

---

Хмельник С. И.

# Математическая модель вихря Тейлора

## Аннотация

Рассматривается теоретическое обоснование вихря Тейлора. Предлагаемая математическая модель позволяет построить структуру течения между цилиндрами, где возникают правильно чередующиеся вихри с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению окружной скорости вращающегося цилиндра.

## Оглавление

1. Введение
  2. Гравитомagnetизм
  3. Математическая модель
- Приложение 1.  
Литература

## Введение

В [1] описывается классический эксперимент Тейлора – см. рис. 1, где показаны два цилиндры и вязкая жидкость в зазоре между ними. Внешний цилиндр с радиусом  $R_2 = R_1 + d$  неподвижен, а внутренний цилиндр с радиусом  $R_1 = R_i$  вращается и тем самым создает основное течение  $U_i$ .

При некоторой скорости вращения в зазоре "между цилиндрами возникают правильно чередующиеся вихри с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению окружной скорости вращающегося цилиндра". Эти вихри катятся по окружности и не переходят с одной окружности на другую. В [1] описываются различные экспериментальные исследования такого течения, но его математическая модель отсутствует. Видимо, ее невозможно построить на основе известных уравнений гидродинамики. Ниже предлагается математическая модель такого течения, построенная в предположении, что, кроме известных массовых сил, в текущей жидкости возникают гравитомagnetные силы, существенно зависящие от скорости движения.

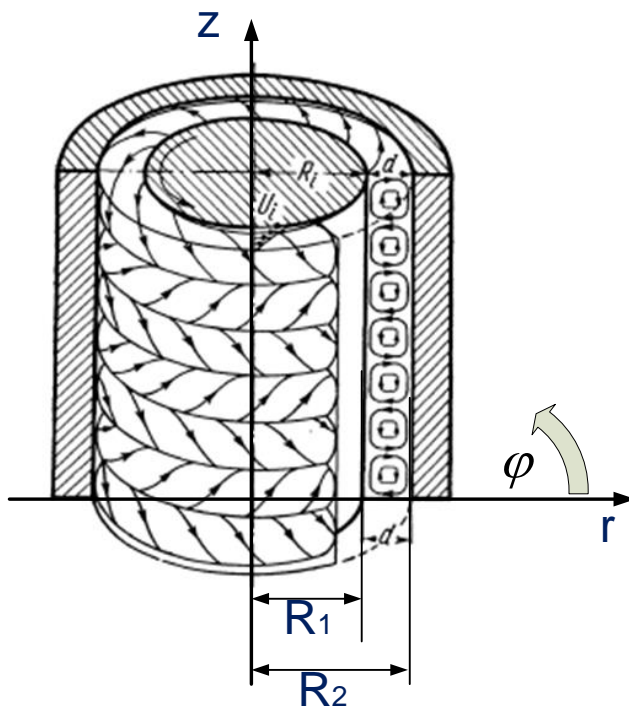


Рис. 1.

## 2. Гравитомагнетизм

В [2] анализируются некоторые масштабные природные явления и неожиданные эксперименты. Доказывается, что они могут быть объяснены существованием гравитомагнетизма и значительных по величине сил гравитомагнитного взаимодействия - гравитомагнитных сил. Эти силы имеют значительную величину в вакууме.

В слабом гравитационном поле Земли можно пользоваться максвеллоподобными уравнениями для описания гравитомагнитных взаимодействий – максвеллоподобными уравнениями гравитомагнетизма (МПГ-уравнения). Взаимодействие между движущимися массами описывается гравитомагнитными силами Лоренца (далее ГЛ-силы), аналогичными силам Лоренца в электродинамике. Из аналогии между уравнениями Максвелла для электродинамики и МПГ следует, что существует также поток  $S$  гравитационной энергии.

