALIGHEH
    - Université catholique de Louvain
    - Medical student
    - Contact: ar.najarsaligheh@gmail.com

Démonstration du « Théorème des quatre couleurs » sans emploi d'ordinateur

Par Ali Reza NAJAR SALIGHEH

Abstract

Le théorème des quatre couleurs a déjà été par le passé démontré en utilisant l'aide de l'ordinateur. Ici, nous allons à nouveau prouver sa véracité mais cette fois-ci sans employer d'ordinateur.

Pour ce faire, on va prouver qu'il ne peut y avoir de contre-exemple.

On va chercher quelques caractéristiques requises pour qu'il y ait un contre-exemple et ensuite on va démontrer qu'aucune de ces caractéristiques ne peut exister.

Sommaire

1) Enoncé du théorème

« En n'utilisant que quatre couleurs différentes, il est possible de colorer n'importe quelle carte découpée en régions connexes (d'un seul morceau), de sorte que deux régions adjacentes (ou limitrophes), c'est-à-dire ayant toute une frontière (et non simplement un point) en commun reçoivent toujours deux couleurs distinctes. »

2) Introduction

Cadre de la démonstration :

Nous allons démontrer le théorème dans le cadre d'un plan 2D n'ayant pas de bords (ou ayant des bords situés à l'infini). Une fois cela effectué, nous généraliserons le résultat à un plan ayant des bords.

Conditions d'existence pour un contre-exemple :

Pour qu'il y ait un contre-exemple, il faut avoir deux régions adjacentes qui ne puissent pas être colorés avec deux couleurs distinctes.

Pour qu'il y ait un contre-exemple, il faut donc :
- que 4 pays soient forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes
- et que chacun de ces 4 pays soit adjacent à un 5ème pays, que l'on va appeler Pays P (pour Pays Problématique).

3) Quelques théorèmes / affirmations

Théorème 1

Soit un pays A.

Si le pays A n'est pas déjà existant sur le plan, pour qu'on puisse rajouter le pays A, il faut au moins une zone vide située au moins là où se situera le pays A.

Théorème 2 : Zones vides fusionnées

Soit 3 zones vides appelées A, B et C.
A et B sont adjacents.
C recouvre exactement toute la surface de A et B.

Dans ce cas, on peut dire que A + B = C.
Par conséquent, on peut toujours remplacer A et B par C, ou inversement C par A et B.

Théorème 3 : Théorème d'ajout et déformation

Tant qu'on ne fractionne pas une surface et tant que chaque surface demeure adjacente aux surfaces avec lesquelles elles étaient initialement adjacentes,
(cela revient à dire « Tant qu'aucune surface n'est fractionnée ou ne perd de voisins, »)

On peut :

- ajouter une nouvelle région X (= Surface pleine ou une zone vide) n'importe où dans le plan,
- et/ou changer la forme des surfaces.

Cela ne diminuera pas nos possibilités de créer de nouvelles surfaces adjacentes aux surfaces préexistantes.

4) Conditions nécessaires pour créer un contre-exemple

4.0. Propriétés générales

Que faut-il pour que 4 pays soient forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes ?

- Il faut que chacun d'eux soit forcé d'être coloré avec une couleur différente des 3 autres pays

Que faut-il pour que 1 pays E soit forcé d'être coloré avec une couleur différente de celles des 3 autres pays (F, G, H) ?

- Il faut que E soit adjacent à 3 pays respectivement forcés d'être colorés avec la même couleur que F, G et H.

Que faut-il pour que 2 pays (I et J) soient forcés d'être colorés avec la même couleur ?

