Collatz problem

Hajime Mashima

April 7, 2019

Abstract

"It multiplies the 1/2 when the number of nature is even. It is multiplied by 3 in the case of an odd number. Furthermore it adds 1. By repeating this calculation, it leads always to 1."

This is referred to as the Collatz problem(Collatz Conjecture).

Contents

1 introduction

Collatz problem は「経路は loop しないか?」、「任意の自然数から始めて必ず 1 になるか?」を真偽の判定とする。
演算は非線形的であるため、アプローチは難しいと考えられる。ここでは Collatz tree の特徴を解説してから帰納法を適用するための手順を示す。

1.1 Collatz tree Table の特徴

Table 1 の説明

Definition 1

- Collatz 経路を木に例え Collatz tree と呼ぶ。
- 列 $3(odd) + 1$ を $node+$ とする。
- 2^n の行を trunk とする。(※ただし 1、2、4 は root とする。)
- $2^n \cdot 3(odd)$ の行を leef とする。
- trunk と leef 以外の行は branch とする。
- trunk、leef、branch の $node+$ に対応する cell を $node-$ とする。

Table 1:

※ root	$node-(Colored)$							odd	$node+$
trunk	⋯	64	32	16	8	※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	⋯	192	96	48	24	12	6	**3**	10
branch	⋯	320	160	80	40	20	10	5	16
branch	⋯	448	224	112	56	28	14	7	22
leef	⋯	576	288	144	72	36	18	**9**	28
branch	⋯	704	352	176	88	44	22	11	34
branch	⋯	832	416	208	104	52	26	13	40
leef	⋯	960	480	240	120	60	30	**15**	46
branch	⋯	1088	544	272	136	68	34	17	52

- $node+$ の列には $node-$ の値が存在し、それを color でマーキングした。これは tree の分岐部に対応する。
  yellow cell は 2 周期、magenta cell は 4 周期、cyan cell は 8 周期、green cell は 16 周期、red cell は 32 周期、blue cell は 64 周期⋯と 2^n 周期で $node+$ の列に分布している。
- leef は 3 の倍数ではないため $node-$ を有さない。よって Collatz 経路、逆路の端である。
- $2(odd) < 3(odd) + 1$ より、yellow cell のみ Table $node-$ の行、上方に対応する $node+$ が位置している。
- 色付でない cell は分岐部でないため以降、省略する。

【Collatz tree の組立て方】

1. Table の各行 trunk、leef、branch を切り分ける。
2. $node+$ の裏部分に接着剤をつけ $node-$ 同じ値の部分に貼り付ける。

1.2　loop の有無に関して

Proposition 2 Collatz tree には root を除き loop は存在しない。

Proof 3 $x_n \neq 3(3m) + 1$ とする。

Table 2:

	node−							odd	node+
branch	$\cdots$	x_{n+2}		x_{n+1}		x_n	$\cdots$		

Theorem 4 (Fermat's little theorem) n を自然数、p が素数で n と p が互いに素であるとき

$$n^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

$p = 3$ のとき

$$n^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

$x_n = 3\,(3m+1) + 1$ のとき

$$x_{n+1} = 2^2\,(3\,(3m+1)+1)$$

$$\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^2\,(3\,(3m+1)+1) - 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^2 \cdot 3\,(3m+1) + 2^2 - 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^2 \cdot 3\,(3m+1) + 3\right) \\
&= 2^2\,(3m+1) + 1 \\
&= 2^2 \cdot 3m + 2^2 - 1 + 2 \not\equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}$$

$$x_{n+2} = 2^4\,(3\,(3m+1)+1)$$

$$\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^4\,(3\,(3m+1)+1) - 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^4 \cdot 3\,(3m+1) + 2^4 - 1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^4 \cdot 3\,(3m+1) + 15\right) \\
&= 2^4\,(3m+1) + 5 \\
&= 2^4 \cdot 3m + 2^4 - 1 + 6 \\
&= 2^4 \cdot 3m + 4^2 - 1 + 3 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}$$

