

*Хмельник С.И.*

**Непротиворечивое  
решение  
уравнений  
Максвелла**

*2016*

Хмельник С. И.

# Непротиворечивое решение уравнений Максвелла

Редакция 1 – 06.03.2016

Редакция 2 – 16.03.2016

Редакция 3, исправленная и дополненная – 03.04.2016

Редакция 4, дополненная – 18.06.2016

Редакция 5, дополненная – 29.08.2016

Редакция 6, дополненная – 03.10.2016

Редакция 7, дополненная – 27.10.2016

Редакция 8, дополненная – 13.03.2017

Редакция 9, дополненная – 27.07.2017

Редакция 10, исправленная и дополненная – 17.08.2017

Израиль

2016

Solomon I. Khmelnik

**Inconsistency Solution  
of Maxwell's Equations  
(in Russian)**

Copyright © 2016 by Solomon I. Khmelnik

Соломон Ицкович Хмельник

<https://orcid.org/0000-0002-1493-6630>

All right reserved. No portion of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, without written permission of the author.

Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp.

BOX 15302, Bene-Ayish, Israel, 60860

E-mail: [solik@netvision.net.il](mailto:solik@netvision.net.il)

Printed in United States of America, Lulu Inc.,

ID 1855552

ISBN 978-1-329-96074-9



Israel 2016

## Аннотация

Предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума, для провода с постоянным и переменным током, для конденсатора, для сферы и т.д. Предварительно отмечается, что доказательство единственности известного решения основано на законе сохранения энергии, который не соблюдается (для мгновенных значений) в известном решении. Предлагаемое решение

- не противоречит закону сохранения энергии в каждый момент времени, т.е. устанавливает постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявляет сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями,
- объясняет существование потока энергии вдоль провода, равного потребляемой мощности.

Приводится подробное доказательство для заинтересованного читателя.

Рассматриваются экспериментальные подтверждения теории.

Предлагаются объяснения экспериментов, которые до сих пор не были обоснованы

Рассматриваются технические приложения полученного решения.

## Оглавление

- Глава 0. Предисловие \ 0-1
- Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума \ 1-1
- Глава 1а. Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением \ 1а-1
- Глава 2. Решение уравнений Максвелла для диэлектрической цепи переменного тока \ 2-1
- Глава 3. Решение уравнений Максвелла для магнитной цепи переменного тока \ 3-1
- Глава 4. Решение уравнений Максвелла для низкоомного провода переменного тока \ 4-1
- Глава 4а. Решение уравнений Максвелла для провода с переменным током \ 4а-1
- Глава 5. Решение уравнений Максвелла для провода постоянного тока \ 5-1
- Глава 5а. Двигатель Мильроя \ 5а-1
- Глава 5с. Магнетосопротивление \ 5с-1
- Глава 6. Излучение и передача энергии по одному проводу \ 6-1
- Глава 7. Решение уравнений Максвелла для конденсатора в цепи постоянного тока. Природа потенциальной энергии конденсатора. \ 7-1
- Глава 7а. Решение уравнений Максвелла для окрестности торца магнита \ 7а-1
- Глава 8. Уравнения Максвелла в сферических координатах \ 8-1
- Глава 8а. Сферический конденсатор \ 8а-1
- Глава 8в. О проектировании антенн \ 8в-1
- Глава 9. Природа земного магнетизма \ 9-1
- Глава 10. Решение уравнений Максвелла для шаровой молнии \ 10-1
- Глава 11. Математическая модель плазменного кристалла \ 11-1
- Глава 12. Работа силы Лоренца \ 12-1
- Литература \ L-1

---

# Глава 0. Предисловие

---

## Оглавление

1. Вступление \ 1
2. О потоке энергии в проводе \ 3
3. Требования к непротиворечивому решению уравнений Максвелла \ 4
4. Варианты уравнений Максвелла \ 4
- Приложение 0. Декартовы координаты. \ 7
- Приложение 1. Цилиндрические координаты. \ 8
- Приложение 2. Сферические координаты. \ 8
- Приложение 3. Некоторые соотношения в системах СГС и СИ. \ 9
- Приложение 4. Известное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. \ 10

## 1. Вступление

"До настоящего времени не было обнаружено ни одного эффекта, который потребовал бы видоизменения уравнений Максвелла" [36]. Тем не менее, в последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Посмотрим на рис. 1, где изображена волна, являющаяся известным решением уравнений Максвелла. Уверенность критиков уравнений Максвелла создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии в такой волне. И, действительно, *"плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «нульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?"* [1]. Безусловно, нарушается, **если** электромагнитная волна удовлетворяет **известному решению** уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: *"Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана"* [2]. Таким образом, единственность

решения доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

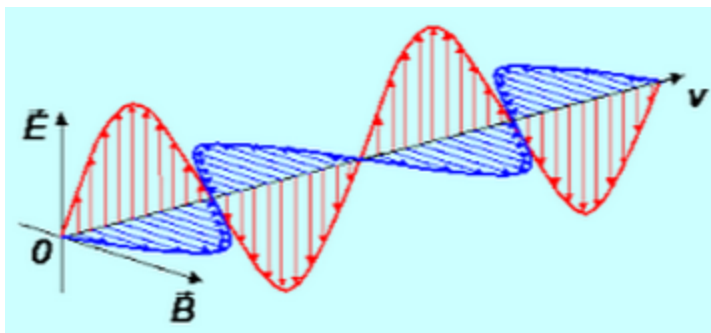


Рис. 1.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это хорошо видно на рис. 1. Но это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [1], например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют некоторым авторам усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти сомнительные результаты следуют **только из найденного решения**. Но это решение может быть иным (уравнения в частных производных имеют, как правило, несколько решений).

Для удобства читателя в приложении 4 описан метод получения известного решения. Ниже выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

Рассмотрим еще электромагнитную волну в проводе. Если полагать, что провод имеет пренебрежимо малое сопротивление, то уравнения Максвелла для этой волны буквально совпадают с уравнениями Максвелла для волны в вакууме. Однако в электротехнике не используется известное решение. Используется только решение, связывающее напряженность кругового магнитного поля с током в проводе (будем для краткости в дальнейшем называть его электротехническим решением). Это

решение тоже удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако, во-первых, оно является другим решением тех же уравнений (что опровергает теорему о единственности известного решения). А, во-вторых, - и это главное, - электротехническое решение не объясняет известный экспериментальный факт.

Речь идет о скин-эффекте. Решение, объясняющее скин-эффект, должно содержать нелинейную зависимость плотности тока (идущего вдоль провода) от радиуса. Такая зависимость в соответствии с уравнениями Максвелла должна сочетаться с существованием радиальных и круговых электрических и магнитных напряженностей, нелинейно зависящих от радиуса. Этого нет в электротехническом решении. Скин-эффект объясняется на основе уравнений Максвелла, но из электротехнического решения он **не** следует. Это и позволяет утверждать, что электротехническое решение не объясняет экспериментальный факт.

Наконец, существующее решение противоречит существованию т.н. закрученного света [65].

## 2. О потоке энергии в проводе

Рассмотрим еще поток энергии в проводе. Существующее представление о передаче энергии по проводу состоит в том, что энергия каким-то образом распространяется вне провода [13]: "... наша «сумасшедшая» теория говорит, что электроны получают свою энергию, растрачиваемую ими на создание теплоты извне, от потока энергии внешнего поля внутри провода. Интуиция нам подсказывает, что электрон пополняет свою энергию за счет «давления», которое толкает его вдоль провода, так что энергия как будто должна течь вниз (или вверх) по проводу. А вот теория утверждает, что на самом деле на электрон действует электрическое поле, создаваемое очень далекими зарядами, и электроны теряют свою энергию, расходуемую на тепло именно из этих полей. Энергия отдаленных зарядов каким-то образом растекается по большой области пространства и затем втекает внутрь провода."

Такая теория противоречит и закону сохранения энергии. Действительно, поток энергии, путешествуя в пространстве, должен терять часть энергии. Однако это никак не обнаруживается ни экспериментально, ни теоретически. Но, главное, эта теория противоречит следующему эксперименту. Пусть по центральному проводу коаксиального кабеля течет постоянный ток. Этот провод изолирован от внешнего потока энергии. Откуда же появляется поток энергии, компенсирующий тепловые потери в проводе? Но, кроме потерь в проводе, этот поток из-вне должен проникнуть в нагрузку, например, в обмотки электромоторов, закрытые



стальными кожухами статора. Этот вопрос существующая теория не обсуждает.

Итак, существующая теория утверждает, что входящий (перпендикулярно проводу) электромагнитный поток позволяет току преодолевать сопротивление движению и совершает работу, которая превращается в тепло. Этот известный вывод вуалирует естественный вопрос: как ток может привлекать поток, если ток появляется благодаря потоку? Естественно предположить, что поток создает некоторую э.д.с., которая "движет ток". При этом поток энергии электромагнитной волны присутствует в самой волне и для этого не используется пространство, внешнее по отношению к волне.

Решение уравнений Максвелла должно моделировать такую структуру электромагнитной волны, в которой присутствует поток электромагнитной энергии.

Интуиция, о которой говорит Фейнман, нас **не** обманывает. Автор доказывает это ниже, **не** выходя за рамки уравнений Максвелла.

### **3. Требования к непротиворечивому решению уравнений Максвелла**

Итак, решение уравнений Максвелла должно

- описывать волну в вакууме и волну в проводе,
- не противоречить закону сохранения энергии в каждый момент времени, т.е. устанавливать постоянство плотности потока электромагнитной энергии во времени,
- выявлять сдвиг фаз между электрическими и магнитными напряженностями,
- объяснять существование потока энергии вдоль провода, равного потребляемой мощности.

Ниже выводится такое решение уравнений Максвелла.

### **4. Варианты уравнений Максвелла**

Далее выделяются различные частные случаи (варианты) системы уравнений Максвелла, которые мы пронумеруем для удобства изложения.

#### **Вариант 1.**

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид [3]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$I = \sigma E, \quad (5)$$

где

$I$ ,  $H$ ,  $E$  - ток проводимости, магнитная и электрическая напряженности соответственно,  
 $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость среды.

### Вариант 2.

Для вакуума надо принять  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Тогда система уравнений (1-5) примет вид:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (9)$$

Решение этой системы рассмотрено в главе 1.

### Вариант 3.

Рассмотрим вариант 1 в комплексном представлении:

$$\operatorname{rot}(E) + i\omega \frac{\mu}{c} H = 0, \quad (10)$$

$$\operatorname{rot}(H) - i\omega \frac{\varepsilon}{c} E - \frac{4\pi}{c} (\operatorname{real}(I) + i \cdot \operatorname{imag}(I)) = 0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{real}(I) = \sigma \cdot \operatorname{abs}(E). \quad (14)$$

Здесь важно отметить, что в (14) указывается не весь ток, а только его реальная часть, т.е. ток проводимости. Мнимая часть тока является током смещения и не зависит от электрических зарядов.

Решение этой системы рассмотрено в главе 4.

**Вариант 4.**

Для провода, в котором протекает синусоидальный ток  $I$  от внешнего источника, иногда можно исключить  $\operatorname{real}(I)$  в уравнениях (11-14). Это возможно для низкоомного провода и для диэлектрического провода (подробнее см. в главе 2). При этом система (11-14) принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (18)$$

Здесь важно отметить, что ток  $I$  **не** является током проводимости, даже если он течет по проводнику.

Решение этой системы рассмотрено в **главе 2**.

**Вариант 5.**

Для провода постоянного тока система по варианту 1 упрощается благодаря отсутствию производных по времени и принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (22)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (24)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (25)$$

$$I = \sigma E \quad (26)$$

или

**Вариант 6.**

$$\operatorname{rot}(I) = 0, \quad (27)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{4\pi}{c} I = 0, \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(I) = 0, \quad (29)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (30)$$

Решение этой системы рассмотрено в **главе 5**

Мы будем искать монохроматическое решение указанных систем. Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье.

Мы будем использовать систему цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  - см. приложение 1. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

### Приложение 0. Декартовы координаты.

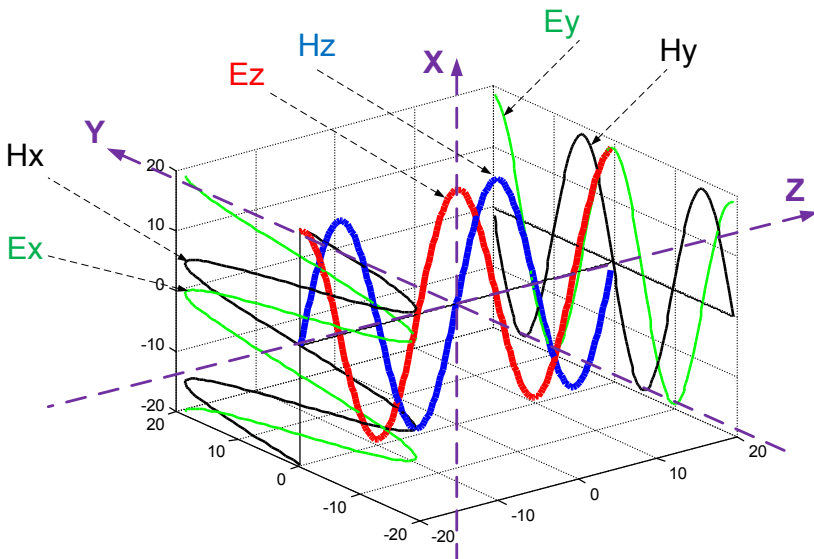
В декартовых координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , как известно [4], скаляр-дивергенция вектора  $H$ , вектор-градиент скалярной функции  $a(x, y, z)$ , вектор-ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{grad}(a) = \left[ \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right],$$

$$\operatorname{rot}(H) = \left( \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \right).$$

Электрические и магнитные напряженности в декартовых координатах, получаемые в результате полученного решения, показаны на следующем рисунке.



### Приложение 1. Цилиндрические координаты.

В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ , как известно [4], скаляр-дивергенция вектора  $H$ , вектор-градиент скалярной функции  $a(x, y, z)$ , вектор-ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (a)$$

$$\operatorname{grad}_r(a) = \frac{\partial a}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\varphi(a) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a}{\partial \varphi}, \quad \operatorname{grad}_z(a) = \frac{\partial a}{\partial z}, \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}_r(H) = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \quad (c)$$

$$\operatorname{rot}_\varphi(H) = \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (d)$$

$$\operatorname{rot}_z(H) = \left( \frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right). \quad (e)$$

### Приложение 2. Сферические координаты.

На рис. 1 показана система сферических координат  $(\rho, \theta, \varphi)$ , а в табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора  $E$  в этих координатах [4].

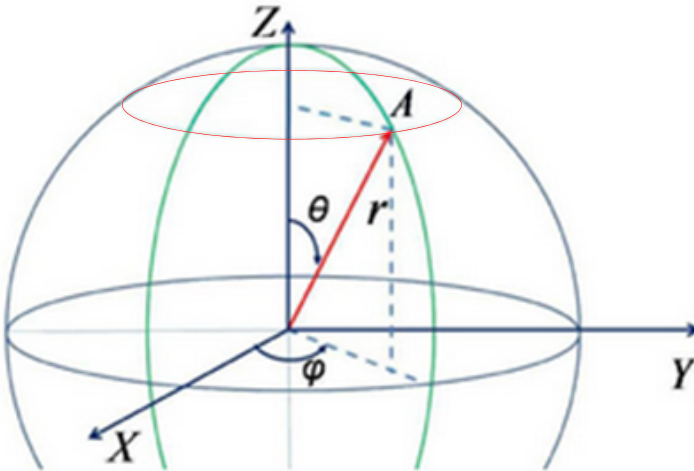


Рис. 1.

Таблица 1.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$

### Приложение 3. Некоторые соотношения в системах СГС и СИ.

Далее формулы приводятся в системе СГС, но некоторые примеры для наглядности даются в системе СИ. Поэтому в табл. 1 для удобства читателя указаны соотношения между некоторыми единицами измерения в этих системах.

Наименование единицы	СГС	СИ
Сила электрического тока	1 СГС	$3,33 \cdot 10^{-10}$ А
Электрическое напряжение	1 СГС	$3 \cdot 10^2$ В
Мощность, плотность потока энергии	1 СГС	$10^{-7}$ Вт
Плотность потока энергии на единицу длины провода	1 СГС	$10^{-5}$ Вт/м
Плотность электрического тока	1 СГС	$3,33 \cdot 10^{-6}$ А/м <sup>2</sup> $3,33 \cdot 10^{-12}$ А/мм <sup>2</sup>
Напряженность электрического поля	1 СГС	$3 \cdot 10^4$ В/м
Напряженность магнитного поля	1 СГС, Эрстед	80 А/м
Магнитная индукция	1 СГС, Гаусс	$10^{-4}$ Т
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	1 СГС	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Абсолютная магнитная проницаемость	1 СГС	$1,26 \cdot 10^{-8}$ Гн/м
Электрическая ёмкость	1 СГС	$1,1 \cdot 10^{-12}$ Ф

Индуктивность	1 СГС	$10^{-9}$ Гн
Электрическое сопротивление	1 СГС	$9 \cdot 10^{11}$ Ом
Электрическая проводимость	1 СГС	$1,1 \cdot 10^{-12}$ см
Удельное электрическое сопротивление	1 СГС	$9 \cdot 10^9$ Ом·м
Удельная электрическая проводимость	1 СГС	$1,1 \cdot 10^{-10}$ см/м

#### Приложение 4. Известное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в вакууме (приведенную выше в разделе 4):

$$\operatorname{rot}(E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (4)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (1) и получим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = \operatorname{rot}\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}\right) \quad (5)$$

или

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot}(H)). \quad (6)$$

Совместим уравнения (2, 6) и найдем:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E). \quad (6a)$$

Известно [4, стр. 131], что

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(E)) - \Delta E. \quad (7)$$

где в декартовых координатах

$$\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Из (3, 7) находим:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E)) = -\Delta E. \quad (9)$$

Совместим уравнения (6a, 8, 9) и найдем:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}. \quad (10)$$

В декартовых координатах это уравнение имеет комплексное решение вида

$$E(t, x, y, z) = |E|e_p e^{(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0)}, \quad (11)$$

что проверяется непосредственной подстановкой. Для этого предварительно вычисляются первые и вторые производные, входящие в (10). Константы  $(|E|, e_p, k_x, k_y, k_z, \omega, \varphi_0)$  имеют определенный физический смысл (что мы здесь не будем обсуждать)

Найденное решение является комплексным. Известно, что реальная часть комплексного решения также является решением. Следовательно, в качестве решения вместо (11) можно принять решение вида

$$E(t, x, y, z) = |E|e_p \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0), \quad (12)$$

Аналогично из находится решение вида

$$H(t, x, y, z) = |H|h_p \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0). \quad (13)$$

Заметим, что энергия, определяется как интеграл

$$\begin{aligned} W &= \int_i \left( \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_i \left( \varepsilon (|E|e_p \cos(\dots \omega t))^2 + \mu (|H|h_p \cos(\dots \omega t))^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon (|E|e_p)^2 + \mu (|H|h_p)^2 \right) \int_i \cos^2(\dots \omega t) dt = \\ &= \frac{1}{8\omega} \left( \varepsilon (|E|e_p)^2 + \mu (|H|h_p)^2 \right) \Big|_0^t \sin(\dots 2\omega t) \end{aligned}, \quad (14)$$

Из (12, 13, 14) с очевидностью следует

- 1) энергия изменяется во времени, что противоречит закону сохранения энергии,
- 2) напряженности  $E$  и  $H$  синфазны, что противоречит электротехнике.



