English pages 1-6
French pages 7-12

7 March 2016

Minor of k-chromatic graphs, four color theorem and Hadwiger conjecture

By Ali Reza NAJAR SALIGHEH

Université Catholique de Louvain, Belgium

ORCID ID: orcid.org/0000-0002-2260-3668

ABSTRACT. First we will prove that K_k (the complete graph with k vertices) is a minor of every graph with chromatic number k. Then we will prove some other statements such as the four color theorem and the Hadwiger conjecture. We will not use computer-assisted proofs.

Table of contents

1. Introduction

In order to prove the four color theorem, new statements will be made and *theorem 1* is probably the most important one because all other theorems of this paper are based on it. Thanks to *theorem 1*, a set of other theorems can be easily proved.

So in this paper we will prove the four color theorem and the Hadwiger conjecture. It seems to be very likely that the knowledges acquired throughout this paper may also allow us to prove some other statements.

In this paper, the complete graph with k vertices is denoted by K_k. The chromatic number of the graph G is denoted by *X(G)*. A n-chromatic graph means a graph with chromatic number n. A m-colorable graph means a graph that can be colored with m different colors. A minor H of the graph G means a graph obtained from G by deleting some edges and/or some vertices and/or by contracting some edges.

2. Theorem 1 and 2: Minor of k-chromatic graphs

<u>Statement 1:</u>

For every integer $k \geq 1$, every graph with chromatic number k include K_k as a minor.

THEOREM 1. If $X(G) = k$, then K_k is a minor of the graph G.

<u>Definitions:</u>

DEFINITION 1. The set A is called *simili of the vertex B* if and only if, in every k-coloring of the graph, A is a set of vertices and at least one of them is colored with the same color than the vertex B.

DEFINITION 2. Saying "*the vertex C is adjacent to the simili A*", means that the vertex C is adjacent to all the vertices of the simili C.

DEFINITION 3. S(A,B) means a simili of the vertex A adjacent to a simili of the vertex B called S(B,A).

DEFINITION 4. P(A,B) means a path between the vertex A and its simili S(A,B).

<u>Proof:</u>

LEMMA 1. If in every k-coloring of the graph G, there are always 2 vertices colored with 2 distinct colors (called vertices A and B), then there are always a simili of the vertex A (called simili A') adjacent to a simili of the vertex B (called simili B').

PROOF. If A' is adjacent to B', there is always a vertex colored with the same color than the vertex A adjacent to a vertex colored with the same color than the vertex B, so A and B will never be colored with the same color. On the contrary, if A' is adjacent to no simili of B, then A' is not always adjacent to a vertex colored with the same color as B, then A might be colored with the same color as B. But we said it's not the case.

LEMMA 2. If in every k-coloring of the graph G, there are always a vertex A and a vertex B colored with 2 distinct colors, then there is a simili A' of the vertex A adjacent to a simili B' of the vertex B and there is always a path between the vertex A and the simili A'. (There is also always a path between the vertex B and the simili B').

PROOF. If there is no path between A and A', then the simili A' is a k-chromatic set such as K_k. Indeed, if A' is (k-1)-colorable, then it might exist a coloring of the graph where no vertex of A' is colored with the same color as A.
If the simili A' is a k-chromatic set, then B' is adjacent to A', then in every k-coloring, the vertex B can't be colored. But we said that B is colored. So there is a contradiction and a path must exist between A and A'.
The remaining of lemma 2 is proved in lemma 1.

Next lemma is very important.

LEMMA 3. If in every k-coloring of the graph G, there are always a vertex A and a vertex B colored with 2 different colors, then there is also a simili A' of the vertex A adjacent to a simili B' of the vertex B and there are also at least two different paths, the first one is between the vertex A and the simili A' and the second one is between the vertex B and the simili B'.

LEMMA 3 (ANOTHER FORMULATION). If in every k-coloring of the graph G, there are always a vertex A and a vertex B colored with 2 different colors, then there is also at least one P(A, B) ≠ P(B, A).