$x_n = 3\,(3m+2)+1$ の時

$x_{n+1} = 2^2\,(3\,(3m+2)+1)$

$$
\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^2\,(3\,(3m+2)+1)-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3\,(3m+2)+2^2-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3\,(3m+2)+3\right) \\
&= 2^2\,(3m+2)+1 \\
&= 2^2\cdot 3m+2^3-2+3 \\
&= 2^2\cdot 3m+2\left(2^2-1\right)+3 \equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}
$$

$x_{n+2} = 2^4\,(3\,(3m+2)+1)$

$$
\begin{aligned}
odd &= \frac{1}{3}\left(2^4\,(3\,(3m+2)+1)-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3\,(3m+2)+2^4-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3\,(3m+2)+15\right) \\
&= 2^4\,(3m+2)+5 \\
&= 2^4\cdot 3m+2^5-2+7 \\
&= 2^4\cdot 3m+2\left(4^2-1\right)+7 \not\equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}
$$

よって x_n が leef の分岐部でないならば x_{n+1} または x_{n+2} どちらかが leef の分岐部となる。

また、x_n が leef の分岐部ならば x_{n+3} も leef の分岐部である。

x_n が leef の分岐部なので $x_n = 3^2 m_1 + 1$ と置ける。

$$\begin{aligned}
x_{n+3} &= 2^6 x_n \\
x_{n+3} &= 2^6(3^2 m_1 + 1) \\
&= 2^6 \cdot 3^2 m_1 + 2^6 \\
&= 2^6 \cdot 3^2 m_1 + 3^2 \cdot 7 + 1 \\
&= 3^2 m_2 + 1 \qquad (m_2 = 2^6 m_1 + 7)
\end{aligned}$$

よって

$3n$ でない自然数から Collatz 経路を逆に進むと leef が必ず存在する。 (1)

Table 3: leef を初期値とした場合

leef	$node + A$					
branch	$node - A$	$node + B$				
	branch	$node - B$	$node + C$			
		branch	$node - C$	$node + D$		
			branch	$node - D$	$node + E$	
					$\vdots$	$\cdots$

Table 1 より $node-$ と $node+$ は一対一の関係にある。

Table 3 より leef を初期値とした場合、leef は $node-$ を有さないため loop にならない。

(1) より任意の $3n$ でない自然数は特定の leef を初期値として得られる。

以上より root を除き loop は存在しない。 □

1.3 yellow cell の連鎖に関して

Proposition 5 yellow cell の $node(+ \to -)$ 連鎖は有限回で停止する。

Example 6 p.13 参照

$$
\begin{aligned}
15(\text{odd cell}) &= 2n_1 + 1 (n_1 = 7) \\
46(\text{yellow cell}) &= 3(2n_1+1)+1 \\
&= \frac{3 \cdot 2(2n_1+1)}{2} + 1 \\
70(\text{yellow cell}) &= \frac{3}{2}(3(2n_1+1)+1)+1 \\
&= \frac{3^2 \cdot 2(2n_1+1)}{2^2} + \frac{3}{2} + 1 \\
70 - 46 &= \frac{3(3-2)(2n_1+1)}{2} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{6n_1+3}{2} + \frac{3}{2} \\
&= 3(n_1+1) \\
\frac{70-46}{6}(\text{interval of row}) &= \frac{(n_1+1)}{2} = \text{even steps} \\
106(\text{yellow cell}) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3^2(2n_1+1)}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3^3 \cdot 2(2n_1+1)}{2^3} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3}{2} + 1 \\
106 - 70 &= \frac{3^2(3-2)(2n_1+1)}{2^2} + \frac{3^2}{2^2} \\
&= \frac{3^2(2n_1+2)}{2^2} \\
&= \frac{3^2(n_1+1)}{2} \\
\frac{106-70}{6}(\text{interval of row}) &= \frac{3(n_1+1)}{2^2} = \text{even steps}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
160(\text{red cell}) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3^3\left(2n_1+1\right)}{2^2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3}{2}+1\right)+1 \\
&= \frac{3^4\cdot 2\left(2n_1+1\right)}{2^4}+\frac{3^3}{2^3}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3}{2}+1 \\
160-106 &= \frac{3^3\left(3-2\right)\left(2n_1+1\right)}{2^3}+\frac{3^3}{2^3} \\
&= \frac{3^3\left(2n_1+1\right)}{2^3}+\frac{3^3}{2^3} \\
&= \frac{3^3\left(2n_1+2\right)}{2^3} \\
&= \frac{3^3\left(n_1+1\right)}{2^2} \\
\frac{160-106}{6}(\text{interval of row}) &= \frac{3^2\left(n_1+1\right)}{2^3} = \text{odd steps}
\end{aligned}
$$