# Глава 1. Второе решение уравнений Максвелла для вакуума

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Решение уравнений Максвелла \ 1
- 3. Напряженности \ 3
- 4. Потоки энергии \ 9
- 5. Скорость движения энергии \ 13
- 6. Импульс и момент импульса \ 15
- 7. Обсуждение \ 17
- Приложение 1 \ 18
- Приложение 2 \ 22

## 1. Введение

В главе "Предисловие" показана противоречивость известного решения уравнений Максвелла. Ниже предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума [5].

## 2. Решение уравнений Максвелла

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла для вакуума, которая приведена в главе "Предисловие", как вариант 1, и имеет вид

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (d)$$

В системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = M_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = M_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = M_z, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$J = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

$$M = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (13)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (15)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (16)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (17)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (18)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (19)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (20)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (21)$$

$$M_r = m_r(r)co, \quad (21a)$$

$$M_{\varphi} = m_{\varphi}(r)si, \quad (22)$$

$$M_z = m_z(r)si, \quad (23)$$

где  $j(r)$ ,  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $m(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-23) преобразуют систему уравнений (1-10) с тремя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $j(r)$ ,  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $m(r)$ .

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид (в приложении 1 см. (3.1, 39, 33, 34, 32) соответственно):

$$h_z(r) = 0, e_z(r) = 0, \quad (24)$$

$$e_r(r) = e_{\varphi}(r) = \frac{A}{2} r^{(\alpha-1)}, \quad (25)$$

$$h_{\varphi}(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r), \quad (26)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{\varphi}(r), \quad (27)$$

$$\chi = \pm \omega \sqrt{\mu\varepsilon} / c, \quad (28)$$

где  $A, \varepsilon, \mu, c, \alpha, \chi, \omega$  - константы.

Тем самым мы получили монохроматическое решение системы уравнений (1-10). Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

Таким образом, мы получили общее решение уравнений Максвелла в вакууме.

### 3. Напряженности

Рассмотрим решение (2.25):

$$e_r = e_{\varphi} = 0.5A \cdot r^{\alpha-1}, \quad (1)$$

где  $(A/2)$  - амплитуда напряженности. Из (1) следует:

$$(e_r^2 + e_{\varphi}^2) = \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)}. \quad (2)$$

На рис. 1 показаны, например, графики функций (1, 2) при  $A = -1$ ,  $\alpha = 0.8$ .

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки  $A(r, \varphi)$ . Напомним, что проекции  $h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r)$  и  $h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r)$ , - см. (2.26, 2.27). Направления векторов  $e_r(r)$  и  $e_\varphi(r)$  выбраны так:  $e_r(r) > 0$ ,  $e_\varphi(r) < 0$ . При этом **векторы  $E$ ,  $H$  всегда ортогональны**.

Для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны рассмотрим функции (2.11, 2.12) и (2.16-2.21). Видно, что **в каждой точке с координатами  $r, \varphi, z$  напряженности  $H, E$  сдвинуты по фазе на четверть периода** – см. рис. 0.

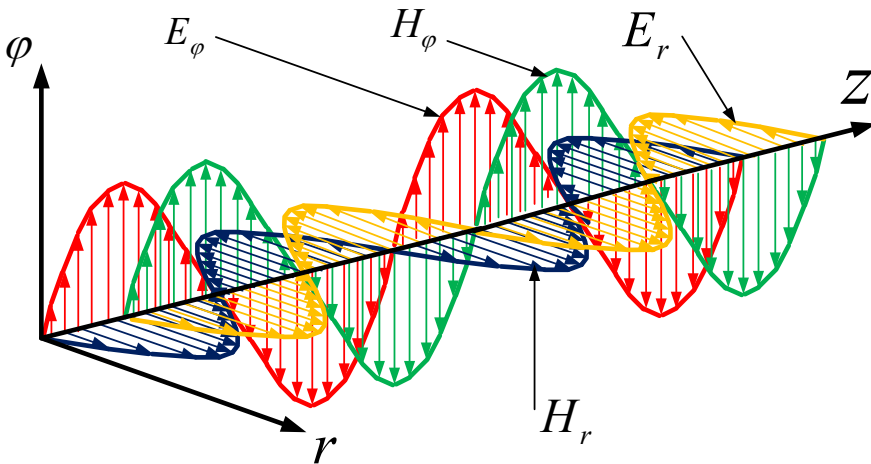


Рис. 0 (4hehe2.vsd).

Плотность энергии определяется из (2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.26, 2.27) и равна:

$$\begin{aligned}
 W &= \left( \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} \left( (e_r(r) \sin i)^2 + (e_\varphi(r) \sin i)^2 \right) + \frac{\mu}{2} \left( (h_r(r) \cos o)^2 + (h_\varphi(r) \cos o)^2 \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} \left( (e_r(r) \sin i)^2 + (e_\varphi(r) \sin i)^2 \right) + \frac{\mu}{2} \frac{\varepsilon}{\mu} \left( (e_\varphi(r) \cos o)^2 + (e_r(r) \cos o)^2 \right) = \\
 &= \varepsilon (e_r(r) \sin i)^2 + \varepsilon (e_\varphi(r) \cos o)^2 = \varepsilon (e_\varphi(r))^2 \left( (\sin i)^2 + (\cos o)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$W(r) = \varepsilon(e_\varphi(r))^2 \quad (3)$$

- см. также рис. 1. Из (3, 3.2) находим:

$$W(r) = \frac{A^2}{4} \cdot \varepsilon \cdot r^{2(\alpha-1)}. \quad (3a)$$

Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна во времени и одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса.

Пусть  $R$  – радиус кругового фронта волны. Тогда энергия электромагнитной волны, отнесенная к единице длины волны,

$$W = \frac{A\varepsilon}{4} \int_{r=0}^R (r^{2(\alpha-1)}) dr = \frac{A\varepsilon}{4} \frac{R^{(2\alpha-1)}}{(2\alpha-1)}. \quad (3b)$$

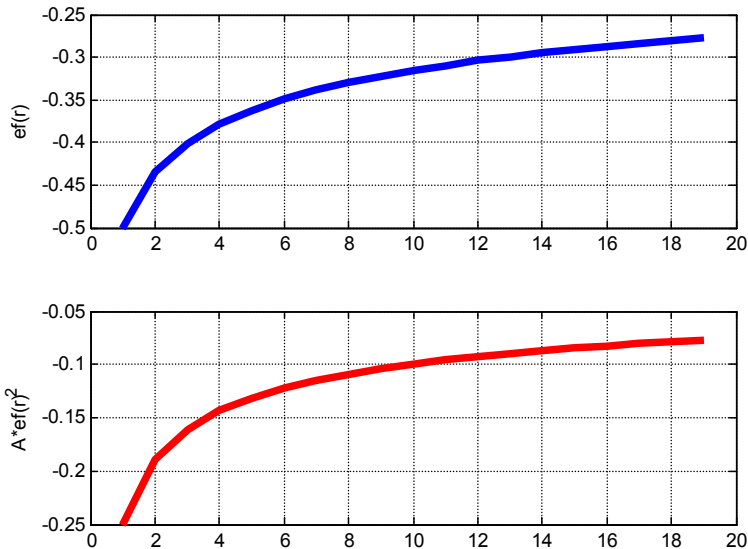


Fig.1. SecondSolMax.m

Решение существует и при измененных знаках функций (2.11, 2.12). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют то, что возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны.

Рассмотрим функции (2.11, 2.12) и (2.28) Тогда найдем

$$co = \cos(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z + \omega t). \quad (4)$$

Рассмотрим точку, движущуюся по цилиндру постоянного радиуса  $r$ , у которой значение напряженности зависит от времени по формуле

$$H_r = h_r(r) \cos(\omega t) \quad (5)$$

Сравнивая эту формулу с (2.16) и учитывая (4), замечаем, что формулы (5) и (2.16) совпадают, если в любой момент времени

$$\alpha \varphi + \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\omega}{c} z = 0 \quad (6)$$

или

$$\varphi = -\frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{\alpha \cdot c} z. \quad (7)$$

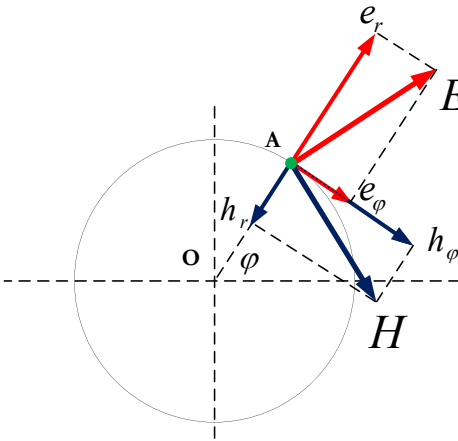


Рис. 2.

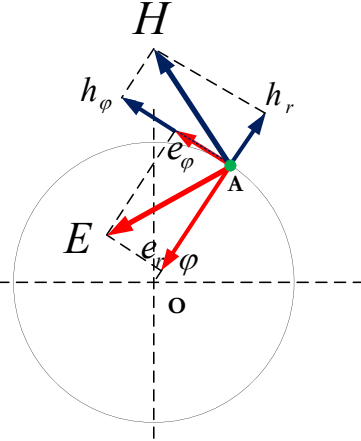


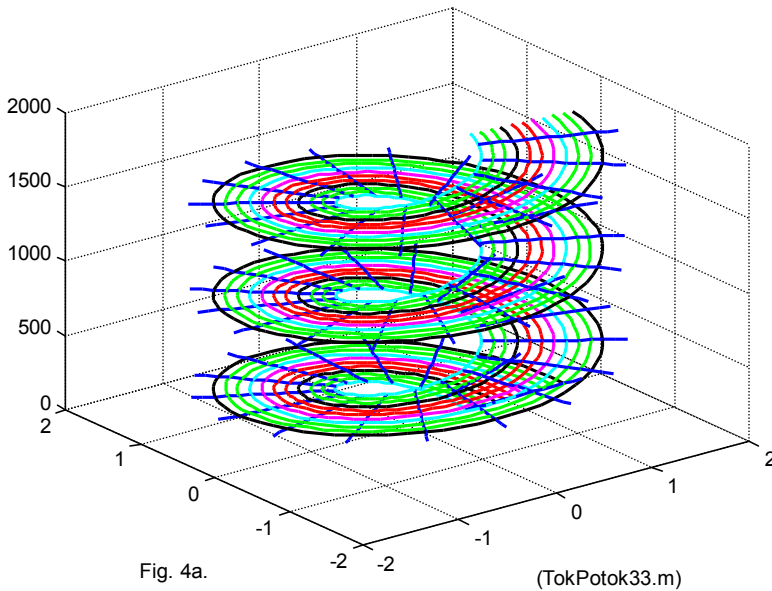
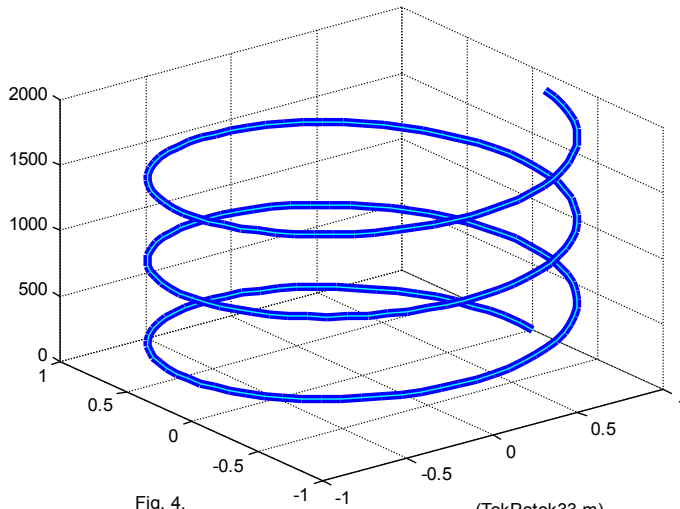
Рис. 3.

Таким образом, на цилиндре постоянного радиуса  $r$  существует траектория точки, описываемая формулами (4, 7), где все напряженности изменяются синусоидально. С другой стороны, такая траектория является винтовой линией. Следовательно, линия, по которой точка движется так, что ее напряженность  $H_r$  изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией. Эти же рассуждения можно повторить для других напряженностей (2.17-2.21). Итак,

траектория точки, которая движется по цилиндру данного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.

(А)

Например, на рис. 4 показана винтовая линия при  $r = 1$ ,  $c = 300000$ ,  $\omega = 3000$ ,  $\alpha = -3$ ,  $\varphi = [0 \div 2\pi]$ . На рис. 4а показаны винтовые линии при тех же условиях, но для различных значений радиуса  $r = [0.5, 0.6, \dots, 1.0, 1.1]$ . Прямыми линиями показаны геометрические места точек с равными  $\varphi$ .



Последний тезис **(А)** означает, что в точке  $T$ , движущейся по данной винтовой линии, векторы напряженностей (2.16-2.21) имеют следующий вид:

$$H_{r\cdot} = h_r(r)\cos(\omega t), \quad H_{\varphi\cdot} = h_\varphi(r)\sin(\omega t), \quad H_{z\cdot} = h_z(r)\sin(\omega t),$$

$$E_{r\cdot} = e_r(r)\sin(\omega t), \quad E_{\varphi\cdot} = e_\varphi(r)\cos(\omega t), \quad E_{z\cdot} = e_z(r)\cos(\omega t).$$

Выше было показано (см. (2.24-2.27), что  $h_z(r) = 0$ ,  $e_z(r) = 0$ ,

$$e_r(r) = e_\varphi(r) = e_{r\varphi}(r), \quad h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r), \quad h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r).$$

Следовательно, в каждой точке имеются только векторы

$$H_{r\cdot} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r)\cos(\omega t), \quad H_{\varphi\cdot} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r)\sin(\omega t),$$

$$E_{r\cdot} = e_{r\varphi}(r)\sin(\omega t), \quad E_{\varphi\cdot} = e_{r\varphi}(r)\cos(\omega t).$$

При этом суммарные векторы  $H_{r\varphi} = H_r + H_\varphi$  и  $E_{r\varphi} = E_r + E_\varphi$  находятся в плоскости  $r, \varphi$  и имеют модули

$$|H_{r\varphi}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r), \quad |E_{r\varphi}| = e_{r\varphi}(r). \text{ На рис. 4б показаны все эти векторы.}$$

Видно, что при движении точки  $T$  по винтовой линии суммарные векторы  $H_{r\varphi}$  и  $E_{r\varphi}$  вращаются в плоскости  $r, \varphi$ . Их модули остаются постоянными и равными между собой. Эти векторы  $H_{r\varphi}$  и  $E_{r\varphi}$  всегда ортогональны.

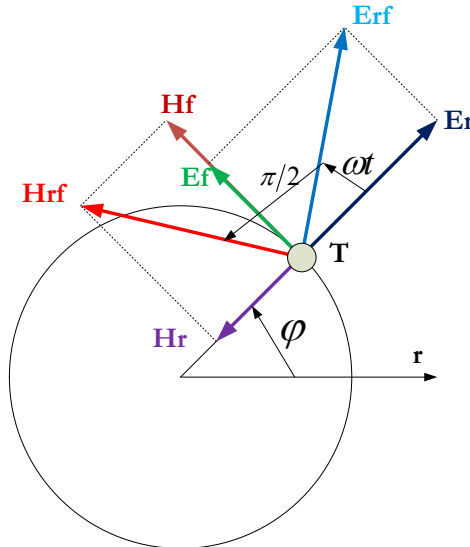


Рис. 4б.



Итак, синусоидальная волна распространяется по винтовой линии, при этом в каждой точке  $T$ , движущейся по данной винтовой линии, проекции векторов магнитной и электрической напряженностей

- существуют только в плоскости, перпендикулярной оси винтовой линии, т.е. существуют только две проекции этих векторов,
- изменяются синусоидально,
- сдвинуты по фазе на четверть периода.

Суммарные векторы

- вращаются в этой плоскости,
- имеют постоянные модули,
- ортогональны друг другу.

#### 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В системе СИ  $\eta = 1$  и последняя формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H, \quad (3)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение волны в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

В приложении 1 показано, что  $h_z(r) = 0$ ,  $e_z(r) = 0$ . Следовательно,  $s_r = 0$ ,  $s_\varphi = 0$ , т.е. поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны НЕ расширяется. Подтверждением этому является существование лазера.

Найдем  $s_z$ . Из (2.26, 2.27) получаем:

$$e_r h_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r^2, \quad (8)$$

$$e_\varphi h_r = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2. \quad (9)$$

Из (7, 8, 9) получаем:

$$s_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (e_r^2 + e_\varphi^2). \quad (10)$$

Таким образом,

$$\bar{S} = \eta \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) si \cdot co] dr \cdot d\varphi \quad (11)$$

или, с учетом (3.2),

$$\bar{S} = \eta \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \iint_{r,\varphi} \left[ \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \cdot si \cdot co \right] dr \cdot d\varphi. \quad (11a)$$

Отсюда, как показано в приложении 2, следует, что

$$\bar{S} = \frac{A^2 c}{64\alpha\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (r^{2(\alpha-1)} dr). \quad (12)$$

Следовательно, поток энергии электромагнитной волны является постоянным во времени.