We will call the simili S(A, B) as A' and the simili S(B, A) as B'.

Lemma 3 is applicable for every A ≠ A' and B ≠ B'.

PROOF. We will split the problem into 2 parts.

CASE 1. The similis A' and B' are separate.

Let be a graph G including a path between A and B' (called path 1), a path between B and A' (called path 2) and an edge between A' and B' (called path 3), such that the paths 1, 2 and 3 are separate. We will call path 4 the union of path 2 with path 3. In such graph, there is always a path between A and A' (called path 5), such that paths 4 and 5 are separate.

PROOF OF CASE 1. In the case where there is no path 5, then as A' is colored with the same color than the vertex A, the simili A' must be adjacent to the k-1 other colors, so it must be adjacent to the k-1 similis of the vertices colored with the other colors than the color of vertex A. In order to have these k-1 similis colored with the other colors than vertex A, each of them must be adjacent to a simili of the vertex A (called the similis A''_m). Either A''_m = A, or there is a path between A and A''_m separates from path 4. (For every 1 ≤ m ≤ k-1.)

For the path between A and A''_m, we will use the same method in order to say that either indeed there is a path between A and A''_m separate from path 4, or there is a path between A and A'''_m separate from path 4. (A'''_m being another simili of A). And so on.

In every situations of the case 1, if there are a vertex A and a vertex B colored with 2 different colors, then there are also 2 similis adjacent (a simili of A and a simili of B) and there are always two separate paths, the first one between A and its simili and the second one between B and its simili.

CASE 2. A' = B'.

If A' = B', then the simili A' include at least two vertices. In every k-coloring of the simili, a vertex (which we will call A_2) will be colored with the same color as the vertex A and a vertex (which we will call B_2) will be colored with the same color as the vertex B. So A_2 is a simili of the vertex A and B_2 is a simili of the vertex B. In every k-coloring of G, the vertices A_2 and B_2 will be colored with 2 different colors. So either A_2 and B_2 are adjacent, or this is not the case. But in every case, there is always a simili A_2' of the vertex A_2 adjacent to a simili B_2' of the vertex B_2 and there are always two separate paths, the first one between A_2 and its simili A_2' and the second one between the vertex B_2 and its simili B_2'. (For every $A_2 \neq A_2'$ and $B_2 \neq B_2'$.) A_2 and B_2 are equivalent to A and B. So either the two paths exist, or the vertices A_3 and B_3 exist, and we can continue like that until finding two vertices A_n and B_n which respect this property.

There are also two other separate paths, the first one between A and A_n' and the second one between B and B_n'. (For every A ≠ A_n' and B ≠ B_n'.) Indeed, A_n' and B_n' are separate and adjacent, they are equivalent to the similis A' and B' which we spoke in case 1.

In the end, in every case we can conclude that, if in every k-coloring of the graph G, there are always a vertex A and a vertex B colored with 2 different colors, then there are also always two adjacent similis (a simili of A and a simili of B) and there are always two separate paths, the first one between A and its simili and the second one between B and its simili.

Lemma 3 has been proved.

From lemma 3, we can now state lemma 4. I think lemma 4 may have many use and so it is important. This is why I will also call it **theorem 2**.

For every:
$1 \leq i \leq n$,
$1 \leq j \leq n$, $j \neq i$,
$1 \leq r \leq n$, $r \neq i$,
$1 \leq s \leq n$, $s \neq r$,
vertex $v_i \neq S(v_i, v_j)$ and vertex $v_r \neq S(v_r, v_s)$.

LEMMA 4, THEOREM 2. If in every k-coloring of the graph G, there are always n vertices (called v_i) colored with n different colors, then there are always at least one $P(v_i, v_j) \neq P(v_r, v_s)$.

PROOF. We can conclude lemma 4 from lemma 3 and its proof.

LEMMA 5. If in every k-coloring of the graph G, there are always n vertices colored with n different colors, then K_n is always a minor of G.