node+ の yellow cell は 2 周期なので連鎖が停止する時、interval of row は odd steps となる。

一般式は r を自然数として以下となる。

$$
\text{interval of row} = \frac{3^{r-1}\left(n+1\right)}{2^r}\ \text{steps}
$$

$(n+1)$ は有限値なので yellow cell の $node(+\rightarrow-)$ 連鎖は有限回で停止する。

□

Example 7

$$
\begin{aligned}
10 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 2 \mid 2^1 \rightarrow \quad 1\ \textit{chain} \\
\\
22 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 4 \mid 2^2 \rightarrow \quad 2\ \textit{chain} \\
\\
34 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 6 \mid 2^1 \rightarrow \quad 1\ \textit{chain} \\
\\
46 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 8 \mid 2^3 \rightarrow \quad 3\ \textit{chain}
\end{aligned}
$$

1.4 従属試行による証明

Table 4:

出現率	増加イベント	増加率 (a)	減少イベント	減少率 (b)	余剰減少率 $(a^{-1} \cdot b)$
2^2 周期	1 chain	1.00	magenta	0.87	0.871
2^3 周期	2 chain	1.50	cyan	2.68	1.78666666
2^4 周期	3 chain	2.25	green	3.48	1.54844444
2^5 周期	4 chain	3.38	red	10.72	3.17629629
2^6 周期	5 chain	5.06	blue	13.94	2.75279012
2^7 周期	6 chain	7.59	color 6	42.88	5.64674897
2^8 周期	7 chain	11.39	color 7	55.74	4.89384910
2^9 周期	8 chain	17.09	color 8	171.52	10.0386648
2^{10} 周期	9 chain	25.63	color 9	222.98	8.70017619
2^{11} 周期	10 chain	38.44	color 10	686.08	17.8465152
2^{12} 周期	11 chain	57.67	color 11	891.90	15.466979
2^{13} 周期	12 chain	86.50	color 12	2744.3	31.7271382

Table 4 の説明

1. 出現率 (appearance rate)
   yellow chain、および not yellow cell の node+における出現率を示している。
2. 増加イベント (Increase event)
   yellow chain 数
3. 増加率 (Rate of increase)
   yellow chain による増加率

Table 5: 3 chain event

	↑ 1.5	
↑ 1.5		

$$1.00 \fallingdotseq 1.5^0$$
$$1.50 \fallingdotseq 1.5^1$$
$$2.25 \fallingdotseq 1.5^2$$
$$3.38 \fallingdotseq 1.5^3$$
$$5.06 \fallingdotseq 1.5^4$$
$$7.59 \fallingdotseq 1.5^5$$
$$\vdots$$