Пусть  $R$  – радиус кругового фронта волны. Тогда

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (r^{2(\alpha-1)}) dr = \frac{R^{(2\alpha-1)}}{(2\alpha-1)}, \quad (13)$$

$$S_{alfa} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

$$\bar{S} = \frac{A^2 c}{64\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} S_{alfa} S_{int}. \quad (15)$$

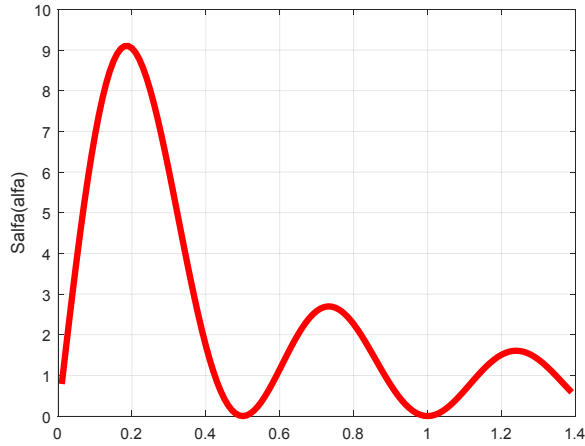


Fig.5. SecondSolMax.m

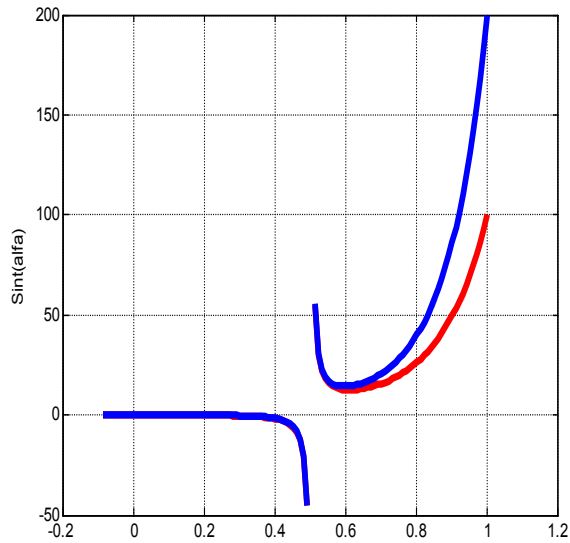


Fig.6. SecondSolMax.m

На рис. 5 показана функция  $S_{alfa}(\alpha)$  (13), а на рис. 6 показана функция  $S_{int}(\alpha)$ . На рис. 6 верхняя и нижняя кривые относятся соответственно к  $R = 200$  и  $R = 100$ . Из формулы (15), рис. 5 и рис

б видно, что поток энергии является положительным, например, при  $A = -1$ ,  $\alpha = 0.8$ .

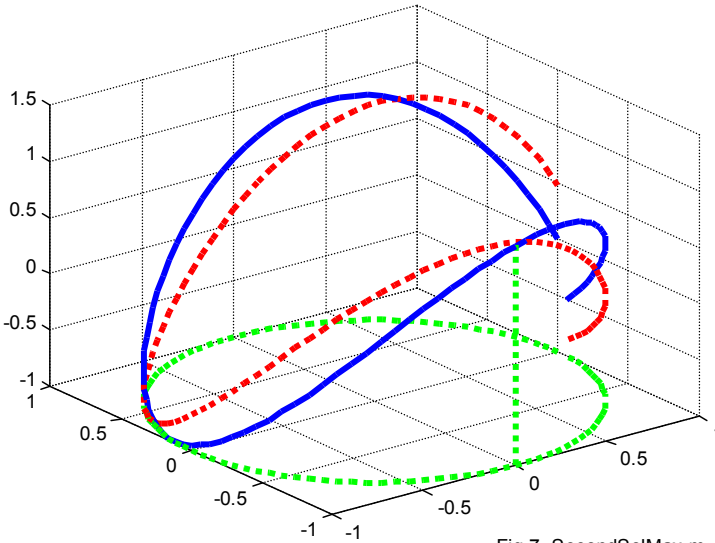


Fig.7. SecondSolMax.m

В приложении 2 показано также, что плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (15a)$$

На рис. 7 показана эта функция при  $A = 1$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $r = 1$  и двух значениях второго слагаемого: 0 и 0.5 – см. сплошную и пунктирную линии соответственно.

Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению волны;
- эта картина вращается при перемещении по оси OZ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ; главное, что эта величина не изменяется во времени, и это соответствует закону сохранения энергии.

## 5. Скорость движения энергии

Прежде всего, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны. Очевидно, эта скорость равна производной  $\frac{dz}{dt}$  от функции  $z(t)$ , заданной неявно в виде (2.16-2.21). Рассмотрим, например функцию (2.16). Имеем:

$$\frac{d(H_r)}{dz} = h_r \frac{d}{dz} (\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)) = -si \cdot h_r \chi,$$

$$\frac{d(H_r)}{dt} = h_r \frac{d}{dt} (\cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)) = -si \cdot h_r \omega.$$

Тогда скорость распространения монохроматической электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = - \frac{d(H_r)}{dt} / \frac{d(H_r)}{dz} = - \frac{\omega}{\chi}.$$

Учитывая (2.28), получаем

$$v_m = -\omega / (\pm \omega \sqrt{\mu\varepsilon} / c) = m \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \quad (15b)$$

Поскольку в вакууме  $\mu = \varepsilon = 1$ , то скорость распространения монохроматической электромагнитной волны равна скорости света.

Плотность потока энергии в волне с радиусом  $R$  определяется из (12):

$$s = \frac{S}{\pi R^2} = \frac{cA^2}{64\pi^2 R^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} S_{alfa} S_{int}. \quad (16)$$

Выше найдена энергия единицы длины волны – см. (3.3а). Сопоставляя ее с (4.13), найдем плотность энергии:

$$w = \frac{A^2 \varepsilon}{4} \cdot \frac{S_{int}}{\pi R^2}, \quad (17)$$

Общепринятой является концепция Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $s$  является произведением плотности энергии  $w$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \quad (18)$$

Из (4.12, 3.1, 18) получаем:

$$W = \frac{A^2}{4} \cdot \varepsilon \cdot r^{2(\alpha-1)}, \quad (18a)$$

$$s_z = \frac{A^2 c}{64\alpha\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 - \cos(4\alpha\pi))^{\cdot 2(\alpha-1)}, \quad (18b)$$

$$v_e = \frac{s_z}{W} \approx \frac{c}{16\alpha\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} (1 - \cos(4\alpha\pi)). \quad (19)$$

или

$$K_{vc} = \frac{v_e}{c} = \frac{(1 - \cos(4\alpha\pi))}{16\alpha\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (20)$$

При малых  $\alpha$  уравнение (20) преобразуется к виду:

$$K_{vc} \approx \frac{0.5 \cdot (4\pi\alpha)^2}{16\pi\alpha\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

или

$$K_{vc} \approx \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (21)$$

Таким образом, скорость движения электромагнитной энергии и величина  $\alpha$  пропорциональны. В частности, скорость движения электромагнитной энергии равна скорости распространения монохроматической электромагнитной волны при  $K_{vc} = 1$ , откуда следует, что

$$\alpha \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\varepsilon\mu} \approx 2 \cdot 10^{-9}. \quad (22)$$

При этом условии плотности потока энергии и энергии связаны соотношением  $s = w \cdot c$ . При этом скорость движения энергии постоянна для всех точек сечения волны (не зависит от  $r$ ).

Скорость движения электромагнитной энергии  $v_e$  не всегда равна скорости света. Например, в стоячей волне  $v_e = 0$ , и, вообще, в волне, являющейся суммой двух монохроматических электромагнитных волн одинаковой частоты, распространяющихся в противоположных направлениях, перенос энергии ослаблен и  $v_e < c$ .

Заметим, что на основании известного решения и формулы (18) нельзя найти скорость  $v_e$ . Действительно, в системе СИ найдем:

$$v_e = \frac{S}{W} = \text{EH} / \left( \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{H^2}{2\mu} \right) = 2\mu / \left( \varepsilon\mu \frac{E}{H} + \frac{H}{E} \right).$$

Если  $\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{H^2}{2\mu}$ , то  $\frac{H}{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}$ . Тогда для вакуума

$$v_e = 2\mu / \left( \varepsilon\mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 376,$$

что **не** соответствует действительности. Вообще, полученное здесь решение не может быть найдено в векторной форме.

## 6. Импульс и момент импульса

Известно, что поток энергии связан с другими характеристиками волны зависимостями следующего вида [21, 25, 63] (в системе СИ):

$$|f| = W. \quad (1)$$

$$S = W \cdot c, \quad (2)$$

$$p = W/c, \quad p = S/c^2, \quad (3)$$

$$f = p \cdot c, \quad f = S/c, \quad (4)$$

$$m = p \cdot r, \quad (5)$$

где

$W$  - плотность энергии (скаляр),  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ,

$S$  - плотность потока энергии (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$ ,

$p$  - плотность импульса (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ,

$f$  - плотность потока импульса (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ,

$m$  - плотность момента импульса в данной точке вокруг оси, отстоящей от данной точки на расстояние  $r$  (вектор),  $\text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$ ,

$V$  - объем электромагнитного поля (скаляр),  $\text{м}^3$ .

Из вышеизложенного следует, что в электромагнитной волне существуют потоки энергии, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Следовательно, в электромагнитной волне существуют также импульсы, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Существуют также моменты импульса относительно любого радиуса, любой окружности и относительно оси.

Рассмотрим момент импульса относительно оси  $z$ . В соответствии с (3) найдем этот момент:

$$L_z = p_z r = s_z r / c^2. \quad (6)$$

Этот момент является орбитальным угловым моментом, который обнаруживается в т.н. закрученном свете. Далее приводится сокращенная цитата из [64]. *О том, что световая волна несет не только энергию и импульс, но еще и угловой момент, было известно столетие назад. Поначалу, конечно, угловой момент ассоциировался только с поляризацией света. ... Шло время. Были созданы лазеры, лазерным светом научились*

*управлять, развивалась теория описания его электромагнитного поля. И в какой-то момент пришло осознание того, что эти два свойства - направленность светового пучка и его закрученность - вовсе не противоречат друг другу. ... Были предложены и конкретные схемы создания и детектирования закрученности. Три года спустя ... экспериментаторы убедились, что специальным образом приготовленная мода лазерного света, которую умели создавать и раньше, действительно отвечает закрученному свету. ... После этого начался лавинообразный поток исследований закрученного света. ... Параллельно с фундаментальными исследованиями начали развиваться и разнообразные применения закрученного света..."*

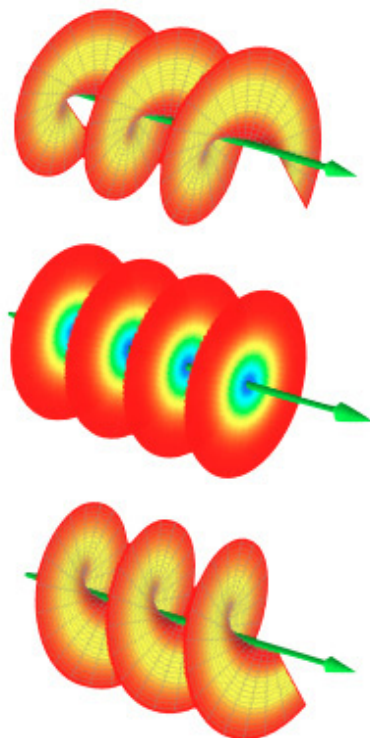


Рис. 7а.

Вместе с тем, следует заметить, что закрученность света не следует из существующего решения уравнений Максвелла. Однако, она естественным образом следует из предложенного решения – см. (6). На рис. 7а (взятом из [64]) "картинка с закрученным светом показывает не электрическое поле, а именно волновой фронт (на среднем фрагменте показан незакрученный свет, а на верхнем и нижнем фрагментах – свет, закрученный в ту или иную сторону). Он не плоский, тут фаза волны меняется не только при движении вдоль луча, но и



при смещении в поперечной плоскости ... Поскольку поток энергии световой волны обычно направлен перпендикулярно волновому фронту, то получается, что в закрученном свете энергия и импульс волны не просто летят вперед, а как бы крутятся при этом вокруг оси движения." Именно это и получено выше – см. для сравнения рис. 3.4а.

## 7. Обсуждение

На рис. 8 показаны напряженности в декартовых координатах. Полученное решение описывает волну. Основные отличия этого решения от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Поток энергии имеет положительное значение.
3. Поток энергии распространяется вдоль волны
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.
6. Решение существует при постоянной скорости распространения волны.
7. Область существования волны **не** расширяется, что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.
9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Волна и ее энергия определены, если заданы параметры  $A$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $\alpha$ .
11. Параметр  $\alpha$  определяет скорость движения энергии в электромагнитной волне.
12. Точка, движущаяся по цилиндру постоянного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.

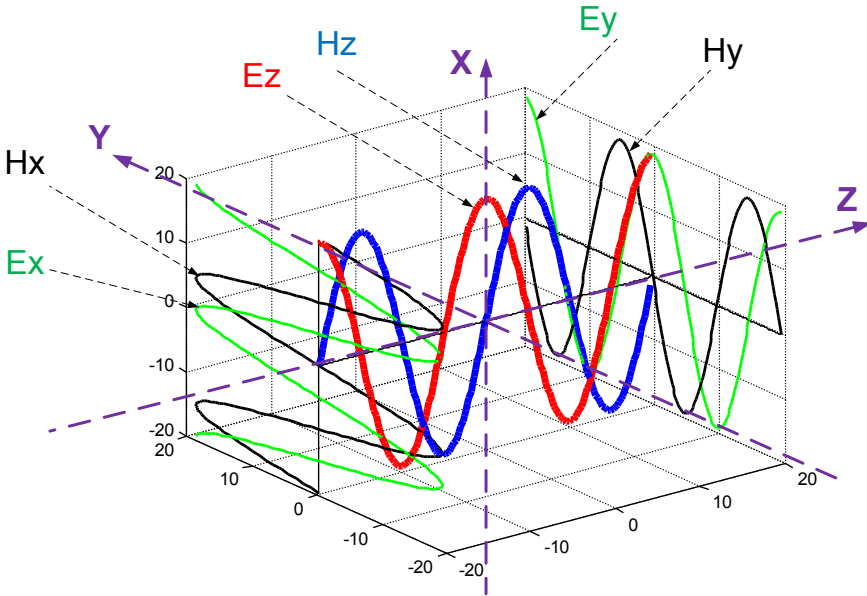


Рис. 8.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.10) в виде функций (2.13-2.23). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.10) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi = m_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) = m_\varphi(r), \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = m_z(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (8)$$

$$j_r = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r, \quad j_\varphi = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi, \quad j_z = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_z, \quad (9)$$

$$m_r = \frac{\mu\omega}{c} h_r, \quad m_\varphi = -\frac{\mu\omega}{c} h_\varphi, \quad m_z = -\frac{\mu\omega}{c} h_z, \quad (10)$$

Мы рассматриваем бегущую волну в вакууме. В этом случае  $e_z(r) = 0$ , поскольку нет внешнего источника энергии.

При этом в соответствии с (9) получим  $j_z(r) = 0$ . Тогда исходная система (1, 5-8) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (17)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (19)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

Подставим (9) в (17). Тогда получим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

Подставим (19, 20) в (22). Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \frac{1}{r} \cdot h'_z(r) \alpha - h'_\varphi(r) \chi + (-h_r(r) \chi - h'_z(r)) \frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi - h'_\varphi(r) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0 \quad (23)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (19, 21, 23). Исключим  $h'_\varphi(r)$  из (21, 23):

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \left( \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r) \frac{\alpha}{r} \right) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0$$

или  $\frac{-1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha = 0$  или  $h_z(r) = 0$ . Таким образом, при  $e_z(r) = 0$

должно соблюдаться условие  $h_z(r) = 0$ . Отсюда следует

Лемма 1. При  $e_z(r) = 0$  система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда  $h_z(r) = 0$ .

При  $e_z(r) = 0$  и  $h_z(r) = 0$  уравнения (1, 5-9) принимают следующий вид - уравнения (1, 5, 8) упрощаются, а уравнения (6, 7) с учетом (9) заменяются нижеприведенными уравнениями (1.3, 1.4):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{c\chi}{\varepsilon\omega} h_\varphi(r) = e_r(r) \quad (1.3)$$

$$-\frac{c\chi}{\varepsilon\omega} h_r(r) = e_\varphi(r), \quad (1.4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (1.5)$$

Аналогично доказывается

Лемма 2. При  $e_z(r) = 0$  система уравнений (1-5, 10) совместима только в том случае, когда  $h_z(r) = 0$ .

При этом аналогично формулам (24, 28) получаем формулы

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (2.1)$$

$$e_\varphi(r) \chi = -\frac{\mu\omega}{c} h_r(r) \quad (2.2)$$

$$e_r(r) \chi = \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (2.3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0. \quad (2.5)$$

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Лемма 3. Система уравнений (1-10) совместима только при  $h_z(r) = 0, e_z(r) = 0$ . (3.1)

Следовательно, исходная система уравнений (1-10) принимает вид уравнений, перечисленных в леммах 1 и 2. Объединим их для удобства читателя:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$e_\varphi(r) \chi = -\frac{\mu\omega}{c} h_r(r) \quad (25)$$

$$e_r(r)\chi = \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (26)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r)\chi = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \quad (29)$$

$$-h_r(r)\chi = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r), \quad (30)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (31)$$

Умножим уравнения (26, 29). Тогда получим:

$$-e_r(r)h_\varphi(r)\chi^2 = -\mu\varepsilon\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e_r(r)h_\varphi(r)$$

или

$$\chi = \pm \omega\sqrt{\mu\varepsilon}/c. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (26, 29), получаем:

$$h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r). \quad (33)$$

Таким образом, при условии (32) уравнения (26, 29) эквивалентны одному уравнению (33). Аналогичное соотношение следует из (25, 30):

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi(r), \quad (34)$$

Итак, система уравнений (24-31) эквивалентна системе уравнений (24, 27, 28, 31-34).

Далее выполняется решение уравнений (24, 27).