PROOF. In order to obtain K_n, we only have to contract the different paths $P(v_i, v_j)$. (For every v_i and v_j as described in lemma 4).

LEMMA 6. If X(G) = k, then K_k is a minor of the graph G. (This is theorem 1).

PROOF. If X(G) = k, then in every k-coloring of G, there are always k vertices colored with k different colors. As proved in lemma 5, this means K_k is always a minor of G.

Theorem 1 is now proved.

3. Theorem 3

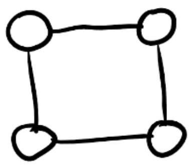
STATEMENT 2. If G doesn't include K_k as a minor, then $X(G) < k$.

PROOF. Let be the integer $n \geq k$. As described in theorem 1, if $X(G) \geq k$, then G include K_n as a minor. As K_n include K_k, there is a contradiction because we said K_k is not a minor of G. So $X(G) < k$.

4. Theorem 4

STATEMENT 3. This statement is false: « If K_k is a minor of the graph G, then $X(G) = k$. »

PROOF. Here is a counterexample where K_3 is a minor of G and $X(G) = 2$.



5. Theorem 5

STATEMENT 4. Let be $h(G) = k$ and k the biggest integer the graph G includes K_k as minor.
Then $X(G) \leq h(G)$.

PROOF. G doesn't include K_{k+1} as a minor. So theorem 3 say us that $X(G) < k+1$.

$X(G) < k+1$
$\Leftrightarrow X(G) \leq k$
$\Leftrightarrow X(G) \leq h(G)$

6. Theorem 6: Hadwiger conjecture

STATEMENT 5. Hadwiger [1943] conjectured that if K_{k+1} is not a minor of G, then G is k-colorable.

PROOF. G doesn't include K_{k+1} as minor. So theorem 3 say us that $X(G) < k+1$.
So $X(G) \leq k$. So G is k-colorable.

7. Theorem 7

STATEMENT 6. If the graph G is not n-colorable, then K_{n+1} is a minor of G.

PROOF. Theorem 6 say us that if K_{n+1} is not a minor of the graph G, then G is n-colorable.
But G is not n-colorable. So K_{n+1} must be a minor of G.

8. Theorem 8: Four color theorem

STATEMENT 7. « Every planar map is 4-colorable ».

PROOF. Wagner [1937] proved that G is planar if and only if it includes neither K_5 nor $K_{3,3}$ as minor. So a planar doesn't include K_5 as minor. So theorem 6 tell us that every planar map is 4-colorable.

Reference

West, Douglas Brent. *Introduction to graph theory*, 2nd ed, Prentice Hall: Upper Saddle River, c2001. xix, 588 p.

Mineur des graphes k-chromatique, théorème des quatre couleurs et conjecture d'Hadwiger

Par Ali Reza NAJAR SALIGHEH

Université Catholique de Louvain, Belgique

ORCID ID: orcid.org/0000-0002-2260-3668

ABSTRACT. Premièrement on va démontrer que K_k (le graphe complet à k sommets) est mineur de tout graphe de nombre chromatique k. Ensuite on va démontrer quelques autres affirmations tel que le théorème des quatre couleurs et la conjecture d'Hadwiger. Le tout, sans utiliser d'ordinateur.

Table des matières

1. Introduction

Afin de démontrer le théorème des quatre couleurs sans assistance par ordinateur, l'auteur de cet article a développé de nouveaux théorèmes dont le plus important est très probablement le *théorème 1* car tous les autres théorèmes de ce papier se basent sur celui-ci. Grâce au *théorème 1*, on peut facilement démontrer tout un ensemble d'autres théorèmes.

Ainsi dans ce papier, on va démontrer le théorème des quatre couleurs et la conjecture d'Hadwiger. Il est fort probable que les savoirs acquis au fil de ce papier puissent nous permettre de démontrer bien d'autres affirmations.