Как уже отмечено, ГЛ-силы имеют значительную величину в вакууме. В потоке жидкости движущиеся молекулы разъединены

---

вакуумом. Поэтому силы их гравитомагнитного взаимодействия могут быть значительными и влиять на характер течения.

Известно, что при увеличении скорости ламинарного течения жидкости или газа самопроизвольно (без наличия внешних сил) возникает турбулентное течение [3]. Механизм самопроизвольного перехода от ламинарного течения к турбулентному течению не найден. На основе этого в [4] обосновывается утверждение о первичности турбулентного движения.

На основе вышесказанного в [5] было предложено объяснение механизма возникновения турбулентных течений. Было показано, что движущиеся молекулы текущей жидкости взаимодействуют между собой аналогично движущимся электрическим зарядам. Силы такого взаимодействия могут быть рассчитаны и включены в уравнения Навье-Стокса как массовые силы. Уравнения Навье-Стокса, дополненные такими силами, становятся уравнениями гидродинамики для турбулентного течения. При этом для расчета турбулентных течений можно использовать известные методы решения уравнений Навье-Стокса.

Далее МПГ-уравнения используются для построения математической модели вихря Тейлора (аналогично тому, как они были использованы для построения математической модели трубки Ранка [6]).

### 3. Математическая модель

В конструкции Тейлора существуют массовые токи. Обозначим их плотности как  $J_r, J_\varphi, J_z$ . Эти массовые токи создают гравитомагнитные напряженности  $H_r, H_\varphi, H_z$ . Плотности массовых токов и напряженности должны удовлетворять МПГ-уравнениям. Для стационарного случая, который имеет место в нашей задаче, эти уравнения (также, как и уравнения Максвелла для электродинамики) имеют вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

Кроме того, массовые токи должны удовлетворять условию непрерывности

$$\operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0 \quad (3)$$

При моделировании будем использовать цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  - см. рис. 1. Тогда уравнения (1-3) примут вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (6)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (7)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (9)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (10)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$  – некоторые константы. В приложении 1 показано, что существует решение, имеющее следующий вид:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (11)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (12)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (13)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (14)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (15)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (16)$$

где  $j(r)$ ,  $h(r)$  – некоторые функции координаты  $r$ . В приложении 1 показано, что указанное решение 5-ти уравнений (4-8) с 6-ю неизвестными функциями  $j(r)$ ,  $h(r)$  может быть найдено при данной функции  $j_\varphi(r)$ .

Функции  $j_\varphi(r)$  описывает массовые токи. В рассматриваемой конструкции эти токи возникают под действием из-за сил вязкости. Эти силы распределены по радиусу и это распределение зависит от того, какой из цилиндров вращается, увлекая вязким трением близлежащие слои воды. Очевидно, скорость вращения будет уменьшаться в сторону неподвижного цилиндра.

Мы не будем анализировать эти связи, а предположим, что в общем случае функция  $j_\varphi(r)$  имеет следующий вид:

$$j_\varphi(r) = a + br, \quad (17)$$

где  $a$ ,  $b$  – известные коэффициенты.

### Пример 1.

На рис. 2 (mode=4) показаны графики функций  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$  в зазоре конструкции. Эти функции вычисляются итеративно при данных  $\alpha = 4$ ,  $\chi = 63$ , радиусе провода  $R_1 = 0.9$ ,  $R_2 = 1$  и функции  $j_\varphi(r) = -0.3 + r$ . В первой колонке показаны функции  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ , а во второй колонке показаны функции  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ . Вместе с функцией  $j_r(r)$  пунктиром показана функция  $2\sin(\chi r)$ , а вместе с функцией  $j_z(r)$  пунктиром показана функция  $(-3(1 - \cos(\chi r)))$ . Видно, что