Предварительно рассмотрим уравнение вида

$$\frac{ay}{x} + y' = 0, \quad (34a)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y = x^{-a} \text{ или } y = 0. \quad (34b)$$

Сложим уравнения (24) и (27):

$$(e_r + e_\varphi)' + \frac{(e_r + e_\varphi)}{r}(1 - \alpha) = 0, \quad (35)$$

Вычтем уравнение (27) из (24):

$$(e_r - e_\varphi)' + \frac{(e_r - e_\varphi)}{r}(1 + \alpha) = 0, \quad (36)$$

В соответствии с (34а, 34b) из (35) находим:

$$(e_r + e_\varphi) = Ar^{-(1+\alpha)} \text{ или } (e_r + e_\varphi) = 0. \quad (37)$$

В соответствии с (34а, 34b) из (36) находим:

$$(e_r - e_\varphi) = Cr^{-(1+\alpha)} \text{ или } (e_r - e_\varphi) = 0. \quad (38)$$

Складывая и вычитая уравнения (38) из (37), найдем 4 решения:

$$e_r = e_\varphi = \frac{A}{2}r^{-(1+\alpha)}, \quad (39)$$

$$e_r = -e_\varphi = \frac{C}{2}r^{-(1+\alpha)}, \quad (40)$$

$$\begin{cases} e_r(r) = \frac{1}{2}(Ar^{-(1+\alpha)} + Cr^{-(1+\alpha)}) \\ e_\varphi(r) = \frac{1}{2}(Ar^{-(1+\alpha)} - Cr^{-(1+\alpha)}) \end{cases} \quad (41)$$

$$e_r = e_\varphi = 0. \quad (42)$$

В дальнейшем мы рассмотрим решение (39). Таким образом, исходная система уравнений (1-10) имеет решение следующего вида:

$$h_z(r) = 0, \quad e_z(r) = 0, \quad (3.1)$$

$$\chi = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}/c, \quad (3.2)$$

$$e_r = e_\varphi = 0.5Ar^{(\alpha-1)}, \quad (3.3)$$

$$h_\varphi(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_r(r), \quad (3.4)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}e_\varphi(r). \quad (3.5)$$

## Приложение 2.

В (4.11а) показано, что поток энергии, проходящий через сечение волны,

$$\bar{S} = \eta\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \iint_{r,\varphi} \left[ \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \right] dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Пусть скорость распространения волны постоянна и равна  $c$ . Тогда

$$z = ct. \quad (2)$$

Тогда из (2, 2.11, 2.12, 2.28) получаем:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t) = \cos(\alpha\varphi + (2\omega/c)z) \quad (3)$$

и, аналогично,

$$si = \sin(\alpha\varphi + (2\omega/c)z). \quad (4)$$

Имея в виду (3, 4), перепишем (1) в виде:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \eta \iint_{r,\varphi} \left[ \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2(\alpha\varphi + (2\omega/c)z)) \right] dr d\varphi. \quad (5)$$

Таким образом, плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (5a)$$

При  $z=0$  на оси  $OZ$  имеем:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \eta \iint_{r,\varphi} \left[ \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2\alpha\varphi) \right] dr d\varphi. \quad (6)$$

Далее из (6) находим:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_r \left( \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} \left( \int_{\varphi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi \right) \right) dr. \quad (7)$$

Имеем:

$$\int_{\varphi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\alpha} (1 - \cos(4\pi\alpha)). \quad (8)$$

Из (7, 8) получаем:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{4\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r \left( \frac{A^2}{4} \cdot r^{2(\alpha-1)} dr \right). \quad (9)$$

Подставляя сюда (3.2), окончательно получаем:

$$\bar{S} = \frac{A^2 c}{64\alpha\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (r^{2(\alpha-1)} dr). \quad (10)$$

Очевидно, при любом выборе точки  $z=0$  на оси  $OZ$  последнее соотношение сохраняется.

# Глава 1а. Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Решение уравнений Максвелла \ 2
- 3. Скорость распространения электромагнитной  
волны \ 4
- 4. Плотность энергии \ 5
- 5. Потоки энергии \ 6
- 6. Электромагнитный и механический импульс \ 8
- 7. Напряжение в конденсаторе \ 9
- 8. Обсуждение \ 10
- Приложение 1 \ 11
- Приложение 2 \ 14
- Приложение 3 \ 15

## 1. Введение

Выше предложено новое решение уравнений Максвелла для монохроматической волны в непроводящей среде. Диэлектрик конденсатора также является такой средой. Если на обкладках конденсатора присутствует монохроматическое переменное напряжение, то в его диэлектрике также должна присутствовать монохроматическая волна с электрической и магнитной напряженностями. Эта волна распространяется между обкладками конденсатора. Изменяющееся электрическое поле создает кольцевое магнитное поле. Таким образом, электромагнитное поле распространяется также по радиусу конденсатора. Существующее решение таково, что предполагает синхронное изменение электрической и магнитной напряженностей такого поля в зависимости от радиуса по функции Бесселя, которая имеет нули по оси аргумента, т.е. на некоторых значениях радиуса. В этих точках (точнее – окружностях данного радиуса) энергия радиального поля оказывается равной нулю [13]. А затем возрастает с увеличением радиуса ... Это противоречит закону сохранения



энергии (что уже обсуждалось в выше для бегущей волны). Поэтому ниже предлагается новое решение уравнений Максвелла для конденсатора [115].

Уравнения Максвелла для свободных электромагнитных колебаний в неограниченной среде имеют вид

$$\operatorname{rot}(E) + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (4)$$

Выше получено решение этих уравнений в предположении, что  $E_z \equiv 0$ . Ниже это ограничение снимается.

## 2. Решение уравнений Максвелла

Также, как в выше, будем использовать цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (1)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (2)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (3)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (4)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (5)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (6)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (7)$$

$$E_z = -e_z(r)co. \quad (8)$$

Тогда система уравнений Максвелла примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e_r'(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{e_z(r)}{r} \alpha + e_\varphi(r) \chi - \mu \omega h_r(r) = 0, \quad (10)$$

$$e_r(r) \chi + e_z'(r) + \mu \omega h_\varphi(r) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \mu\omega h_z(r) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{h_z(r)}{r} \alpha - h_\varphi(r) \chi - \varepsilon\omega e_r(r) = 0, \quad (14)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \varepsilon\omega e_\varphi(r) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - \varepsilon\omega e_z(r) = 0, \quad (16)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ ,

Здесь мы не можем воспользоваться решением, полученным в выше, т.к. там при поиске решения предполагалось, что  $e(r) \equiv 0$ . Здесь такое утверждение не выполняется по условию задачи.

Мы будем искать решение, в котором напряженности связаны соотношением

$$h_z(r) \equiv 0, \quad (17)$$

что следует из физических соображений. Тогда система уравнений (9-16) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{e_z(r)}{r} \alpha + e_\varphi(r) \chi - \mu\omega h_r(r) = 0, \quad (19)$$

$$e_r(r) \chi + e'_z(r) + \mu\omega h_\varphi(r) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

$$-h_\varphi(r) \chi - \varepsilon\omega e_r(r) = 0, \quad (23)$$

$$-h_r(r) \chi + \varepsilon\omega e_\varphi(r) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - \varepsilon\omega e_z(r) = 0. \quad (25)$$

В приложении 1 показано, что существует определенная функция Бесселя (эта функция рассмотрена в приложении 3), обозначаемая как  $F_\alpha(r)$ , от которой зависят функции напряженностей, а именно

$$e_z(r) = F_\alpha(r),$$

$$e_{\varphi}(r) \equiv \frac{1}{r} F_{\alpha}(r), \quad h_r(r) \equiv \frac{1}{r} F_{\alpha}(r),$$

$$e_r(r) \equiv \frac{d}{dt} F_{\alpha}(r), \quad h_{\varphi}(r) \equiv \frac{d}{dt} F_{\alpha}(r).$$

Точнее,

$$e_z(r) = F_{\alpha}(r), \quad (26)$$

$$e'_z(r) = \frac{d}{dt} F_{\alpha}(r), \quad (27)$$

$$e_r(r) = \frac{\chi}{q} e'_z(r), \quad (28)$$

$$e_{\varphi}(r) = -\frac{\chi\alpha}{q} \frac{e_z(r)}{r}, \quad (29)$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{\chi} e_{\varphi}(r), \quad (30)$$

$$h_{\varphi}(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi} e_r(r), \quad (31)$$

где

$$q = \chi^2 - \mu\varepsilon\omega^2 > 0. \quad (32)$$

Функция  $F_{\alpha}(r)$  является решение уравнения вида

$$e''_z(r) + \frac{e'_z(r)}{r} + e_z(r) \cdot \left( q - \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0. \quad (33)$$

Для существования этого решения **величина  $q$  должна быть положительной.**

### **3. Скорость распространения электромагнитной волны**

Выше показано, что в подобном решении для свободной волны, распространяющейся со скоростью света,

$$\chi = \pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \pm\frac{\omega}{c}. \quad (1)$$

В рассматриваемом случае величина (2.32) должна быть отрицательной, т.е.

$$\chi^2 - \mu\varepsilon\omega^2 \geq 0 \quad (2)$$

или

$$\chi \geq \left| \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \right| = \frac{\omega}{c}, \text{ причем } \chi_{\min} = \frac{\omega}{c}. \quad (3)$$

Очевидно, скорость распространения электромагнитной волны равна производной  $\frac{dz}{dt}$  от функции  $z(t)$ , заданной неявно в виде функций (2.3-2.8). Определив эту производную, найдем скорость распространения электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\chi}. \quad (4)$$

Совмещая (3, 4) скорость распространения электромагнитной волны

$$v_m = \left| \frac{\omega}{\chi \geq \left| \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \right|} \right| \leq \frac{1}{\left| \geq \sqrt{\mu \varepsilon} \right|} \leq \frac{1}{\left| \geq \frac{1}{c} \right|}. \quad (5)$$

Итак,

$$v_m \leq c. \quad (6)$$

Следовательно, скорость распространения электромагнитной волны в конденсаторе меньше скорости света.

## 4. Плотность энергии

Плотность энергии равна

$$W = \left( \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) \quad (1)$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \left( (e_r(r) \sin)^2 + (e_\varphi(r) \cos)^2 + (e_z(r) \cos)^2 \right) + \\ + \frac{\mu}{2} \left( (h_r(r) \cos)^2 + (h_\varphi(r) \sin)^2 \right) \end{array} \right\} \quad (2)$$

Учитывая (2.29, 2.30), получаем:

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{2} \left( (e_r(r) \sin)^2 + (e_\varphi(r) \cos)^2 + (e_z(r) \cos)^2 \right) + \\ + \left( \frac{\varepsilon \omega}{\chi} \right)^2 \frac{\mu}{2} \left( (e_\varphi(r) \cos)^2 + (e_r(r) \sin)^2 \right) \end{array} \right\}$$

или

$$W = \left\{ \frac{\varepsilon}{2} (e_z(r) \cos)^2 + \left( \left( \frac{\varepsilon \omega}{\chi} \right)^2 \frac{\mu}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( (e_\varphi(r) \cos)^2 + (e_r(r) \sin)^2 \right) \right\} \quad (3)$$

Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны в конденсаторе одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса.

## 5. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле (как показано выше)

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (3)$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix}. \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (5, 2.27-2.31), получаем:

$$\begin{aligned} s_r &= -e_z h_\varphi = e_z \frac{\varepsilon\omega}{\chi} e_r = -e_z \left(\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\right)^3 e_\varphi = \\ &= -\left(\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\right)^3 \frac{\alpha}{(\chi + \mu\omega\vartheta)} \frac{e_z^2}{r} = -\left(\frac{\varepsilon\omega}{\chi}\right)^2 \frac{\varepsilon\omega\alpha}{\chi(\chi + \mu\omega\vartheta)} \frac{e_z^2}{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$s_r = \frac{(\varepsilon\omega)^3 \alpha}{\chi^2 q} \cdot \frac{e_z^2}{r}, \quad (7)$$

$$s_\varphi = (e_z h_r) = e_z \frac{\varepsilon\omega}{\chi} e_\varphi = \frac{\varepsilon\omega\alpha}{\chi(\chi + \mu\omega\vartheta)} \frac{e_z^2}{r} = -\frac{\varepsilon\omega\alpha}{q} \frac{e_z^2}{r}. \quad (8)$$

$$s_z = (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi} (e_r^2 + e_\varphi^2). \quad (9)$$

Поток энергии, который распространяется по радиусу из всей окружности данного радиуса, как следует из (4, 7), равен

$$\overline{S}_r = \eta \int_0^{2\pi} \frac{(\varepsilon\omega)^3 \alpha}{\chi^2 q} \cdot \frac{e_z^2}{r} \sin^2 \cdot r \cdot d\varphi = \eta \frac{(\varepsilon\omega)^3 \alpha}{\chi^2 q} \cdot e_z^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \cdot d\varphi. \quad (10)$$

Видно, что этот **радиальный поток НЕ зависит от радиуса, что соответствует закону сохранения энергии.**

Поток энергии, который распространяется по окружности данного радиуса, как следует из (4, 8), равен

$$S_\varphi = -\eta \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\omega\alpha}{q} \cdot \frac{e_z^2}{r} \sin \cdot \cos \cdot r \cdot d\varphi = -\eta \frac{\varepsilon\omega\alpha}{q} \cdot e_z^2 \int_0^{2\pi} \sin \cdot \cos \cdot d\varphi \quad (10a)$$

Видно, что этот **окружной поток НЕ зависит от радиуса. Его суммарная величина на всей окружности равна нулю. Следовательно, на окружности конденсатора существует стоячая электромагнитная волна.**

В приложении 3 показано, что величина  $(e_z^2)$  имеет существенное значение только в центре конденсатора.

Поток энергии, который распространяется вдоль оси OZ через сечение конденсатора, равен

$$\overline{S}_z = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot \sin \cdot \cos] dr \cdot d\varphi. \quad (11)$$

Учитывая (9), получаем:

$$\overline{S}_z = -\frac{\varepsilon\omega}{\chi} \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin \cdot \cos] dr \cdot d\varphi \quad (12)$$

Учитывая (2.27, 2.28), получаем:

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = e_\varphi^2 \left( \left( \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \right)^4 + 1 \right) = \left( -\frac{\chi\alpha}{q} \frac{e_z}{r} \right)^2 \left( \left( \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \right)^4 + 1 \right)$$

или

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = K \left( \frac{e_z}{r} \right)^2, \quad (13)$$

где

$$K = \left( -\frac{\chi\alpha}{q} \right)^2 \left( \left( \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \right)^4 + 1 \right)$$

или

$$K = \left( \frac{\alpha}{q} \right)^2 \left( \frac{(\varepsilon\omega)^4 + \chi^4}{\chi^2} \right). \quad (14)$$

Из (12, 13) получаем:

$$\overline{S}_z = -K \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \eta \iint_{r,\varphi} \left[ \left( \frac{e_z}{r} \right)^2 \cdot \text{si} \cdot \text{co} \right] dr \cdot d\varphi \quad (15)$$

или

$$\overline{S}_z = -K \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \eta \left( \int_r \left( \frac{e_z}{r} \right)^2 dr \right) \left( \int_\varphi \text{si} \cdot \text{co} \cdot d\varphi \right) \quad (16)$$

Оба интеграла в (16) являются постоянными величинами, не зависящими от координат  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{t}$  (как показано в главе 1). Следовательно, **поток энергии электромагнитной волны является постоянным во времени.** Этот поток является активной мощностью

$$P = \overline{S}_z, \quad (17)$$

передаваемой через конденсатор. Эта мощность не зависит от конструкции конденсатора. Величина мощности не зависит от напряженностей. Есть только один параметр, который в математической модели волны не определен – это параметр  $\chi$  и от него зависит мощность. Точнее, наоборот, **мощность  $P = \overline{S}_z$  определяет значение параметра  $\chi$ .** Из (16, 17) следует, что

$$\chi = \frac{G\varepsilon\omega}{P}, \quad (18)$$

где константа

$$G = -K\varepsilon\omega\eta \left( \int_r \left( \frac{e_z}{r} \right)^2 dr \right) \left( \int_\varphi \text{si} \cdot \text{co} \cdot d\varphi \right) \quad (19)$$

## **6. Электромагнитный и механический импульс**

Как следует из главы 1, плотность электромагнитного импульса  $j$  монохроматической волны связан с плотностью потока

энергии  $S$  и скоростью распространения энергии  $v_m$  формулой, имеющей следующий вид (в системе СИ):

$$j = S/v_m^2, \quad (1)$$

Рассматривая плотности импульса и потока энергии, направленные вдоль оси конденсатора, из (1) находим:

$$j_z = S_z/v_m^2. \quad (2)$$

Полный импульс

$$J_z = \overline{S_z}/v_m^2. \quad (3)$$

или, с учетом (5.17),

$$J_z = P/v_m^2. \quad (4)$$

В разделе 3 показано в (3.4), что

$$v_m = -\frac{\omega}{\chi}. \quad (5)$$

Объединяя (4, 5, 5.18) получаем:

$$J_z = \frac{P}{v_m^2} = \frac{P\chi^2}{\omega^2} = \frac{P(G\varepsilon\omega/P)^2}{\omega^2} = \frac{G^2\varepsilon^2}{P}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что в цилиндрическом конденсаторе **при малых мощностях** может создаваться значительный по величине электромагнитный импульс, направленный вдоль оси OZ. По закону сохранения импульса должен создаваться также механический импульс, равный и противоположно направленный электромагнитному импульсу. Следовательно, конденсатор может перемещаться под действием электромагнитного импульса.

## 7. Напряжение в конденсаторе

Напряженности в найденном решении определены с точностью до постоянного множителя. Например, напряженность (2.8) следует с учетом (2.26) записать в виде:

$$E_z = -A \cdot F_\alpha(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (1)$$

где  $A$  – неопределенный пока постоянный для всех напряженностей коэффициент.

Будем полагать, что потенциал на нижней пластине при  $z = 0$  и некоторых  $\varphi_0$ ,  $r_0$  равен нулю, а потенциал на верхней пластине при  $z = d$  и тех же  $\varphi_0$ ,  $r_0$  численно равен напряжению  $U$  на конденсаторе. Тогда



$$U = -A \cdot F_a(r_o) \cos(\alpha\varphi_o + \chi d + \omega t), \quad (2)$$

что можно использовать для определения коэффициента  $A$ . При некотором промежуточном значении  $z$  напряжение при тех же  $\varphi_o$ ,  $r_o$  будет равно

$$u(z) = -A \cdot F_a(r_o) \cos(\alpha\varphi_o + \chi z + \omega t), \quad (3)$$

т.е. напряжение вдоль конденсатора меняется по функции  $\cos(\chi z)$ .

## 8. Обсуждение

Предлагаемое решение уравнений Максвелла для конденсатора, находящегося под переменным напряжением, интерпретируется как электромагнитная волна с тремя электрическими напряженностями и двумя магнитными напряженностями (отсутствует магнитная напряженность, направленная вдоль оси конденсатора). Отметим следующие особенности этой волны:

1. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.
2. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.
3. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии через конденсатор **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
4. Поток энергии равен активной мощности, передаваемой через конденсатор.
5. Скорость распространения электромагнитной волны меньше скорости света
6. Эта скорость уменьшается с увеличением передаваемой мощности (в частности, при отсутствии мощности скорость равна нулю и волна становится стоячей)
7. Волна распространяется также по радиусам; при этом напряженности изменяются по функции Бесселя от радиуса.
8. Поток энергии, вытекающий по радиусу из окружности данного радиуса, остается постоянным вне зависимости от радиуса и от времени. Это также соответствует закону сохранения энергии. Заметим, что этот вывод противоречит известному утверждению [13] о том, что существуют радиусы, где поток энергии равен нулю.