Definition 8

$$Rate\ of\ increase = (Rate\ of\ decrease)^{-1}$$

4. 減少イベント (Decrease event)
   1 chain の not yellow cell

5. 減少率 (Rate of decrease)
   yellow cell を起点とした not yellow cell の減少率。

$$\begin{aligned}
\text{magenta event } 0.87 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 1.3 \\
\text{cyan event } 2.68 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4 \\
\text{green event } 3.48 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4 \cdot 1.3 \\
\text{red event } 10.72 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^2 \\
\text{blue event } 13.94 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^2 \cdot 1.3 \\
42.88 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^3 \\
55.74 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^3 \cdot 1.3 \\
171.52 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^4 \\
222.98 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^4 \cdot 1.3 \\
686.08 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^5 \\
891.90 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^5 \cdot 1.3 \\
2744.3 &\fallingdotseq 0.67 \cdot 4^6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

6. 余剰減少率 (Decrease rate of surplus)
   同じ出現率の yellow chain と not yellow cell の減少率を掛け合わせたもの。

Table 6: 1 chain & magenta event

	↑ 0.67	1 chain
↓ 1.3	magenta	

Table 7: 2 chain & cyan event

	↑ 1.5^{-1}	1 chain
↑ 0.67	2 chain	
cyan	↓ 4	

Remark 9 *magenta* の減少率は $0.87 < 1$ なので増加している。

Table 8: 3 chain & green event

		$\uparrow 1.5^{-1}$	1 chain
	$\uparrow 1.5^{-1}$	2 chain	
$\uparrow 0.67$	3 chain		
green	$\downarrow 4$		
$\downarrow 1.3$	magenta		

Table 9: 4 chain & red event

			$\uparrow 1.5^{-1}$	1 chain
		$\uparrow 1.5^{-1}$	2 chain	
	$\uparrow 1.5^{-1}$	3 chain		
$\uparrow 0.67$	4 chain			
red	$\downarrow 4$			
	cyan	$\downarrow 4$		

Table 10: 5 chain & blue event

				$\uparrow 1.5^{-1}$	1 chain
			$\uparrow 1.5^{-1}$	2 chain	
		$\uparrow 1.5^{-1}$	3 chain		
	$\uparrow 1.5^{-1}$	4 chain			
$\uparrow 0.67$	5 chain				
blue	$\downarrow 4$				
	green	$\downarrow 4$			
	$\downarrow 1.3$	magenta			

実際のコラッツ経路では loop が存在せず同じ経路は通らないため重複する cell を除く必要がある。重複の仕方は yellow chain と not yellow cell で異なる。

yellow chain に関して 4 chain を例にすると 3、2、1 chain を含む単純なものであるが、

$$\cdots y_6 \supset y_5 \supset y_4 \supset y_3 \supset y_2 \ni y_1$$

not yellow cell に関しては node −経由で通った cell は node+で出現しないというものである。

$$\cdots cl11 \supset cl9 \supset cl7 \supset b \supset g \ni m$$
$$\cdots cl12 \supset cl10 \supset cl8 \supset cl6 \supset r \ni c$$

Table 11:

Table 行数	A	B
2^2	y_1	m
2^3	$y_1 \cdot y_2$	m^2c
2^4	$y_1^2 \cdot y_2 \cdot y_3$	m^3c^2g
2^5	$y_1^4 \cdot y_2^2 \cdot y_3 \cdot y_4$	$m^6c^3g^2r$
2^6	$y_1^8 \cdot y_2^4 \cdot y_3^2 \cdot y_4 \cdot y_5$	$m^{12}c^6g^3r^2b$
2^7	$y_1^{16} \cdot y_2^8 \cdot y_3^4 \cdot y_4^2 \cdot y_5 \cdot y_6$	$m^{24}c^{12}g^6r^3b^2(cl6)$
2^8	$y_1^{32} \cdot y_2^{16} \cdot y_3^8 \cdot y_4^4 \cdot y_5^2 \cdot y_6 \cdot y_7$	$m^{48}c^{24}g^{12}r^6b^3(cl6)^2(cl7)$
2^9	$y_1^{64} \cdot y_2^{32} \cdot y_3^{16} \cdot y_4^8 \cdot y_5^4 \cdot y_6^2 \cdot y_7 \cdot y_8$	$m^{96}c^{48}g^{24}r^{12}b^6(cl6)^3(cl7)^2(cl8)$
2^{10}	$y_1^{128} \cdot y_2^{64} \cdot y_3^{32} \cdot y_4^{16} \cdot y_5^8 \cdot y_6^4 \cdot y_7^2 \cdot y_9$	$m^{192}c^{96}g^{48}r^{24}b^{12}(cl6)^6(cl7)^3(cl8)^2(cl9)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Example 10