Dans ce papier, le graphe complet à k sommets est désigné par K_k. Le nombre chromatique du graphe G est désigné par $X(G)$. Un graphe n-chromatique désigne un graphe de nombre chromatique n. Un graphe m-colorable désigne un graphe pouvant être coloré avec m couleurs. Un mineur H du graphe G désigne un graphe obtenu à partir de G en supprimant des arrêtes et/ou sommets et/ou en contractant des arrêtes.

2. Théorèmes 1 et 2 : Mineur d'un graphe k-chromatique

Enoncé 1 :

Pour tout entier $k \geq 1$, tout graphe de nombre chromatique k contient K_k comme mineur.

THÉORÈME 1. Si $X(G) = k$, alors K_k est un mineur du graphe G.

Définitions :

DÉFINITION 1. L'ensemble *A* est appelé *simili du sommet B* si, dans toute k-coloration du graphe, *A* est un ensemble de sommets dont l'un est coloré avec la même couleur que celle du sommet *B*.

DÉFINITION 2. Si on dit qu'un sommet *A* est adjacent au simili *B*, alors cela veut dire que le sommet *A* est adjacent à tous les sommets du simili *B*.

DÉFINITION 3. S(A,B) signifie un simili du sommet A adjacent à un simili du sommet B appelé S(B,A).

DÉFINITION 4. P(A,B) signifie un chemin dont une extrémité est le sommet A et l'autre le simili S(A,B).

Démonstration :

LEMME 1. Si dans toute k-coloration du graphe *G* il y a toujours 2 sommets colorés avec 2 couleurs distinctes (appelés sommets *A* et *B*), alors il y a toujours un simili du sommet *A* (appelé simili *A'*) adjacent à un simili du sommet *B* (appelé simili *B'*).

PREUVE. Si *A'* est adjacent à *B'*, il y aura toujours un sommet coloré avec la même couleur que le sommet *A* adjacent à un sommet coloré avec la même couleur que *B*, donc *A* et *B* ne pourront jamais adopter la même couleur. Au contraire, si *A'* n'est pas adjacent à un simili de *B*, alors *A'* n'est pas toujours adjacent à un sommet coloré avec la même couleur que *B*, alors *A* peut être coloré avec la même couleur que *B*.

LEMME 2. Si dans toute k-coloration du graphe G, il y a toujours un sommet A et un sommet B colorés avec 2 couleurs distinctes, alors il y a aussi un simili A' du sommet A adjacent à un simili B' du sommet B et il y a toujours un chemin entre le sommet A et le simili A'. (Il y a aussi un chemin entre le sommet B et le simili B').

PREUVE. S'il n'y a pas de chemins entre A et A', alors le simili A' est un ensemble k-chromatique comme par exemple K_k. Effectivement, si A' est (k-1)-colorable, alors il peut exister des colorations du graphe où au aucun sommet de A' n'est pas coloré avec la couleur de A.
Si le simili A' est un ensemble k-chromatique, si B' est adjacent à A', alors dans toute k-coloration, le sommet B ne peut adopter aucune couleur. Or on a dit que B est coloré avec une couleur. Il y a donc contradiction, par conséquent il doit exister un chemin entre A et A'.
Le restant du lemme 2 est prouvé dans le lemme 1.

Le lemme suivant est très important.

LEMME 3. Si dans toute k-coloration du graphe G, il y a toujours un sommet A et un sommet B colorés avec 2 couleurs distinctes, alors il y a aussi un simili A’ du sommet A adjacent à un simili B’ du sommet B et il existe aussi au moins deux chemins distincts, le premier entre le sommet A et le simili A’ et le second entre le sommet B et le simili B’.

LEMME 3 (AUTRE FORMULATION). Si dans toute k-coloration du graphe G, il y a toujours un sommet A et un sommet B colorés avec 2 couleurs distinctes, alors il existe au moins un P(A, B) ≠ P(B, A).

On va appeler A’ le simili S(A, B) et B’ le simili S(B, A).

Le lemme 3 est valable pour tout A ≠ A’ et B ≠ B’.