## Приложение 1

Обозначим:

$$e_{r\varphi} = e_r + e_\varphi, \quad (1)$$

Предположим, что

$$e_{r\varphi} = e_r + e_\varphi = \mathcal{G}(h_\varphi - h_r) \quad (2)$$

Найдем сумму уравнений (2.19, 2.20):

$$e_{r\varphi} g + \frac{e_z}{r} \alpha + e'_z = 0. \quad (3)$$

где

$$g = -\left( \chi + \frac{\mu\omega}{g} \right). \quad (4)$$

Найдем сумму уравнений (2.18, 2.21):

$$e'_{\varphi r} + \frac{e_{\varphi r}}{r} \cdot (1 - \alpha) + \chi e_z = 0. \quad (5)$$

Из (3) находим:

$$e_{r\varphi} = -\left( e'_z + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g}, \quad (6)$$

$$e'_{r\varphi} = -\left( e''_z + \frac{e'_z}{r} \alpha - \frac{e_z}{r^2} \alpha \right) \frac{1}{g}. \quad (7)$$

Из (5-7) находим:

$$\begin{aligned} & \left( e''_z + \frac{e'_z}{r} \alpha - \frac{e_z}{r^2} \alpha \right) \frac{1}{g} + \\ & + \left( e'_z + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} \frac{1}{r} \cdot (1 - \alpha) - \chi e_z = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\left( e''_z + \frac{e'_z}{r} \alpha - \frac{e_z}{r^2} \alpha \right) + \left( e'_z + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{(1 - \alpha)}{r} + e_z q = 0, \quad (9)$$

где

$$q = -g\chi. \quad (10)$$

После упрощения (9) получаем:

$$e''_z + \frac{e'_z}{r} + e_z \left( q - \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0. \quad (11)$$

## Глава 1а. Решение для конденсатора с переменным напряжением

Ниже будет показано, что  $q > 0$ . Поэтому (11) является уравнением Бесселя – см. приложение 2. Далее мы будем обозначать это решение как  $F_\alpha(r)$ . Итак,

$$e_z(r) = F_\alpha(r), \quad (12)$$

$$e'_z(r) = \frac{d}{dr} F_\alpha(r), \quad (15)$$

Из (2.21, 1) находим

$$e'_\varphi + \frac{1}{r} e_\varphi (1 + \alpha) - \frac{\alpha}{r} e_{r\varphi} = 0, \quad (16)$$

Из (6, 16) находим

$$e'_\varphi + \frac{1}{r} e_\varphi (1 + \alpha) + \frac{\alpha}{r} \left( e'_z + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} = 0, \quad (17)$$

Предположим, что

$$e_\varphi = K \left( \frac{e_z}{r} \right) \quad (18)$$

$$e'_\varphi = K \left( \frac{e'_z}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right) \quad (19)$$

Подставим (18, 19) в (17) и найдем:

$$K \left( \frac{e'_z}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right) + \frac{1}{r} K \left( \frac{e_z}{r} \right) (1 + \alpha) + \frac{\alpha}{r} \left( e'_z + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} = 0,$$

$$\frac{e_z}{r^2} \left( -K + K(1 + \alpha) + \frac{\alpha^2}{g} \right) + \frac{e'_z}{r} \left( K + \frac{\alpha}{g} \right) = 0,$$

$$\left( \frac{e_z}{r^2} \alpha + \frac{e'_z}{r} \right) \left( K + \frac{\alpha}{g} \right) = 0,$$

$$K = -\frac{\alpha}{g}. \quad (20)$$

Итак, из (18--20) находим

$$e_\varphi = -\frac{\alpha}{g} \left( \frac{e_z}{r} \right), \quad (21)$$

$$e'_\varphi = -\frac{\alpha}{g} \left( \frac{e'_z}{r} - \frac{e_z}{r^2} \right). \quad (21a)$$

Из (1, 6, 21) находим

$$e_r = e_{r\varphi} - e_\varphi = -\left( e'_z + \frac{e_z}{r} \alpha \right) \frac{1}{g} + \frac{\alpha}{g} \left( \frac{e_z}{r} \right) = -e'_z \frac{1}{g}$$

или, с учетом (10),

$$e_r = -\frac{1}{g} e'_z = -\frac{\chi}{q} e'_z. \quad (22)$$

Рассмотрим уравнения (2.22-2.25). Вычитая (2.24) из (2.23) находим

$$-(h_\varphi - h_r)\chi - \varepsilon\omega(e_r + e_\varphi) = 0, \quad (23)$$

Из (2, 23) находим

$$g = -\frac{\chi}{\varepsilon\omega} \quad (24)$$

Тогда из (4, 24, 10) получим:

$$g = -\left(\chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi}\right). \quad (24a)$$

$$q = \chi^2 - \mu\varepsilon\omega^2. \quad (25)$$

Вычитая (2.22) из (2.25) находим

$$\frac{h_\varphi - h_r}{r} + h'_\varphi - h'_r + \frac{h_r - h_\varphi}{r} \cdot \alpha - \varepsilon\omega e_z = 0. \quad (26)$$

Из (2, 26) находим

$$\frac{e_{r\varphi}}{gr} + \frac{e'_{r\varphi}}{g} - \frac{e_{r\varphi}}{gr} \cdot \alpha - \varepsilon\omega e_z = 0 \quad (27)$$

или

$$\frac{e_{r\varphi}}{r}(1 - \alpha) + e'_{r\varphi} - g\varepsilon\omega e_z = 0. \quad (28)$$

Из (24, 28) находим

$$\frac{e_{r\varphi}}{r}(1 - \alpha) + e'_{r\varphi} + \chi e_z = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) совпадает с (5) Это означает, что сделанные предположения выполняются.

Из (2) находим:

$$h_\varphi = \frac{e_{r\varphi}}{g} + h_r \quad (30)$$

Из (2.22, 30) находим:

$$\frac{h_r}{r} + h'_r + \frac{\alpha}{r} \left( \frac{e_{r\varphi}}{g} + h_r \right) = 0, \quad (31)$$

или

$$-\mathcal{G}h'_r - \mathcal{G}h_r \frac{1+\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r} e_{r\varphi} = 0, \quad (32)$$

Сравнивая (32) и (16), замечаем, что

$$-\mathcal{G}h_r = e_\varphi \quad (33)$$

Из (33, 24) находим:

$$h_r = -\frac{e_\varphi}{\mathcal{G}} = e_\varphi \frac{\varepsilon\omega}{\chi} \quad (34)$$

Из (30, 34, 1) находим:

$$h_\varphi = \frac{e_{r\varphi}}{\mathcal{G}} + h_r = \frac{e_{r\varphi}}{\mathcal{G}} - \frac{e_\varphi}{\mathcal{G}} = \frac{e_r}{\mathcal{G}}$$

или, с учетом (24, 22),

$$h_\varphi = -e_r \frac{\varepsilon\omega}{\chi} = \frac{\varepsilon\omega}{q} e'_z. \quad (35)$$

Рассмотрим уравнение (2.20)

$$e_r(r)\chi - e'_z(r) + \mu\omega h_\varphi(r) = 0$$

и подставим в него (35, 22). Тогда получим:

$$e_r(r)\chi - g e_r(r) - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} e_r(r) = 0 \quad (36)$$

или

$$\chi - g - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} = 0 \quad (37)$$

или, с учетом (24а),

$$\chi - \left( \chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} \right) - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\chi} = 0. \quad (38)$$

Таким образом, уравнение (2.20) превращается в тождество, что и требовалось показать.

## Приложение 2.

Известно уравнение Бесселя, имеющее следующий вид:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\nu$  - порядок уравнения. Обозначим через  $Z_\nu(y)$  - общий интеграл уравнения Бесселя порядка  $\nu$ . В [4, стр. 403] показано, что уравнение вида

$$y'' + \frac{a}{x} y' + y \cdot \left( bx^m + \frac{c}{x^2} \right) = 0. \quad (2)$$

можно преобразовать в уравнение вида (1), причем  $Z_\nu(y)$  и порядок  $\nu$  определяются через параметры  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $c$ .

В частности, уравнение (11) из приложения 1 преобразуется в уравнение вида (1) следующей заменой:

$$a = 1, \quad b = q, \quad m = 0, \quad c = -\alpha^2, \quad \nu = \frac{1}{2} \left( \sqrt{-4(-\alpha^2)} \right) = \alpha. \quad (3)$$

Таким образом, решение уравнения (11)

$$e_z(r) = F_\alpha(r) = Z_\alpha(r\sqrt{q}). \quad (4)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dy} Z_\nu(y) = \frac{1}{2} (Z_{\nu-1}(y) - Z_{\nu+1}(y)), \quad (5)$$

то

$$e'_z(r) = \frac{1}{2} (Z_{\alpha-1}(r\sqrt{q}) - Z_{\alpha+1}(r\sqrt{q})). \quad (6)$$

### Приложение 3.

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$y'' + \frac{y'}{r} + y \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (1)$$

и функцию вида

$$\Phi(r) = y(r) \cdot y'(r) \cdot r. \quad (2)$$

На рис. 1 показаны графики

- функции Бесселя,
- производной от этой функции,
- функции  $\Phi(r)$
- функции  $y^2$

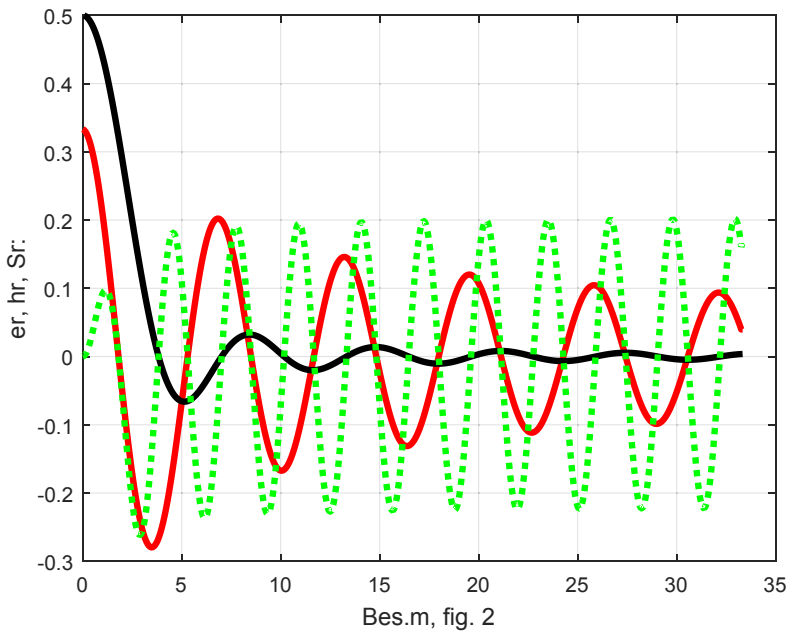
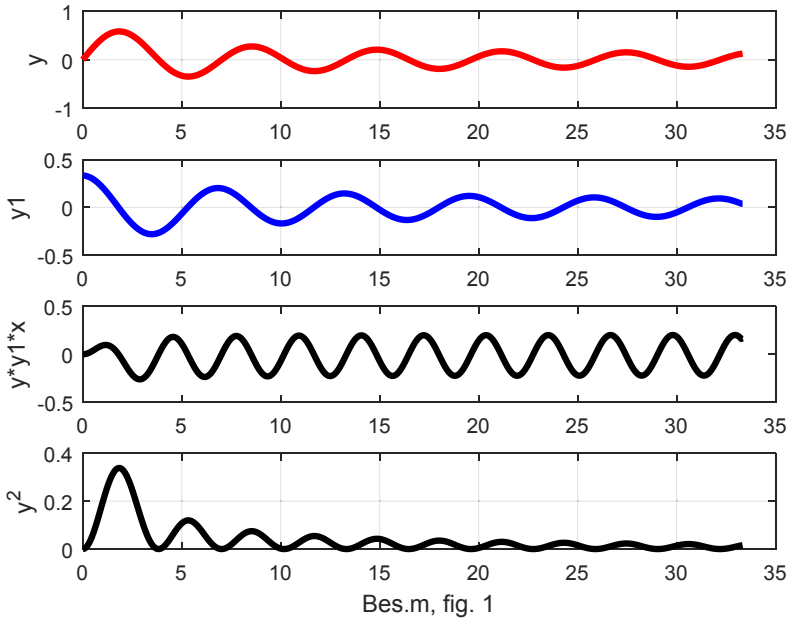
Видно, что функция  $\Phi(r)$  является периодической функцией.

На рис. 2 показаны графики

- производной от функции Бесселя, которая пропорциональна напряженности  $e_r(r)$  - см. (2.28, 2.27) и сплошную кривую с большой амплитудой,
- функции  $y/r$ , которая пропорциональна напряженности  $h_r(r)$  - см. (2.30, 2.29, 2.26) и сплошную кривую с малой амплитудой, приближающуюся к оси

## Глава 1а. Решение для конденсатора с переменным напряжением

- функции  $\Phi(r)$ , которая пропорциональна потоку энергии по радиусу  $\overline{S}_r$  - см. (5.10) и пунктирную кривую.



# Глава 2. Решение уравнений Максвелла для диэлектрической цепи переменного тока

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Решение уравнений Максвелла \ 2
- 3. Напряженности и потоки энергии \ 5
- 4. Обсуждение \ 5
- Приложение 1 \ 5
- Приложение 2 \ 9
- Приложение 3 \ 11

### 1. Введение

В главе 1 рассматривается электромагнитное поле в вакууме. Очевидным образом полученное там решение распространяется на непроводящую – диэлектрическую среду с определенными  $\varepsilon$ ,  $\mu$  - диэлектрической и магнитной проницаемостью. Следовательно, электромагнитное поле существует и в конденсаторе. Однако существенным отличием конденсатора является то, что его поле имеет ненулевую электрическую напряженность по одной из координат, создаваемую внешним источником. При рассмотрении электромагнитного поля в вакууме отсутствие внешнего источника постулировалось.

Точно также можно говорить о диэлектрической цепи переменного тока. Далее рассматривается система уравнений Максвелла для такой цепи. Показывается, что в такой цепи также возникает электромагнитная волна. Важным отличием этой волны от волны в вакууме является то, что в первой имеется продольная электрическая напряженность, создаваемая внешним источником энергии.

Здесь рассматриваются уравнения Максвелла в системе СГС следующего вида (как и в главе 1, но с отличными от единицы величинами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ):



$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

где  $H, E$  - магнитная и электрическая напряженности соответственно.

## 2. Решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4) [37]. В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения

имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} \quad (8)$$

где

$$v = -\mu/c, \quad (9)$$

$$q = \varepsilon/c, \quad (10)$$

- электрические напряженности  $E_r, E_\varphi, E_z$ ,
- магнитные напряженности  $H_r, H_\varphi, H_z$ .

## Глава 2. Решение для диэлектрической цепи переменного тока

Решение должно быть найдено при ненулевой напряженности  $E_z$ .

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (18)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-18) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ,  $t$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r)$ ,  $e(r)$ .

Таблица 1.

	глава 1	глава 2
$e_\varphi$	$Ar^{\alpha-1}$	$A \cdot kh(\alpha, \chi, r)$
$e_r$	$Ar^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha}(e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r))$
$e_z$	<b>0</b>	$A \cdot r \cdot e_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}$
$h_r$	$-e_\varphi(r)$	$A \frac{\varepsilon\omega}{c\chi} e_\varphi(r)$
$h_\varphi$	$-h_r(r)$	$-A \frac{\varepsilon\omega}{c\chi} e_r(r)$
$h_z$	<b>0</b>	<b>0</b>

**Глава 2. Решение для диэлектрической цепи переменного тока**

В приложении 1 показано, что такое решение существует. Это решение имеет следующий вид:

$$e_\varphi(r) = kh(\alpha, \chi, r), \tag{20}$$

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)), \tag{21}$$

$$e_z(r) = r \cdot e_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}, \tag{22}$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi}, \tag{23}$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi}, \tag{24}$$

$$h_z(r) \equiv 0. \tag{25}$$

где  $kh()$  – функция, определенная в приложении 2,

$$q = \left( \chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2\chi} \right). \tag{26}$$

Сравним это решение и решение, полученное в главах 1 и 2 – см. табл. 1. Видно существенное отличие этих решений.

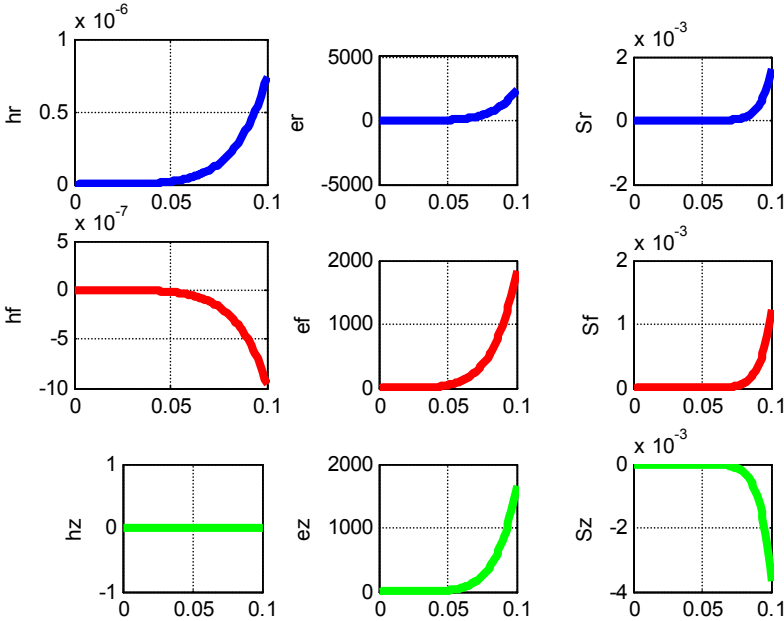


Fig.1. (SSB6(3).m)

### 3. Напряженности и потоки энергии

Также, как и в главе 1, плотности потоков энергии по координатам определяются по формуле

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \overline{S_r} \\ \overline{S_\varphi} \\ \overline{S_z} \end{bmatrix} = \eta \iiint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

где

$$s_r = (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi)$$

$$s_\varphi = (e_z h_r - e_r h_z), \quad (2)$$

$$s_z = (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r)$$

$$\eta = c/4\pi. \quad (3)$$

Рассмотрим функции (2) и  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A=1$ ,  $\alpha=5.5$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=2$ ,  $\chi=50$ ,  $\omega=300$ .

### 4. Обсуждение

Дальнейшие выводы аналогичны тем, которые получены в главе 1. Итак, в диэлектрической цепи и, в частности, в конденсаторе, включенных в цепь синусоидального тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. При этом напряженности, ток смещения и поток энергии распространяются в диэлектрике по винтовой траектории.

### Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi - \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = 0. \quad (8)$$

Соответствие между номерами формул в разделе 2 и здесь таково:

Раздел 2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
Прил. 1	1	5	6	7	8	6	7	8

Далее будет выполняться преобразование формул (1-8). При этом нумерация формул после преобразования будет сохраняться (так удобнее проследить последовательность преобразований) и только новые формулы будут принимать следующий номер.