$$j_r(r) \approx -3(1 - \cos(\chi r)), \quad (18)$$

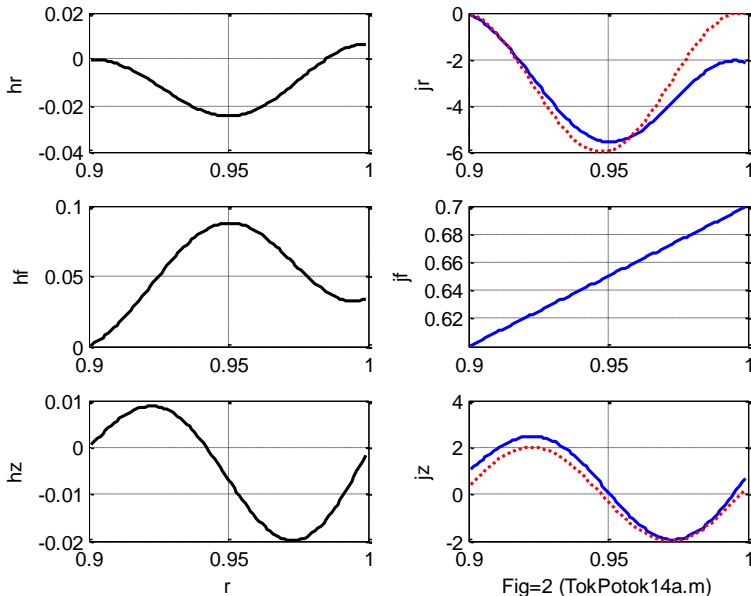
$$j_z(r) \approx 2\sin(\chi r). \quad (19)$$

Следовательно, существует такое решение уравнений (4-8), при котором

$$J_r(z) = -3(1 - \cos(\chi r))\cos(\alpha\varphi + \chi z) \quad (20)$$

$$J_z(r) \approx 2\sin(\chi r)\sin(\alpha\varphi + \chi z). \quad (21)$$

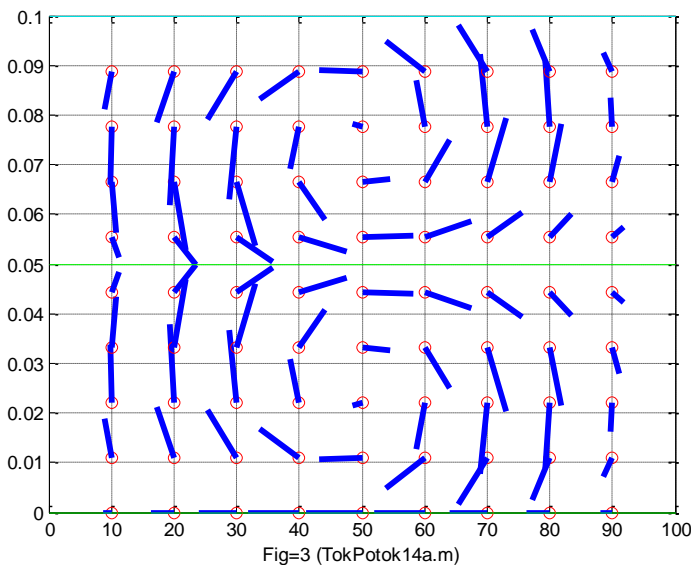
- см. также (9-12).



## Пример 2.

На рис. 3 при условиях примера 1 показано поле токов  $(\overline{J_r(r)} + \overline{J_z(r)})$  в вертикальном сечении зазора конструкции. Видны правильно чередующиеся вихри с правым и левым вращением. Это следует из (20, 21).

Из рис. 3 следует, что массовые токи, т.е. струи жидкости совершают в зазоре круговые движения. Основное течение  $U_i$  превращает эти круговые движения в движение по спирали с осью – окружностью, проходящей по центральной линии кругового зазора. Характер. Характер этих движений соответствует движениям, наблюдаемым в экспериментах – см. рис. 1. Следовательно, можно утверждать, что вихри Тейлора объясняются гравитомагнетизмом. Влияние гравитомагнитных сил возрастает с увеличением скорости движения. Поэтому при малых скоростях наблюдается ламинарное течение, но с увеличением скорости существенную роль начинают играть гравитомагнитные силы. Появляется турбулентность. С дальнейшим увеличением скорости эти силы начинают превалировать и возникают упорядоченные вихри.