PREUVE. On va diviser la situation en 2 parties.

CAS 1. Les similis A’ et B’ sont entièrement distincts.

Soit un graphe G contenant un chemin entre A et B’ (appelé chemin 1), un chemin entre B et A’ (appelé chemin 2) et un arc entre A’ et B’ (appelé chemin 3), de sorte que les chemins 1, 2 et 3 soient distincts. On va appeler chemin 4, l’union du chemin 2 avec le chemin 3. Dans un tel graphe, il existe aussi toujours un chemin entre A et A’ (appelé chemin 5), de sorte que les chemins 4 et 5 soient distincts.

PREUVE DU CAS 1. Dans le cas où il n’existerait pas de chemin 5, pour qu’un sommet de A’ soit coloré avec la même couleur que le sommet A, il faut que A’ soit adjacent aux k-1 autres couleurs donc à k-1 similis de sommets colorés avec les autres couleurs que celle du sommet A. Pour que ces k-1 similis soient des similis de sommets colorés avec les autres couleurs que celle du sommet A, chacun d’entre eux doit être adjacent à un simili du sommet A (appelés similis A''_m). Soit A''_m = A, soit il y a un chemin entre A et A''_m distinct du chemin 4.

Pour le chemin entre A et A''_m, on va utiliser le même raisonnement pour dire que soit il y a effectivement un chemin entre A et A''_m distinct du chemin 4, soit il y a un chemin entre A et A'''_m distinct du chemin 4. (A'''_m étant un autre simili de A). Et ainsi de suite.

Dans toutes les situations, dans le cas 1, s’il y a toujours un sommet A et un sommet B colorés avec 2 couleurs distinctes, alors il y a toujours deux similis adjacents (un simili de A et un simili de B) et il y a toujours deux chemins distincts, le premier entre A et son simili et le second entre B et son simili.

CAS 2. A’ = B’.

Si A’ = B’, alors le simili A’ contient au moins deux sommets. Dans toute k-coloration du simili, un sommet (que l’on va appeler A_2) sera coloré avec la même couleur que le sommet A et un sommet (que l’on va appeler B_2) sera coloré avec la même couleur que le sommet B. A_2 est donc un simili du sommet A et B_2 est un simili du sommet B. Dans toute k-coloration de G, les sommets A_2 et B_2 seront toujours colorés avec 2 couleurs distinctes. Donc soit A_2 et B_2 sont adjacents, soit ce n’est pas le cas. Dans tous les cas il y a toujours un simili A_2’ du sommet A_2 qui est adjacent à un simili B_2’ du sommet B_2 et il existe deux chemins distincts, le premier entre le sommet A_2 et le simili A_2’ et le second entre le sommet B_2 et le simili B_2’. (Pour tout $A_2 \neq A_2$’ et $B_2 \neq B_2$’.) A_2 et B_2 sont équivalents à A et B. Donc soit les deux chemins existent, soit des sommets A_3 et B_3 existent, ainsi de suite jusqu’à trouver deux sommets A_n et B_n qui respectent cette propriété.

Il existe aussi deux autres chemins distincts, le premier entre A et A_n' et le second entre B et B_n'. (Pour tout A ≠ A_n' et B ≠ B_n'.) Effectivement A_n' et B_n' sont distincts et adjacents, ils sont donc équivalents aux simili A' et B' que nous avons traités dans le cas 1.

Au final, on peut conclure que dans tous les cas, si dans toute k-coloration du graphe G, il y a toujours un sommet A et un sommet B colorés avec 2 couleurs distinctes, alors il y a toujours deux similis adjacents (un simili de A et un simili de B) et il y a toujours deux chemins distincts, le premier entre A et son simili et le second entre B et son simili.

Le lemme 3 a été démontré.

A partir du lemme 3, nous pouvons désormais déclarer le lemme 4. Je pense que le lemme 4 peut avoir beaucoup d'applications et est donc important. C'est pourquoi je vais aussi l'appeler **théorème 2**.