Примем, что

$$h_z(r) = 0. \quad (9)$$

Из (6, 7) получаем:

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi} \quad (6)$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi} \quad (7)$$

Сравним (1, 8):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = 0, \quad (8)$$

Из (6, 7) следует, что (1, 8) совпадают. Тогда (8) можно исключить. Далее сравним (4, 5):

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0. \quad (5)$$

Из (6, 7) следует, что (4, 5) совпадают. Тогда (5) можно исключить. Остаются уравнения:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi - \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (4)$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi}, \quad (6)$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi}. \quad (7)$$

Подставим (6,7) в (2, 3):

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi} = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi} = 0, \quad (3)$$

или

$$\frac{\alpha}{r} \cdot e_z(r) = e_\varphi(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (2)$$

$$e'_z(r) = e_r(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (3)$$

Остались следующие уравнения:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\alpha}{r} \cdot e_z(r) = e_\varphi(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (2)$$

$$e'_z(r) = e_r(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (4)$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi}, \quad (6)$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi}. \quad (7)$$

## Глава 2. Решение для диэлектрической цепи переменного тока

Обозначим:

$$q = \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (11)$$

Из (1, 2, 11) находим:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi r \cdot e_\varphi(r) q / \alpha = 0, \quad (12)$$

Из (4) находим:

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)) \quad (13)$$

$$e'_r(r) = \frac{1}{\alpha} (2e'_\varphi(r) + r \cdot e''_\varphi(r)) \quad (14)$$

Из (12-14) находим:

$$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) \right) + \frac{1}{\alpha} (2e'_\varphi(r) + r \cdot e''_\varphi(r)) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{q\chi}{\alpha} r \cdot e_\varphi(r) = 0 \quad (15)$$

Решение и анализ этого уравнения дано в приложении 2. Полученное там решение не имеет аналитического выражения. Назовем это решение функцией

$$e_\varphi(r) = \text{kh}(\alpha, \chi, r), \quad (16)$$

а ее производную – функцией

$$e'_\varphi(r) = \text{kh1}(\alpha, \chi, r). \quad (17)$$

При известных функциях (16, 17) могут быть найдены остальные функции. Итак, для определения всех функций имеем уравнения:

$$h_z(r) \equiv 0, \quad (9)$$

$$e_\varphi(r) = \text{kh}(\alpha, \chi, r), \quad (16)$$

$$e'_\varphi(r) = \text{kh1}(\alpha, \chi, r), \quad (17)$$

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)), \quad (13)$$

$$e'_r(r) = \frac{1}{\alpha} (2e'_\varphi(r) + r \cdot e''_\varphi(r)), \quad (14)$$

$$e_z(r) = r \cdot e_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}, \quad (2)$$

$$e'_z(r) = e_r(r) q, \quad (3)$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi}, \quad (6)$$

$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi}. \quad (7)$$

Точность полученного решения анализируется в приложении 3.

## Приложение 2.

Рассмотрим уравнение (15) из приложения 1:

$$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) \right) + \frac{1}{\alpha} \left( 2e'_\varphi(r) + r \cdot e''_\varphi(r) \right) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{q\chi}{\alpha} r \cdot e_\varphi(r) = 0. \quad (1)$$

Упрощая его, получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) \right) + \left( 2e'_\varphi(r) + r \cdot e''_\varphi(r) \right) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha^2 - q\chi r \cdot e_\varphi(r) = 0 \\ & e_\varphi(r) \left( \frac{-\alpha^2 + 1}{r} - q\chi r \right) + 3e'_\varphi(r) + r \cdot e''_\varphi(r) = 0, \\ & e''_\varphi(r) = e_\varphi(r) \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r^2} + q\chi \right) - \frac{3}{r} e'_\varphi(r). \end{aligned} \quad (2)$$

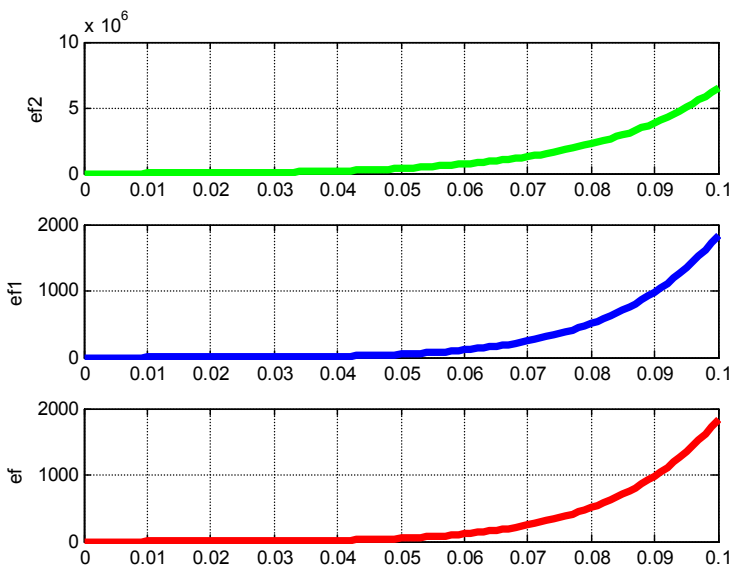


Fig.2. (SSMB6.13)

Уравнение (2) не имеет аналитического решения. Но численно можно найти функции

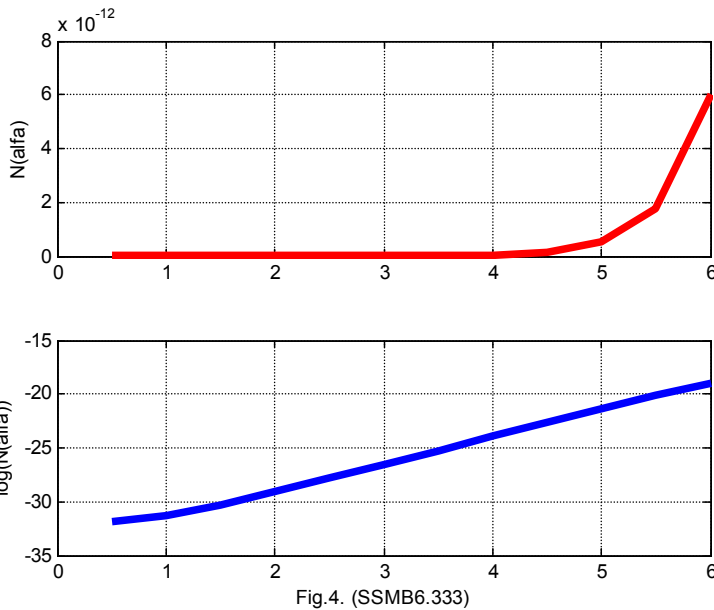
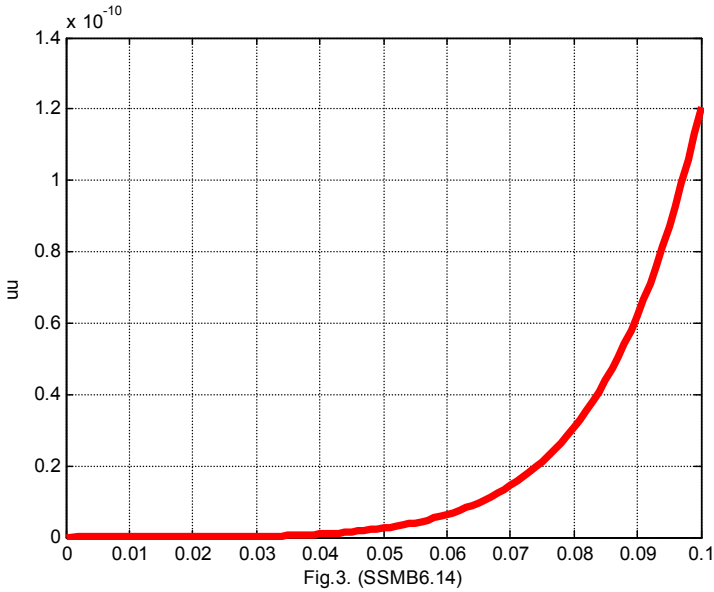
$$e_\varphi(r) = kh(\alpha, \chi, r) \quad (3)$$

$$e'_\varphi(r) = kh1(\alpha, \chi, r) \quad (4)$$



$$e''_{\varphi}(r) = kh2(\alpha, \chi, r) \tag{5}$$

Для примера на рис. 2 показаны эти функции при  $(\alpha = 5.5, \chi = 50)$  на радиусе  $R = 0.1$ .



### Приложение 3.

Подставляя найденные в приложении 1 функции в уравнения (1-8) можно найти среднеквадратичную невязку этих уравнений. На рис. 3 показан график этой невязки при  $(\alpha = 5.5, \chi = 50)$  на радиусе  $R = 0.1$ .

Можно найти среднеквадратичную невязку этих уравнений, как функцию какого-либо параметра. На рис. 4 показан график невязки в зависимости от  $\alpha$  при  $\chi = 50$  на радиусе  $R = 0.1$ . Здесь в верхнем окне показано значение невязки, а в нижнем окне – значение логарифма невязки.

# Глава 3. Решение уравнений Максвелла для магнитной цепи переменного тока

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Решение уравнений Максвелла \ 2
- 3. Напряженности и потоки энергии \ 4
- 4. Обсуждение \ 5
- Приложение 1 \ 6

### 1. Введение

В главе 2 рассматривается электромагнитное поле в диэлектрической цепи переменного тока. Точно также можно рассмотреть электромагнитное поле в магнитной цепи переменного тока. Простейшим примером такой цепи является соленоид переменного тока. Однако, если в диэлектрической цепи имеется продольная электрическая напряженность, создаваемая внешним источником энергии, то в магнитной цепи имеется продольная магнитная напряженность, создаваемая внешним источником энергии и передаваемая в цепь обмоткой соленоида.

Здесь также рассматриваются уравнения Максвелла в системе СГС следующего вида с отличными от единицы величинами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ :

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

где  $H$ ,  $E$  - магнитная и электрическая напряженности соответственно.

## 2. Решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4). В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} \quad (8)$$

где

$$v = -\mu/c, \quad (9)$$

$$q = \varepsilon/c, \quad (10)$$

- электрические напряженности  $E_r, E_\varphi, E_z,$
- магнитные напряженности  $H_r, H_\varphi, H_z.$

Решение должно быть найдено при ненулевой напряженности  $H_z$  (в главе 2 оно должно было быть найдено при ненулевой напряженности  $E_z$ ).

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha, \chi, \omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r) \cos \varphi, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) \sin \varphi, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r) \sin \varphi, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r) \sin \varphi, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r) \cos \varphi, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r) \cos \varphi, \quad (18)$$

где  $h(r), e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-18) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами  $r, \varphi, z, t$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r), e(r)$ .

Таблица 1.

	глава 1	глава 2	глава 2
$e_r$	$Ar^{\alpha-1}$	$A \cdot \text{kh}(\alpha, \chi, r)$	$-\frac{\mu\omega}{\chi c} h_\varphi(r)$
$e_\varphi$	$Ar^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r))$	$\frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r)$
$e_z$	<b>0</b>	$A \cdot r \cdot e_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}$	<b>0</b>
$h_r$	$-e_\varphi(r)$	$A \frac{\varepsilon\omega}{c\chi} e_\varphi(r)$	$-\frac{1}{\alpha} (h_\varphi(r) + r \cdot h'_\varphi(r))$
$h_\varphi$	$-h_r(r)$	$-A \frac{\varepsilon\omega}{c\chi} e_r(r)$	$\text{kh}(\alpha, \chi, r)$
$h_z$	<b>0</b>	<b>0</b>	$r \cdot h_\varphi(r) q / \alpha$

В приложении 1 показано, что такое решение **существует**. Это решение имеет следующий вид:

$$e_z(r) \equiv 0, \quad (20)$$

$$h_\varphi(r) = \text{kh}(\alpha, \chi, r), \quad (21)$$

$$h_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (h_\varphi(r) + r \cdot h'_\varphi(r)), \quad (22)$$

$$h_z(r) = r \cdot h_\varphi(r)q / \alpha, \tag{23}$$

$$e_\varphi(r) = \frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r), \tag{24}$$

$$e_r(r) = -\frac{\mu\omega}{\chi c} h_\varphi(r), \tag{25}$$

где  $kh()$  – функция, определенная в приложении 2 главы 2,

$$q = \left( \chi - \frac{\mu\epsilon\omega^2}{c^2\chi} \right). \tag{26}$$

Сравним это решение и решение, полученное в главах 1 и 2 – см. табл. 1. Видна схожесть этих решений в главах 2 и 3.

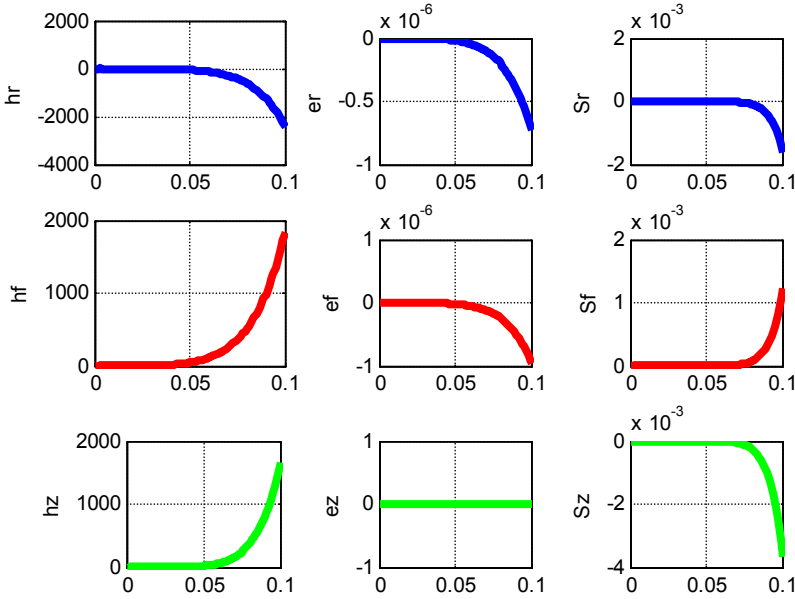


Fig.1. (SSB6.703)

### 3. Напряженности и потоки энергии

Также, как и в главе 2, плотности потоков энергии по координатам определяются по формуле

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z), \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \\ \eta &= c/4\pi. \end{aligned} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Рассмотрим функции (2) и  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A=1$ ,  $\alpha=5.5$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=2$ ,  $\chi=50$ ,  $\omega=300$ . Эти параметры выбраны такими же, как в главе 2 – для сравнения полученных результатов.

## 4. Обсуждение

Дальнейшие выводы аналогичны тем, которые получены в главах 1 и 2. Итак, в магнитной цепи синусоидального тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. При этом напряженности и поток энергии распространяются в такой цепи по винтовой траектории.

Такая электромагнитная волна распространяется в магнитной цепи трансформатора. Вместе с ней по магнитной цепи распространяется магнитный поток и поток электромагнитной энергии. Важно отметить, что величина магнитного потока **не** изменяется при изменении нагрузки. Следовательно, именно поток электромагнитной энергии переносит энергию от первичной обмотки ко вторичной обмотке. Итак, поток энергии не зависит от магнитного потока. Здесь можно заметить аналогию с передачей тока по электрической цепи, где один и тот же ток может предавать различную энергию. Этот вопрос подробно рассматривается в главе 5. Там показано, что поток энергии при данной плотности тока (в рассматриваемом случае, при данной плотности магнитного потока) передаваемая мощность может принимать практически любое значение в зависимости от значений величин  $\chi$ ,  $\alpha$ , т.е. от плотности винтовой траектории тока (в рассматриваемом случае, при данной плотности магнитного потока). Следовательно, передаваемая мощность определяется плотностью винтовой траектории электромагнитной энергии при фиксированной величине магнитного потока.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi - \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = 0, \quad (8)$$

Соответствие между номерами формул в разделе 2 и здесь таково:

Раздел 2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
Прил. 1	1	5	6	7	8	6	7	8

Далее будут выполняться преобразования формул (1-8). При этом нумерация формул после преобразования будет сохраняться (так удобнее проследить последовательность преобразований) и только новые формулы будут принимать следующий номер.

Примем, что

$$e_z(r) = 0. \quad (9)$$

Из (2, 3) получаем:

$$e_\varphi(r) \chi = \frac{\mu\omega}{c} h_r(r) \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi = -\frac{\mu\omega}{c} h_\varphi \quad (3)$$

Сравним (4, 5):



$$\frac{e_{\varphi}(r)}{r} + e'_{\varphi}(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_{\varphi}(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

Из (2, 3) следует, что (4, 5) совпадают. Тогда (4) можно исключить. Далее сравним (1, 8):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_{\varphi}(r)}{r} \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\frac{h_{\varphi}(r)}{r} + h'_{\varphi}(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (8)$$

Из (2, 3) следует, что (1, 8) совпадают. Тогда (1) можно исключить. Остаются уравнения:

$$e_{\varphi}(r) = \frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) = -\frac{\mu\omega}{\chi c} h_{\varphi}(r), \quad (3)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_{\varphi}(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_{\varphi}(r) \chi - \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_{\varphi} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_{\varphi}(r)}{r} + h'_{\varphi}(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) = 0, \quad (8)$$

Подставим (2,3) в (6, 7):

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_{\varphi}(r) \chi + \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{\mu\omega}{\chi c} h_{\varphi}(r) = 0 \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r) = 0, \quad (7)$$

ИЛИ

$$\frac{\alpha}{r} \cdot h_z(r) = h_{\varphi}(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (6)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (7)$$

Остались следующие уравнения:

$$e_{\varphi}(r) = \frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) = -\frac{\mu\omega}{\chi c} h_{\varphi}(r), \quad (3)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_{\varphi}(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{r} \cdot h_z(r) = h_{\varphi}(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (6)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r) \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (7)$$

$$\frac{h_{\varphi}(r)}{r} + h'_{\varphi}(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (8)$$

Обозначим:

$$q = \left( \chi - \frac{\mu\omega}{c} \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{1}{\chi} \right) \quad (11)$$

Из (5, 6, 11) находим:

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_{\varphi}(r)}{r} \alpha + \chi r \cdot h_{\varphi}(r) q / \alpha = 0, \quad (12)$$

Из (8) находим:

$$h_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (h_{\varphi}(r) + r \cdot h'_{\varphi}(r)) \quad (13)$$

$$h'_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (2h'_{\varphi}(r) + r \cdot h''_{\varphi}(r)) \quad (14)$$

Из (12-14) находим:

$$-\frac{1}{\alpha} \left( \frac{h_{\varphi}(r)}{r} + h'_{\varphi}(r) \right) - \frac{1}{\alpha} (2h'_{\varphi}(r) + r \cdot h''_{\varphi}(r)) + \frac{h_{\varphi}(r)}{r} \alpha + \chi r \cdot h_{\varphi}(r) q / \alpha = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{e_{\varphi}(r)}{r} + e'_{\varphi}(r) \right) + \frac{1}{\alpha} (2e'_{\varphi}(r) + r \cdot e''_{\varphi}(r)) - \frac{e_{\varphi}(r)}{r} \alpha - \frac{q\chi}{\alpha} r \cdot e_{\varphi}(r) = 0 \quad (15)$$

Можно заметить, что это уравнение совпадает с уравнением (15) в Приложении 1 главы 2, если здесь переменную  $h_{\varphi}(r)$  заменить на переменную  $e_{\varphi}(r)$ . Следовательно, решение уравнения является функцией

$$h_{\varphi}(r) = \text{kh}(\alpha, \chi, r), \quad (16)$$

а ее производная – функцией

$$h'_{\varphi}(r) = \text{kh1}(\alpha, \chi, r). \quad (17)$$

При известных функциях (16, 17) могут быть найдены остальные функции. Итак, для определения всех функций имеем уравнения:

$$e_z(r) \equiv 0, \quad (9)$$

$$h_\varphi(r) = kh(\alpha, \chi, r), \quad (16)$$

$$h'_\varphi(r) = kh1(\alpha, \chi, r), \quad (17)$$

$$h_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (h_\varphi(r) + r \cdot h'_\varphi(r)), \quad (13)$$

$$h'_r(r) = -\frac{1}{\alpha} (2h'_\varphi(r) + r \cdot h''_\varphi(r)), \quad (14)$$

$$h_z(r) = r \cdot h_\varphi(r)q / \alpha, \quad (6)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r)q, \quad (7)$$

$$e_\varphi(r) = \frac{\mu\omega}{\chi c} h_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) = -\frac{\mu\omega}{\chi c} h_\varphi(r). \quad (3)$$

# Глава 4. Решение уравнений Максвелла для низкоомного провода переменного тока

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Решение уравнений Максвелла \ 2
- 3. Напряженности и токи \ 4
- 4. Потoki энергии \ 8
- 5. Ток и поток энергии в проводе \ 12
- 6. Обсуждение \ 15
- Приложение 1 \ 15

## 1. Введение

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид (см. вариант 1 в главе "Предисловие"):

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} J = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

$$J = \frac{1}{\rho} E, \quad (5)$$

где

$J$ ,  $H$ ,  $E$  - ток, магнитная и электрическая напряженности соответственно,

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, удельное сопротивление материала провода.