- Si les 2 pays sont identiques, ils seront forcés d'être colorés avec la même couleur.
- Si les 2 pays sont distincts, il faut que :
  - I soit adjacent à 3 pays (K, L et M),
  - J soit adjacent à 3 pays (N, M et O),
  - et que K, L et M soient respectivement forcés d'être colorés de la même couleur que N, M et O.
- Si les 2 pays sont distincts, il faut donc au moins :
  - qu'il y ait une zone vide adjacente à I et J et que dans cette zone il y ait :
    - 3 pays adjacents à I et J
    - ou 3 pairs de pays de même couleur chacun adjacent à I ou J

⇨ Appliquons tout cela pour la suite de la démonstration…

4.1. Etape 1 – Forcer 4 pays à adopter 4 couleurs différentes

Nous avons dit que pour qu'il y ait un contre-exemple, il faut donc :
- que 4 pays soient forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes
- et que chacun de ces 4 pays soit adjacent à un 5ème pays, que l'on va appeler Pays P (pour Pays Problématique).

Soit A, B, C et D les 4 pays forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes.
Soit P le pays Problématique qui est adjacent à A, B, C et D.

Que faut-il pour que 4 pays soient forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes ?

- A forcé d'être d'une couleur différente que celles de B, C et D
- B forcé d'être d'une couleur différente que celles de A, C et D
- C forcé d'être d'une couleur différente que celles de A, B et D
- D forcé d'être d'une couleur différente que celles de A, B et C

4.2. Etape 2 – Forcer 1 pays à adopter une couleur différentes des 3 autres

Que faut-il pour que D soit forcé d'être coloré avec une couleur différente que celles de A, B et C ?

- Il faut que D soit adjacent à 3 pays (E, F et G) respectivement forcés d'être colorés avec la même couleur que A, B et C.
- Paire 1 : E et A
- Paire 2 : F et B
- Paire 3 : G et C

On va distinguer 4 situation :

- Situation 1 : Les deux pays des 3 paires sont identiques
- Situation 2 : Les deux pays de 2 paires sont identiques, les 2 autres distincts
- Situation 3 : Les deux pays de 1 paires sont identiques, les 4 autres distincts
- Situation 4 : Les 6 pays sont distincts

4.3. Etape 3 - Situation 1 : Les deux pays des 3 paires sont identiques

- E = A
- F = B
- G = C
- ⇨ D est adjacent à A, B et C.
- ⇨ D a toujours une couleur différentes des 3 autres pays.

4.4. Etape 4 - Situation 4 : Les 6 pays sont distincts

Que faut-il pour que E et A soient forcés d'être colorés avec la même couleur ?
Que faut-il pour que F et B soient forcés d'être colorés avec la même couleur ?
Que faut-il pour que G et C soient forcés d'être colorés avec la même couleur ?

- Il faut au moins qu'il y ait une zone vide (appelée zone vide H) adjacente à E et A.
- Il faut au moins qu'il y ait une zone vide (appelée zone vide I) adjacente à F et B.
- Il faut au moins qu'il y ait une zone vide (appelée zone vide J) adjacente à G et C.

Chaque zone vide (H, I et J) peut être remplie par P mais pas entièrement. Il faut au moins qu'à l'intérieur de chacun des 3 zones vides (H, I et J), il y ait une autre zone vide adjacente (respectivement nommée K, L, M) respectivement adjacente à E et A, F et B, G et C.

Résumé :

- Zone vide K est adjacent à E et A
- Zone vide L est adjacent à F et B
- Zone vide M est adjacent à G et C

Pour que les pays E, F et G puisse exister, ils ont chacun besoin d'une zone vide.

- ⇨ Les zones vides de K, L et M sont respectivement adjacentes aux zones vides nécessaire pour E, F et G.
- ⇨ Ces zones vides peuvent donc fusionner pour former respectivement les zones vides N, O et Q.
- ⇨ N est adjacent à A et D
- ⇨ O est adjacent à D et D
- ⇨ Q est adjacent à C et D

Pour que le pays D puisse exister, il a besoin d'une zone vide. Cette zone vide est adjacente à N, O et Q. Elles peuvent donc fusionner pour former la zone vide R.

R est donc adjacent à A, B et C.

Comme P est adjacent à D, il est aussi adjacent à R.

R est donc adjacent à A, B, C et P.

4.5. Etape 5 - Généralisation de la Situation 4 aux trois autres

Les situations 1, 2 et 3 sont des cas particuliers de la situation 4 où les deux pays de 1, 2 ou 3 paires sont identiques.