Pour tout :
1 ≤ i ≤ n,
1 ≤ j ≤ n, j ≠ i,
1 ≤ r ≤ n, r ≠ i,
1 ≤ s ≤ n, s ≠ r,
sommet v_i ≠ S(v_i, v_j) et sommet v_r ≠ S(v_r, v_s).

LEMME 4, THÉORÈME 2. Si dans toute k-coloration du graphe G, il y a toujours n sommets (appelés v_i) colorés avec n couleurs distinctes, alors il existe au moins un P(v_i, v_j) ≠ P(v_r, v_s).

PREUVE. On peut conclure le lemme 4 à partir du lemme 3 et de sa démonstration.

LEMME 5. Si dans toute k-coloration du graphe G, il y a toujours n sommets colorés avec n couleurs distinctes, alors K_n est toujours un mineur de G.

PREUVE. Pour obtenir K_n, il suffit de contracter les différents chemins P(v_i, v_j). (Pour tout v_i et v_j tels que décrits dans le lemme 4).

LEMME 6. Si X(G) = k, alors K_k est un mineur du graphe G. (Equivaut au théorème 1).

PREUVE. Si X(G) = k, alors dans toute k-coloration de G, il y a toujours k sommets coloré avec k couleurs distinctes. Comme prouvé au lemme 5, cela veut donc dire que K_k est toujours mineur de G.

Le théorème 1 est maintenant démontré.

3. Théorème 3

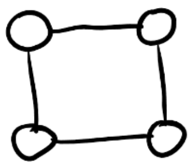
ENONCÉ 2. Si G ne contient pas K_k comme mineur, alors X(G) < k.

PREUVE. Soit l'entier $n \geq k$. Etant donné le théorème 1, si $X(G) \geq k$, alors G contient K_n comme mineur. Il y a une contradiction étant donné que K_n contient K_k et étant donné qu'on a dit que K_k n'est pas un mineur de G. Donc $X(G) < k$.

4. Théorème 4

ENONCÉ 3. Ce théorème est faux : « Si K_k est mineur d'un graphe G, alors $X(G) = k$. »

PREUVE. Voici un contre-exemple où K_3 est mineur de G et $X(G) = 2$.



5. Théorème 5

ENONCÉ 4. Soit $h(G) = k$ et k étant le plus grand entier pour lequel le graphe G contient K_k comme mineur. $X(G) \leq h(G)$.

PREUVE. G ne contient pas K_{k+1} comme mineur. Le théorème 3 nous dit donc que $X(G) < k+1$.

$X(G) < k+1$
$\Leftrightarrow X(G) \leq k$
$\Leftrightarrow X(G) \leq h(G)$

6. Théorème 6 : Conjecture de Hadwiger

ENONCÉ 5. Hadwiger [1943] a conjecturé que si K_{k+1} n'est pas un mineur de G, alors G est k-colorable.

PREUVE. G ne contient pas K_{k+1} comme mineur. Le théorème 3 nous dit donc que $X(G) < k+1$.
Donc $X(G) \leq k$. Donc G est k-colorable.

7. Théorème 7

ENONCÉ 6. Si le graphe G n'est pas n-colorable, alors K_{n+1} est un mineur de G.

PREUVE. Le théorème 6 dit que si K_{n+1} n'est pas un mineur du graphe G, alors G est n-colorable. Or G n'est pas n-colorable. Donc, K_{n+1} est un mineur de G.

8. Théorème 8 : Théorème des quatre couleurs

ENONCÉ 7. « Tout graphe planaire est 4-colorable ».

PREUVE. Wagner [1937] a prouvé qu'un graphe G est planaire si et seulement si G ne contient ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur. Un graphe planaire ne contient donc pas K_5 comme mineur. Par conséquent, le théorème 6 nous dit que tout graphe planaire est 4-colorable.

Source

West, Douglas Brent. *Introduction to graph theory*, 2nd ed, Prentice Hall: Upper Saddle River, c2001. xix, 588 p.