Далее эти уравнения применяются для анализа структуры переменного тока в проводе [15]. При синусоидальном токе в

проводе с удельной индуктивностью  $L$  и удельным сопротивлением  $\rho$  напряженность и ток связаны соотношением вида

$$J = \frac{1}{\rho + i\omega L} E = \frac{\rho - i\omega L}{\rho^2 + (\omega L)^2} E.$$

Отсюда при  $\rho \ll \omega L$  находим:

$$J \approx \frac{-i}{\omega L} E.$$

Следовательно, для анализа структуры синусоидального тока в проводе при достаточно высокой частоте условием (5) можно пренебрегать. При этом необходимо решать систему уравнений (1-4), где известен ток  $J_z$ , протекающий вдоль провода, т.е. проекция вектора  $J$  на ось  $oz$  (см. вариант 4 в главе "Предисловие").

## 2. Решение системы уравнений

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4) для провода. В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения имеют вид [4]:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} + \frac{4\pi}{c} J_z. \quad (8)$$

где

$$v = -\mu/c, \quad (9)$$

$$q = \varepsilon/c, \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\omega$  – некоторые константы.

Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (18)$$

$$J_r = j_r(r)co, \quad (19)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (20)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (21)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-21) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ,  $t$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$ .

Далее предполагается, что существует только ток (21), направленный вдоль оси  $Z$ . Этот ток создается внешним источником. Показывается, что наличие этого тока является причиной существования электромагнитной волны в проводе.

В приложении 1 показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (22)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (23)$$

$$e_z(r) = \hat{\chi} \frac{(M-1)}{\sqrt{M}} \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r), \quad (24)$$

$$h_r(r) = \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \quad (25)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (26)$$

$$h_z(r) = 0, \tag{27}$$

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r) = \frac{\chi\varepsilon\omega}{2\pi\alpha} Ar^\alpha, \tag{28}$$

где  $A, c, \alpha, \omega$  – константы.

Сравним это решение и решение, полученное в главе 1 для вакуума – см. табл. 1. Видно, что (несмотря на идентичность уравнений) эти решения существенно отличаются. Эти различия вызваны наличием внешней электродвижущей силы, в которой  $e_z(r) \neq 0$ . Она вызывает продольный ток, который существенно изменяет структуру электромагнитной волны.

Таблица 1.

	вакуум	провод
$\chi$	$\hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$	$\hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{M\varepsilon\mu}, \hat{\chi} = \pm 1$
$j_z$	<b>0</b>	$\frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r)$
$e_r$	$Ar^{\alpha-1}$	$Ar^{\alpha-1}$
$e_\varphi$		
$e_z$	<b>0</b>	$\hat{\chi} \frac{(M-1)\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{M}} \frac{1}{\alpha c} r e_\varphi(r)$
$h_r$	$-e_\varphi(r)$	$\hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r)$
$h_\varphi$	$-h_r(r)$	$-h_r(r)$
$h_z$	<b>0</b>	<b>0</b>

### 3. Напряженности и токи

Далее мы будем рассматривать только функции  $j_z(r)$ ,  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A=1, \alpha=3, \mu=1, \varepsilon=1, \omega=300$ . Величина  $j_z(r)$  показана в единицах (А/мм<sup>2</sup>) – в отличие от всех остальных величин, показанных в системе СИ. Увеличение функции  $j_z(r)$  при увеличении радиуса объясняет скин-эффект.

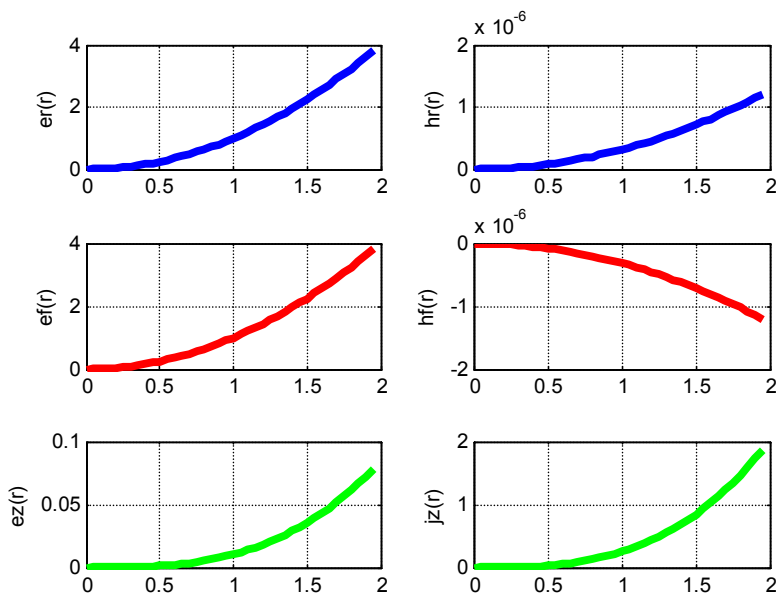


Fig.1. (SSMB)

Плотность энергии электромагнитной волны определяется как сумма модулей векторов  $E$ ,  $H$  определяется из (2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.23, 2.24) и равна

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)\delta i)^2 + (e_\varphi(r)\delta i)^2 + (h_r(r)\epsilon o)^2 + (h_\varphi(r)\epsilon o)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\varphi(r))^2 \tag{1}$$

- см. также рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

Для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны рассмотрим функции (2.11-2.19). Видно, что в каждой точке с координатами  $r, \varphi, z$  напряженности  $H, E$  сдвинуты по фазе на четверть периода.

Найдем среднее значение плотности амплитуды тока в проводе с радиусом  $R$ :

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \tag{5}$$

С учетом (2.21) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r,\varphi} [j_z(r)\delta i] dr \cdot d\varphi \tag{5a}$$



Далее найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (si \cdot d\varphi) \right) dr.$$

С учетом (2) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c} z) - \cos(\frac{2\omega}{c} z) \right) dr$$

или

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} (\cos(2\alpha\pi) - 1) \cdot J_{zr}, \tag{6}$$

где

$$J_{zr} = \int_0^R j_z(r) dr. \tag{7}$$

С учетом (2.28) найдем:

$$J_{zr} = \frac{A \chi \varepsilon \omega}{2\pi \alpha} \int_0^R (r^\alpha) dr \tag{9}$$

или

$$J_{zr} = \frac{A \chi \varepsilon \omega}{2\pi \alpha (\alpha + 1)} R^{\alpha+1}. \tag{10}$$

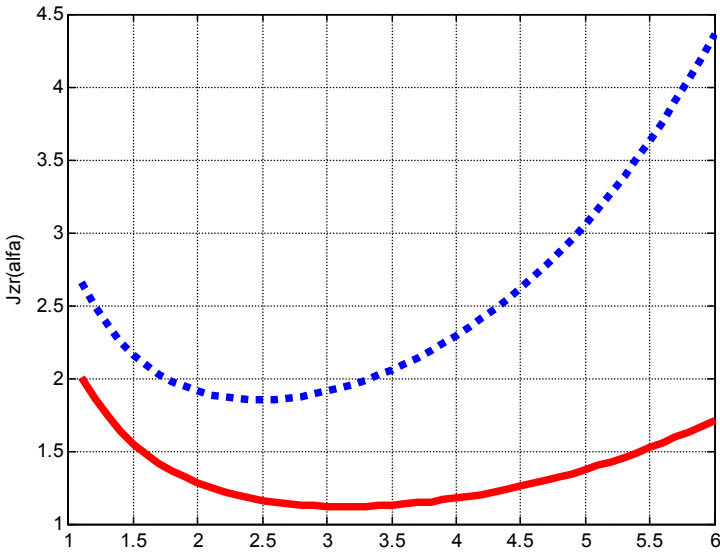


Fig.3. (SSMB)

На рис. 3 показана функция  $\overline{J}_z(\alpha)$  (6, 10) при  $A=1$ ,  $\chi=0.03$ . На этом рисунке пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1.75$ . Из (6, 8) и рис. 3 следует, что при определенном распределении величины  $j_z(r)$  среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J}_z$  существенно зависит от  $\alpha$ .

Ток определяется как

$$J = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (11)$$

или, с учетом (2.13-2.21):

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r(r) \varepsilon_0, \\ J_\phi &= \frac{\varepsilon \omega}{c} e_\phi(r) si, \\ J_z &= \left( \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z(r) + j_z \right) si. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно говорить о линиях этих токов. Так, например, ток  $J_z$  течет по прямым, параллельным оси провода. Мы рассмотрим линию суммарного тока.

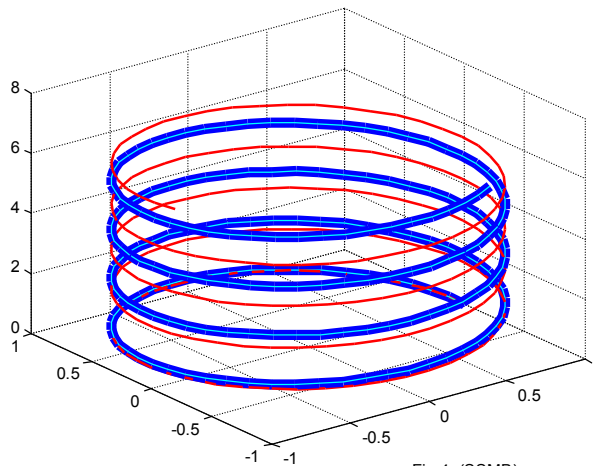


Fig.4. (SSMB)

Можно полагать, что скорость распространения тока смещения не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный током по окружности, и путь, пройденный им по вертикали будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$z = \gamma \cdot \phi \quad (13)$$

где  $\gamma$  – константа. На основе этого предположения можно преобразовать функции (4в) к виду

$$co = \cos(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi), \quad si = \sin(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi) \quad (14)$$

и построить соответствующую траекторию тока. На рис. 4 показаны две винтовые линии суммарного тока, описываемые функциями вида

$$co = \cos((\alpha + 2)\varphi), \quad si = \sin((\alpha + 2)\varphi).$$

На рис. 4 толстая линия построена при  $\alpha = 1.8$ , а тонкая линия – при  $\alpha = 2.5$ .

Из (2.19-2.21, 14) следует, что токи будут сохранять свою величину при данных  $r, \varphi$  (независимо от  $z$ ) в том случае, если постоянной является величина

$$\beta = (\alpha + 2\chi\gamma). \quad (15)$$

Далее на основе (14, 15) будем применять формулы

$$co = \cos(\beta\varphi), \quad si = \sin(\beta\varphi). \quad (16)$$

## 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется в этом случае точно также, как и в главе 1, раздел 4. Но здесь мы для удобства читателя повторим первые 6 формул отсюда. Итак

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение провода в данный момент времени,

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \quad (6)$$

Этим величинам равна плотность того потока энергии, который при данном радиусе распространяется по радиусу, по окружности и вдоль оси OZ равен. На рис. 5 показаны графики этих функций в зависимости от радиуса при  $A=1$ ,  $\alpha=3$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=1$ ,  $\omega=300$ .

Поток энергии вдоль оси OZ и равен

$$\overline{S_z} = \eta \iint_{r,\varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

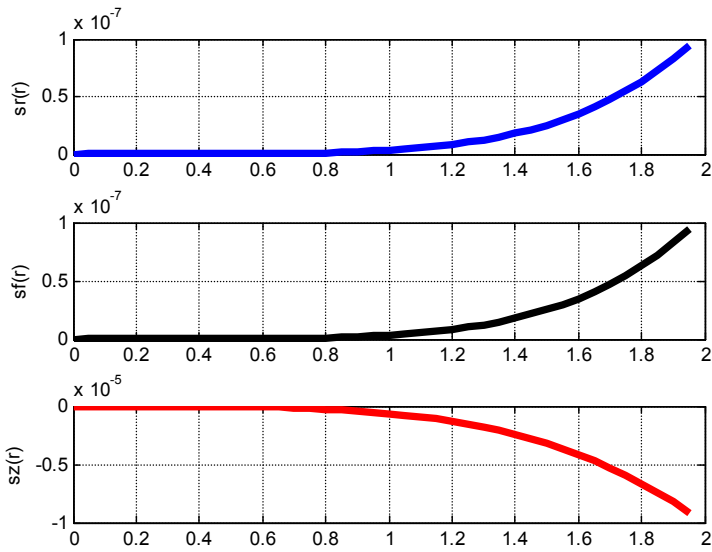


Fig.5. (SSMB)

Найдем  $s_z$ . Из (6, 2.22, 2.23, 2.26) получаем:

$$s_z = -2e_\varphi h_r = -\hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi^2(r) \quad (9)$$

или

$$s_z = Qr^{2\alpha-2}, \quad (10)$$

где

$$Q = A^2 \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} \quad (11)$$

В приложении 2 главы 1 показано, что из (7) следует, что

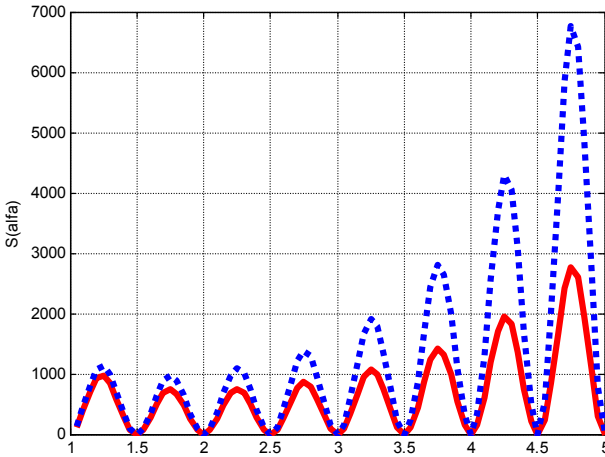
$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (s_z(r) dr). \quad (12)$$

Пусть  $R$  – радиус цилиндрического провода. Тогда из (12) получаем, как в главе 1,

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (s_z(r) dr) = \frac{Q}{2\alpha - 1} R^{2\alpha - 1}, \quad (13)$$

$$S_{\text{alfa}} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \quad (14)$$

$$\bar{S} = \frac{c}{16\pi} S_{\text{alfa}} S_{\text{int}}. \quad (15)$$



Объединяя формулы (11-15), получаем:

$$\bar{S}_z = \frac{c}{16\pi} \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)) A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} \frac{\hat{\chi}}{2\alpha - 1} R^{2\alpha - 1}$$

или

$$\bar{S}_z = \frac{\hat{\chi} A^2 c (1 - \cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha - 1)} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} R^{2\alpha - 1}. \quad (16)$$

Этот поток энергии не зависит от координаты и потому сохраняет свое значение на протяжении всей волны.

На рис. 7 показана функция  $\bar{S}(\alpha)$  (16) при  $A=1$ ,  $M=10^{13}$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=1$ . На рис. 7 пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к  $R=2$  и  $R=1.8$ .

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением  $S = W \cdot c$ , то из (15) можно найти энергию в единице длины провода:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{alfa} S_{int}. \quad (17)$$

Как следует из (7, 3.16), плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \quad (18)$$

На рис. 8 показана функция (18) при  $s_z = r^{2\alpha-2}$  - см. (10). Показаны две кривые при  $\alpha = 1.4$  и двух значениях радиуса:  $r = 1$  (толстая линия) и  $r = 2$  (тонкая линия).

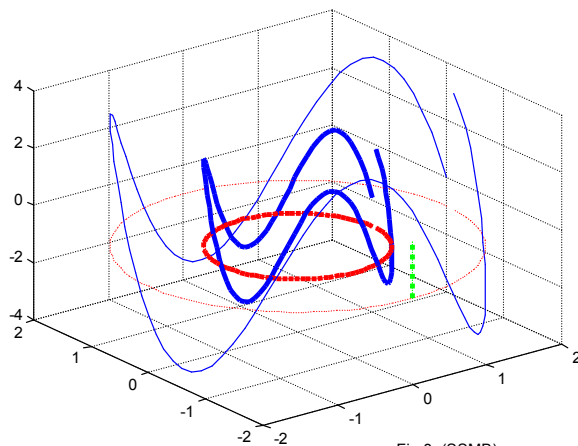


Fig.8. (SSMB)

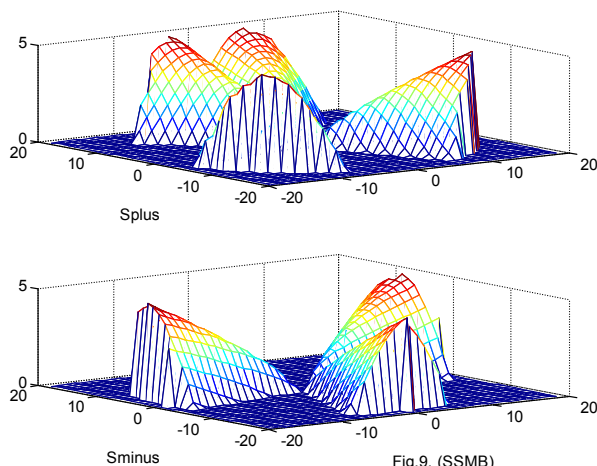


Fig.9. (SSMB)

На рис. 9 показана функция  $S$  (18) на всей плоскости сечения провода при  $s_z = r^{2\alpha-2}$  и  $\alpha = 1.4$ . При этом в верхнем окне показана та часть графика функции  $S$ , где  $S > 0$  -  $S_{\text{plus}}$ , а в нижнем окне показана та часть графика функции  $S$ , где  $S < 0$  -  $S_{\text{minus}}$ , причем эта часть для наглядности показана с обратным знаком. На этом рисунке видно, что

$$S = S_{\text{plus}} + S_{\text{minus}} > 0,$$

т.е. суммарный вектор плотности потока направлен в сторону увеличения  $z$  - в сторону нагрузки. Однако существуют две составляющие этого вектора: составляющая  $S_{\text{plus}}$ , направленная в сторону нагрузки, и составляющая  $S_{\text{minus}}$ , направленная в сторону источника тока. Эти составляющие потока переносят активную и реактивную энергию соответственно. Итак,

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению провода;
- эта картина сохраняется при перемещении по оси  $OZ$ ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $z$  и это соответствует закону сохранения энергии,
- поток энергии имеет две противоположно направленные составляющие, которые переносят активную и реактивную энергии; таким образом, отсутствует необходимость в представлении мнимого вектора Пойнтинга.