4.6. Etape 6 – Rassemblement des informations - Forcer 1 pays à adopter une couleur différentes des 3 autres

Au final, pour répondre à la question « Que faut-il pour que D soit forcé d'être coloré avec une couleur différente que celles de A, B et C ? », nous répondons qu'il faut R.

De la même manière, aux questions suivantes :

- « Que faut-il pour que A soit forcé d'être coloré avec une couleur différente que celles de B, C et D ? », nous répondons qu'il faut S.
- « Que faut-il pour que B soit forcé d'être coloré avec une couleur différente que celles de A, C et D ? », nous répondons qu'il faut T.
- « Que faut-il pour que C soit forcé d'être coloré avec une couleur différente que celles de A, B et D ? », nous répondons qu'il faut U.

(En considérant que S, T et U sont des équivalents de R mais appliqués respectivement à A, B et C.)

4.7. Etape 7 – Rassemblement des informations - Forcer 4 pays à adopter 4 couleurs différentes

A la question : « Que faut-il pour que 4 pays soient forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes ? », nous répondons désormais qu'il faut R, S, T et U avec :

- R est donc adjacent à A, B, C et P.
- S est donc adjacent à B, C, D et P.
- T est donc adjacent à A, C, D et P.
- U est donc adjacent à A, B, D et P.

Comme R, S, T et U comprennent respectivement en leur sein D, A, B et C, nous pouvons conclure que :

- R est adjacent à S, T et U.
- S est adjacent à R, T et U.
- T est adjacent à R, S et U.
- U est adjacent à R, S et T.

Pour rappel : R, S, T et U sont chacun adjacent à P.

4.8. Etape 8 – Conclusion

A la question : « Que faut-il pour que 4 pays soient forcés d'être colorés avec 4 couleurs différentes ? », nous pouvons désormais répondre qu'il faut « Une structure de 5 surfaces où chaque surface est adjacente aux 4 autres surfaces. »

Est-ce qu'une telle structure peut exister ? Nous allons y répondre au point suivant.

5) Cas particulier : 5 surfaces chacune adjacente aux 4 autres

Pour créer 5 surfaces adjacentes l'un à l'autre, il faut :
- d'abord créer 1 surface
- puis créer une 2ème surface adjacente à la précédente
- puis créer une 3ème surface adjacente aux précédentes
- puis créer une 4ème surface adjacente aux précédentes
- puis créer une 5ème surface adjacente aux précédentes

On va faire tout ce qui a été dit, tout en gardant en mémoire le théorème d'ajout et de déformation.

Méthode utilisée pour créer une surface :

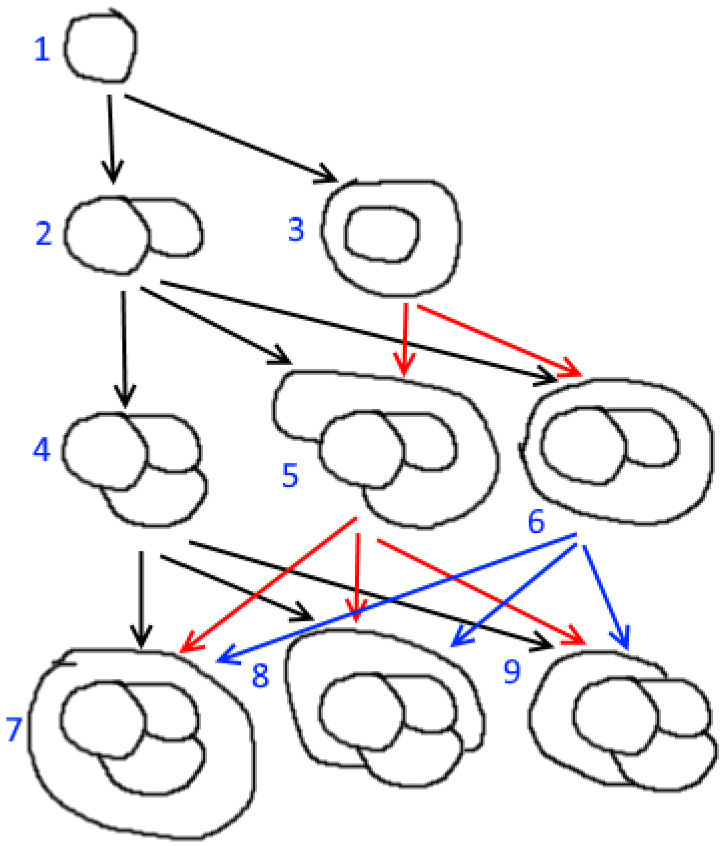
4) Créer une zone vide là où on peut mettre la surface (si elle n'existait pas déjà).
5) Remplir la zone vide par la surface.
6) Effacer ce que l'on a dessiner en trop de sorte à obtenir la forme finale de la surface.