2^5 行までは 1 chain が 2^3 回、2 chain が 2^2 回、3 chain が 2 回、4 chain が 1 回。magenta が 2^3 回、cyan が 2^2 回、green が 2 回、red が 1 回出現している。

$$g^2 = (green \cdot magenta)^2$$
$$r = red \cdot cyan$$

Table 12:

Table 行数	増加率累計	y 初項	y 期待値
2^2	1.148105626	34	39.03559127
2^3	0.737768579	46	33.93735463
2^4	0.204113429	118	24.08538457
2^5	0.015623359	190	2.968438285
2^6	0.000091534	478	0.043753018
⋮	⋮	⋮	⋮

7. 増加率累計 (Increase rate of cumulative)
   重複する経路を除いた Table 行数 2^n における増加率合計

$$A \cdot B^{-1}$$

8. y 初項 (First item of yellow cell)

$$\text{first item of yellow cell} = \text{first item of not yellow cell} + 6$$

9. y 期待値 (Expected value of yellow cell)

$$\text{Expected value of yellow cell} = (\text{first item of yellow cell}) \cdot (\text{Increase rate of cumulative})$$

Proof 11

1. If the Collats conjecture is false, there is a sequence of numbers that diverges at both ends.

2. The number of routes increases when going on the reverse path. Also, each number sequence has a minimum value.

3. The branch corresponding to the minimum value also increases with the number of rows.

4. In the non-overlapping part of the Collats path, dependent trials can be applied.

5. If there is a sequence that does not converge to the minimum value 10 of yellow cells, the rate of decrease is given to the sequence of larger first terms.

6. 3 and 5 are exclusive event.

Table 13:

※ root	*node*−							*odd*	*node*+
trunk	⋯	64		16		※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	⋯							**3**	10
branch	⋯		160		40		10	5	16
branch	⋯	448		112		28		7	22
leef	⋯							**9**	28
branch	⋯		352		88		22	11	34
branch	⋯	832		208		52		13	40
leef	⋯							**15**	46
branch	⋯		544		136		34	17	52
branch	⋯	1216		304		76		19	58
leef	⋯							**21**	64
branch	⋯		736		184		46	23	70
branch	⋯	1600		400		100		25	76
leef	⋯							**27**	82
branch	⋯		928		232		58	29	88
branch	⋯	1984		496		124		31	94
leef	⋯							**33**	100
branch	⋯		1120		280		70	35	106
branch	⋯	2368		592		148		37	112
leef	⋯							**39**	118
branch	⋯		1312		328		82	41	124
branch	⋯	2752		688		172		43	130
leef	⋯							**45**	136
branch	⋯		1504		376		94	47	142
branch	⋯	3136		784		196		49	148
leef	⋯							**51**	154
branch	⋯		1696		424		106	53	160
branch	⋯	3520		880		220		55	166
leef	⋯							**57**	172
branch	⋯		1888		472		118	59	178
branch	⋯	3904		976		244		61	184
leef	⋯							**63**	190
branch	⋯		2080		520		130	65	196
branch	⋯	4288		1072		268		67	202
leef	⋯							**69**	208
branch	⋯		2272		568		142	71	214
branch	⋯	4672		1168		292		73	220
leef	⋯							**75**	226
branch	⋯		2464		616		154	77	232
branch	⋯	5056		1264		316		79	238
leef	⋯							**81**	244
branch	⋯		2656		664		166	83	250
branch	⋯	5440		1360		340		85	256