## Приложение 1

Рассматривается решение уравнений (3.4-3.8) в виде функций (3.11-3.16). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами.

---

Из (3.4) находим:

$$\frac{j_r(r)}{r}co + j'_r(r)co + \frac{j_\varphi(r)}{r}\alpha \cdot co + j_z(r)\chi \cdot co = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r}\alpha + j_z(r)\chi = 0. \quad (2)$$

Из (3.5, 3.6, 3.7) находим:

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r)\alpha - h_\varphi(r)\chi = j_r(r), \quad (4)$$

$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) = j_\varphi(r). \quad (5)$$

Из (3.8) находим:

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{1}{r} \cdot h_r(r)\alpha = j_z(r). \quad (6)$$

Итак, получено 5 уравнений (2-6) с 6-ю неизвестными функциями  $j(r)$ ,  $h(r)$ . Поэтому одну из функций можно определить произвольно. Мы определим функцию  $j_\varphi(r)$ . В этом случае алгоритм решения этих уравнений имеет следующий вид:

1. Устанавливаем начальные (при  $r=0$ ) нулевые значения всех перечисленных функций, кроме  $j_\varphi(r)$ .

2. Определяем функцию  $j_\varphi(r)$ .

3. Из (2) находим:

$$j'_r(r) = -\frac{j_r(r)}{r} - \frac{j_\varphi(r)}{r}\alpha - j_z(r)\chi = 0. \quad (7)$$

$$j_r = j_{r\text{old}} + j'_r \cdot dr. \quad (8)$$

3. Из (3) находим:

$$h'_r = -\frac{h_r}{r} - \frac{h_\varphi}{r}\alpha - h_z\chi, \quad (9)$$

$$h_r = h_{r\text{old}} + h'_r \cdot dr. \quad (10)$$

5 Из (5) находим:

$$h'_z(r) = -j_\varphi(r) - h_r(r)\chi. \quad (11)$$

$$h_z = h_{z\text{old}} + h'_z \cdot dr. \quad (12)$$

6. Из (4) находим:

$$h_\varphi(r) = (h_z(r)\alpha / r - j_r(r)) / \chi. \quad (13)$$

$$h'_\varphi(r) = (h'_z(r)\alpha / r - j'_r(r)) / \chi. \quad (14)$$

---

7. Из (6) находим:

$$j_z(r) = h'_\varphi(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} + \frac{1}{r} \cdot h_r(r)\alpha. \quad (15)$$

8. Переходим к п. 2 с новым значением переменной  $r$ .

## Литература

- Примечание:* **ViXra** – архив 'viXra Funding', <http://vixra.org/funding>,  
**DNA** – "Доклады независимых авторов",  
ISSN 2225-6717, <http://dna.izdatelstwo.com/>
1. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. Изд. "Наука", Москва, 1974 (см. стр. 480).
  2. 2. Хмельник С.И. Гравитомагнетизм: природные явления, эксперименты, математические модели, ViXra, <http://vixra.org/abs/1508.0071>, 2015; ДНА-34, 2015.
  3. Иванов Б.Н. Мир физической гидродинамики. От проблем турбулентности до физики космоса. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2010. – 240с.
  4. Турбулентность и сложное вихревое движение, <http://khd2.narod.ru/whirl/whirldyn.htm>
  5. Хмельник С.И. Механизм возникновения и метод расчета турбулентных течений, ДНА-21, 2012; ViXra, <http://vixra.org/abs/1404.0088>, 2012.
  6. Хмельник С.И. О теоретическом обосновании эффекта Ранка, ViXra, <http://vixra.org/abs/1511.0078>, 2015.