En utilisant cette méthode et en regardant la définition de chaque surface créée, j'ai dessiné quelques exemples de plan contenant 1, 2, 3 ou 4 surfaces toutes adjacentes les unes aux autres.

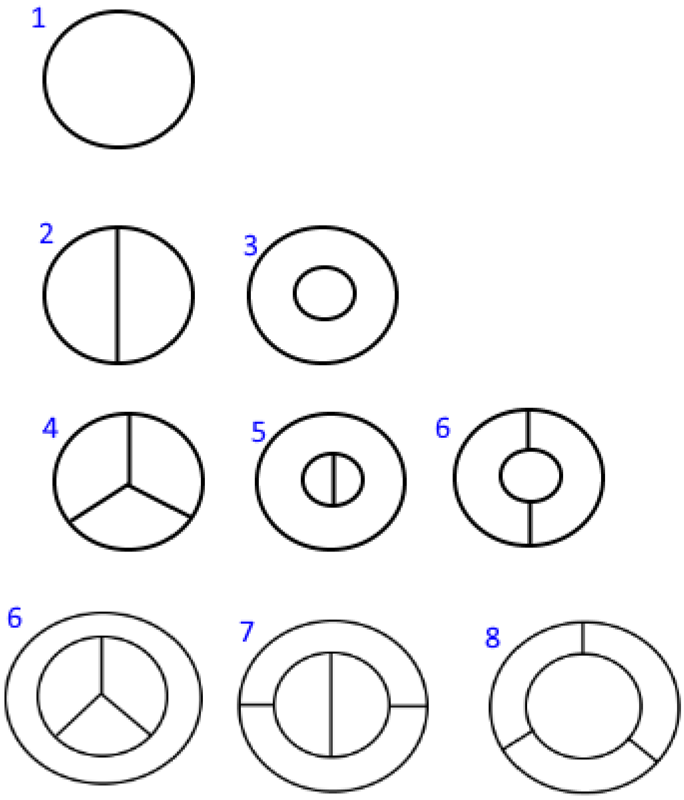
Ces exemples se différencient par le nombre de surfaces et par les surfaces/régions auxquelles chaque surface est adjacente.

Par conséquent, tout autre groupe de 1, 2, 3 ou 4 surfaces toutes-adjacentes peuvent être reformées à partir d'au moins un des exemples à l'aide de déformation ou d'ajout de zones vides. Cela n'aura aucun impact pour créer la surface suivante (voire théorème d'ajout et de déformation).

Voici une illustration de cette méthode :



Et voici les mêmes résultats, déformés pour être plus jolis.



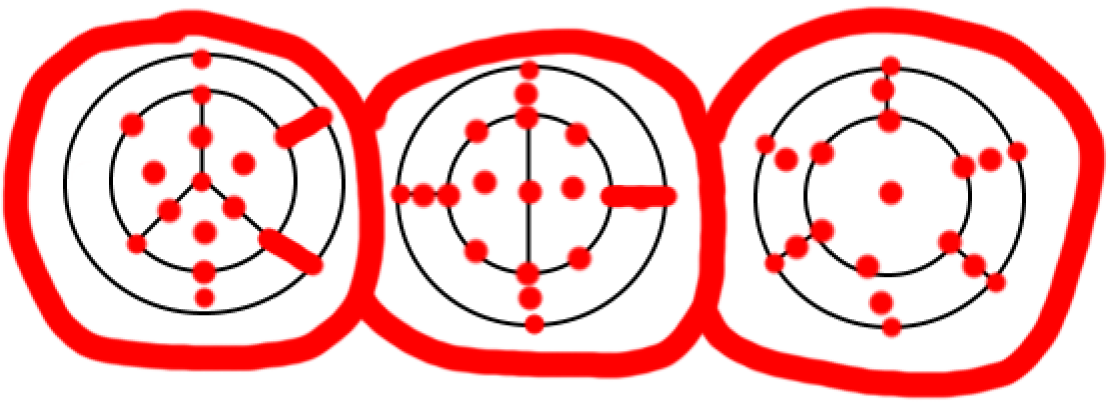
On va essayer de créer la 5$^{\text{ème}}$ surface (le pays P) à partir de ces exemples à 4 surfaces.

Pour ce faire nous devons trouver les zones vides où la surface P peut être placée.

On définit « zones vides de même type » comme étant des zones vides adjacentes aux mêmes pays.

2 zones vides ne sont différentes que par 2 choses : leur forme et leur type. Des zones vides de mêmes types peuvent donc être retrouvée à l’aide déformations.

Voici au moins un exemple par type de zone vide.



Les zones vides sont schématisées en rouge.

On peut voir qu'aucune des zones vides données en exemple n'est adjacente à 4 surfaces.
Dans ce cas aucune zone vide d'aucun type ne peut être adjacente à 4 surfaces.

La surface P doit être dessinée dans une zone vide. Il est donc impossible qu'elle soit adjacente à 4 autre surfaces toutes adjacentes les unes aux autres.

D'une façon générale, nous pouvons dire que sur un plan, 5 surfaces ne peuvent jamais être toutes adjacentes les unes aux autres.

⇨ Par conséquent les conditions d'existence d'un contre-exemple (qui ont été pointées au point 4) ne sont jamais validées et donc le théorème est vrai.

6) <u>Généralisation</u>

La démonstration a été réalisée sur un plan avec des bords situés à l'infini (ou sans bord).

Mais le théorème est aussi valable pour tout plan avec des bords définis (ou plan borné).

En effet, tout plan borné peut être le résultat d'une découpe dans un plan sans bord qui comporte les mêmes surfaces que le plan borné.

Par conséquent, si des surfaces peuvent être colorées avec au maximum 4 couleurs dans un plan sans bord, ils pourront aussi l'être dans un plan borné.

7) Conclusion

Il n'existe aucune situation où l'on peut rendre 5 surfaces adjacentes les unes aux autres.

Comme expliqué précédemment, étant donné la nature des exemples étudiés, nous pouvons dire que n'importe quel autre exemple est un cas particulier d'un des exemples étudiés.

Par conséquent, nous pouvons dire que 5 surfaces ne peuvent jamais être adjacentes toutes l'une à l'autre sur un plan.

Nous avons aussi démontré que pour forcer 4 pays à être colorés avec 4 couleurs différentes tout en les rendant tous les 4 adjacents à un 5ème pays, il fallait obligatoirement disposer d'une structure avec 5 surfaces adjacentes les unes aux autres.

Cette structure ne pouvant exister, on ne peut jamais forcer 4 pays à adopter des couleurs distincts et à être chacun adjacent à un 5ème pays commun.

Par conséquent, deux régions adjacentes d'une carte peuvent donc toujours être colorés avec deux couleurs distinctes si on dispose de 4 couleurs.

Le théorème est donc toujours vrai et n'a pas de contre-exemple.

CQFD

Auteur :

- Ali Reza NAJAR SALIGHEH
  - Université catholique de Louvain
  - Etudiant en médecine
  - Contact : ar.najarsaligheh@gmail.com