## 5. Ток и поток энергии в проводе

Можно сказать, что поток массовых частиц (массовый ток) *"несёт"* поток кинетической энергии, которая выделяется при столкновении с преградой. Точно также электрический ток *"несёт"* поток электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Это утверждение обсуждается и обосновывается в [4-9]. Отличие между этими двумя случаями состоит в том, что величина массового тока полностью определяет величину кинетической энергии. Однако во втором случае величина электрического тока НЕ определяет величину электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Следовательно, переносимая величина электромагнитной энергии – поток энергии определяется структурой тока. Покажем это.

Как следует из (3.10), среднее значение плотности амплитуды тока  $\overline{J_z}$  в проводе с данным радиусом  $R$  зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . При данной плотности можно найти зависимость между этими параметрами, которая следует из (3.10):

$$A = \frac{2\pi\alpha(\alpha+1)}{\chi\epsilon\omega} R^{-\alpha-1} J_{zr}. \quad (1)$$

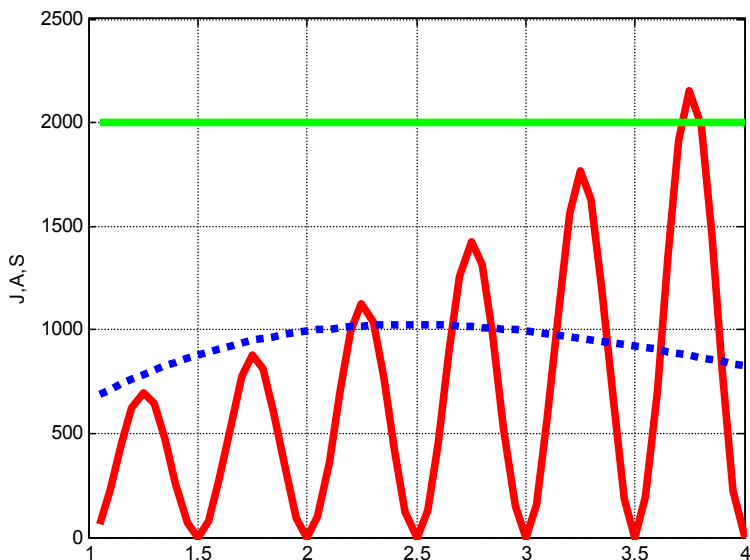


Fig.10. (SSMB)

Как следует из (4.16), плотность потока энергии  $S$  вдоль провода также зависит от двух параметров:  $\alpha$  и  $A$ . На рис. 10 показаны зависимости (1) и (4.16) при данных  $\overline{J_z} = 2$ ,  $R = 2$ . При этом прямая линия изображает постоянную плотность тока (в масштабе 1000), сплошная линия – плотность потока, пунктирная линия – параметр  $A$  (в масштабе 1000). Здесь  $A$  вычисляется по (1), плотность потока энергии  $S$  по (4.16) при данном  $A$ . Видно, что при одной и той же плотности тока плотность потока может принимать совершенно различные значения.

Выше из формул (4.7, 3.16) была найдена плотность потока энергии на окружности данного радиуса в виде функции (см. (4.18)):

$$\overline{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \quad (2)$$

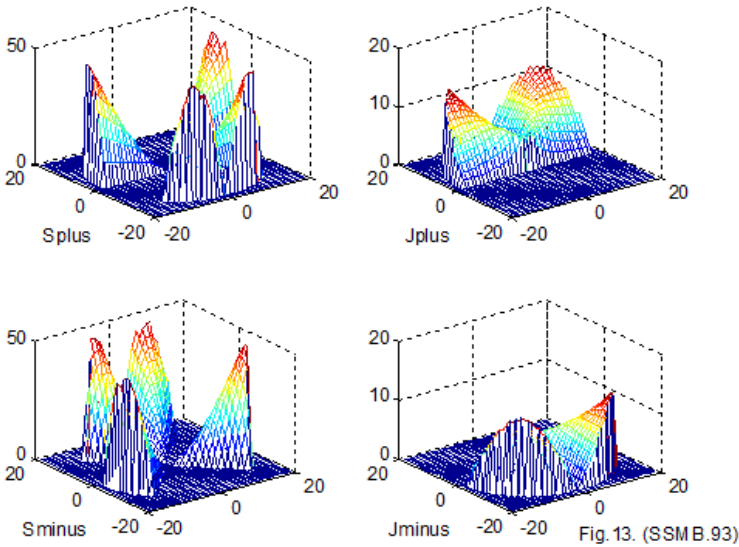
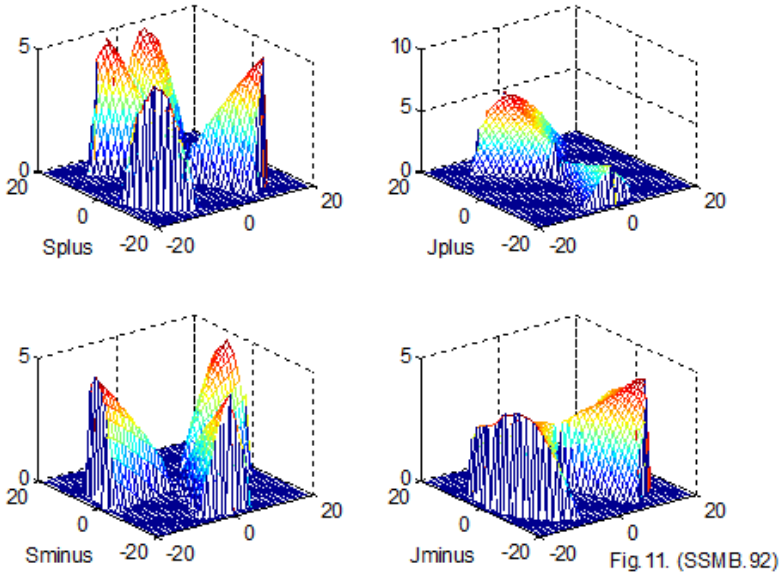
Аналогично из формул (3.5а, 3.16) может быть найдена плотность тока на окружности данного радиуса в виде функции

$$\overline{J}_{rz} = j_z \sin(\beta\varphi). \quad (3)$$



Функция (2) была показана на рис. 9. На рис. 11 в левых окнах повторены графики этой функции  $\bar{S}_{rz}$  (2), а в правых окнах для сопоставления показаны построенные аналогичным образом при  $A=1, \alpha=1.4, \beta=1.6, R=19$  графики функции  $\bar{J}_{rz}$  (3).

На рис. 11 видно, что в проводе могут существовать токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные "струи".



Существуют такие сочетания параметров, при которых суммарные токи противоположно направленных "струй" равны по абсолютной величине и, одновременно с этим, суммарные потоки энергии противоположно направленных "струй" также равны по абсолютной величине. На рис. 13 показан такой случай: при  $A=1$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $\beta=2$ ,  $R=19$  равны следующие интегралы по площади сечения  $Q$  провода (здесь важно, что  $\beta$  кратно 2):

$$\int_Q S_{\text{plus}} \cdot dQ = - \int_Q S_{\text{minus}} \cdot dQ,$$

$$\int_Q J_{\text{plus}} \cdot dQ = - \int_Q J_{\text{minus}} \cdot dQ.$$

## 6. Обсуждение

Показано, что в проводе переменного тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решение уравнений Максвелла.

Это решение во многом совпадает с тем, которое ранее найдено для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме – см. главу 1.

Оказалось, что ток распространяется в проводе по винтовой траектории, а шаг винтовой траектории зависит от плотности потока электромагнитной энергии, передаваемой по проводу в нагрузку, т.е. от передаваемой мощности. При этом поток энергии распространяется вдоль и внутри провода.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\phi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\phi(r) \chi - \frac{\mu\omega}{c} h_r = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c} h_\phi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\phi(r)}{r} + e'_\phi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c} h_z = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi - \frac{\varepsilon \omega}{c} e_r = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_\varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon \omega}{c} e_z(r) = \frac{4\pi}{c} j_z(r). \quad (8)$$

Умножим (5) на  $\left(-\frac{\mu\omega}{c\chi}\right)$ . Тогда получим:

$$-\frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_r(r)}{r} - \frac{\mu\omega}{c\chi} h'_r(r) - \frac{\mu\omega}{c\chi} \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{\mu\omega}{c} h_z(r) = 0. \quad (9)$$

Сравнивая (4) и (9), замечаем, что они совпадают, если

$$\left\{ \begin{array}{l} h_z \neq 0 \\ -\frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \\ \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \end{array} \right\} \quad (9a)$$

или, если

$$\left\{ \begin{array}{l} h_z = 0, \\ -M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \\ M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \end{array} \right\} \quad (9b)$$

где -  $M$  - константа. Далее будем пользоваться формулами

$$-M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (10)$$

$$M \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \quad (11)$$

где -  $M = 1$  для случая (9a). Перепишем (2, 3, 6, 7) в виде:

$$e_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) - \frac{r}{\alpha} \frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \quad (12)$$

$$e'_z(r) = e_r(r) \chi + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (13)$$

$$h_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} h_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha} \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_r(r), \quad (14)$$

$$h'_z(r) = -h_r(r)\chi + \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} e_\varphi(r), \quad (15)$$

Подставим (10, 11) в уравнения (12, 13). Тогда получим:

$$e_z(r) = \left( \chi - \frac{\chi}{M} \right) \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) = \frac{(M-1)\chi r}{M\alpha} e_\varphi(r), \quad (16)$$

$$e'_z(r) = \left( \chi - \frac{\chi}{M} \right) e_r(r)\chi = \frac{(M-1)}{M} \chi e_r(r). \quad (17)$$

Подставим (10, 11) в уравнения (14, 15). Тогда получим:

$$h_z(r) = \left( \chi - M \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) \frac{r}{\alpha} h_\varphi(r) = \frac{r}{\alpha c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2) h_\varphi(r), \quad (18)$$

$$h'_z(r) = \left( -\chi + M \frac{\varepsilon \cdot \omega}{c} \frac{\mu \cdot \omega}{c\chi} \right) h_r(r) = \frac{-1}{c^2 \chi} (c^2 \chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2) h_r(r). \quad (19)$$

Дифференцируя (16) и сравнивая с (17), находим:

$$\frac{(M-1)\chi}{M\alpha} (r e_\varphi(r))' = \frac{(M-1)}{M} \chi e_r(r)$$

или

$$(r e_\varphi(r))' = \alpha e_r(r)$$

или

$$(e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)) = \alpha e_r(r). \quad (20)$$

Из (1, 16) находим:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \frac{(M-1)}{M} \chi^2 \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) = 0 \quad (23)$$

Из физических соображений следует принять, что

$$h_z(r) = 0. \quad (24)$$

Тогда из (18) находим:

$$(c^2 \chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2) = 0$$

или

$$\chi = \hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{M\varepsilon\mu}, \quad \hat{\chi} = \pm 1. \quad (25)$$

Из (16, 25) находим:

$$e_z(r) = (M-1) \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) = \frac{(M-1)}{M} \hat{\chi} \frac{\omega}{c} \sqrt{M\varepsilon\mu} \frac{r}{\alpha} e_\varphi(r)$$

или

$$e_z(r) = \hat{\chi} \frac{(M-1)}{\sqrt{M}} \frac{\omega \sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r) \quad (25a)$$

При  $\omega \ll c$  из (25) находим, что

$$|\chi| \ll 1. \quad (26)$$

Тогда в уравнении (23) величиной  $\chi^2$  можно пренебречь и получить уравнение вида

$$\alpha \cdot e_\varphi(r) = e_r(r) + r \cdot e'_r(r). \quad (27)$$

Из (27, 20) в силу симметрии находим:

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (28)$$

$$\alpha \cdot e_\varphi(r) = e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r). \quad (29)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (30)$$

что можно проверить подстановкой (30) в (29). Из (11, 25) находим

$$h_r(r) = \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \quad (31)$$

а из (10, 28) находим

$$h_\varphi(r) = -h_r(r). \quad (32)$$

Наконец, из (8, 32) находим

$$j_z(r) = \frac{c}{4\pi} \left( -\frac{h_r(r)}{r} - h'_r(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) \right) \quad (33)$$

С учетом (30,31) замечаем, что сумма первых трех слагаемых равна нулю, и тогда

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r). \quad (34)$$

Итак, окончательно получаем:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \quad (30)$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \quad (28)$$

$$e_z(r) = \hat{\chi} \frac{(M-1)}{\sqrt{M}} \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r) \quad (25a)$$

$$h_r(r) = \hat{\chi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \quad (31)$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \quad (32)$$

$$h_z(r) = 0, \quad (24)$$

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r). \quad (34)$$

## Точность решения

Для анализа точности решения можно при данных значениях всех констант найти невязки уравнений (1-7). На рис. 0 показана зависимость логарифма среднеквадратичной невязки  $N$  от параметра  $\alpha$  -  $\ln N = f(\alpha)$  при  $A = 1$ ,  $\omega = 300$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ .



Fig.0. (SSMB)

# Глава 4а. Решение уравнений Максвелла для провода с переменным током

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Математическая модель \ 1
- Приложение 1 \ 4

### 1. Введение

В главах 2 и 4 рассматривались решения уравнений Максвелла для провода с переменным током в некоторых частных случаях. Ниже мы рассмотрим общий случай синусоидального переменного тока.

### 2. Математическая модель

В рассматриваемом случае поля и токи являются монохроматическими и могут быть представлены в комплексном виде [65]. Система уравнений Максвелла для монохроматических полей относительно амплитудных значений в этом случае принимает вид:

$$\operatorname{rot}(E) - \omega\mu H = 0, \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \omega\varepsilon E - J = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (d)$$

где

$\mu$  - магнитная проницаемость,

$\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость,

$\omega$  - угловая частота,

В системе цилиндрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эти уравнения имеют вид (см. приложение 1 в главе "Предисловие"):

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (c)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} - \omega \mu H_r = 0, \quad \text{см. (а)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} - \omega \mu H_\varphi = 0, \quad \text{см. (а)} \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \omega \mu H_z = 0, \quad \text{см. (а)} \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (d)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \omega \varepsilon E_r - J_r = 0, \quad \text{см. (b)} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega \varepsilon E_\varphi - J_\varphi = 0, \quad \text{см. (b)} \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \omega \varepsilon E_z - J_z = 0. \quad \text{см. (b)} \quad (8)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (12)$$

где  $\alpha$ ,  $\chi$  – некоторые константы.

Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r) co, \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) si, \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r) si, \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r) si, \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r) co, \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r) co, \quad (18)$$

$$J_r = j_r(r) si, \quad (19)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r) co, \quad (20)$$

$$J_z = j_z(r) co, \quad (21)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-21) преобразуют систему уравнений (1-8) с тремя аргументами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r)$ ,  $e(r)$ ,  $j(r)$ . Далее производные по



$r$  будем обозначать штрихами. Тогда после указанного преобразования получим:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{e_z(r)}{r} \alpha + e_\varphi(r) \chi - \mu \omega h_r(r) = 0, \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) - \mu \omega h_\varphi(r) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha - \mu \omega h_z(r) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{h_z(r)}{r} \alpha - h_\varphi(r) \chi - \varepsilon \omega e_r(r) - j_r(r) = 0, \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) - \varepsilon \omega e_\varphi(r) - j_\varphi(r) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - \varepsilon \omega e_z(r) - j_z(r) = 0. \quad (8)$$

Пять уравнений (1-5) связывают 6 функций  $h(r)$ ,  $e(r)$ .

Будем полагать, что известна функция  $h_\varphi(r)$ . Тогда по (1-5) можно найти остальные функции из множества функций  $[h(r), e(r)]$  - см. приложение 1. Затем по (6-8) можно найти функции  $j(r)$ :

$$j_r(r) = \frac{h_z(r)}{r} \alpha - h_\varphi(r) \chi - \varepsilon \omega e_r(r), \quad (6a)$$

$$j_\varphi(r) = -h_r(r) \chi - h'_z(r) - \varepsilon \omega e_\varphi(r), \quad (7a)$$

$$j_z(r) = \frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - \varepsilon \omega e_z(r). \quad (8a)$$

Функция  $h_\varphi(r)$  должна быть определена так, чтобы вычисленная функция  $j_z(r)$  соответствовала скин-эффекту. В этом случае можно будет утверждать, что существует решение уравнений Максвелла вида (13-21) для провода с переменным током. Существование решения означает, что в проводе существует продольная волна.

### Приложение 1.

Рассмотрим алгоритм решения уравнений (1-5) при данной функции  $h_\varphi(r)$ :

1. Вначале полагаем, что все функции  $[h(r), e(r)] = 0$ , кроме данной функции  $h_\varphi(r)$ .

$$2. \quad e'_r(r) = -\frac{e_r(r)}{r} + \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot e_z(r). \quad (1a)$$

$$3. \quad e'_z(r) = e_r(r) \chi - \mu \omega h_\varphi(r). \quad (3a)$$

$$4. \quad e'_\varphi(r) = -\frac{e_\varphi(r)}{r} + \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \mu \omega h_z(r). \quad (4a)$$

5. Находим новые значения всех функций  $e(r) = e(r) + e'(r) \cdot dr$ .

$$6. \quad h_r(r) = \frac{1}{\mu \omega} \left( -\frac{e_z(r)}{r} \alpha + e_\varphi(r) \chi \right). \quad (2a)$$

$$7. \quad h'_r(r) = \frac{1}{\mu \omega} \left( -\frac{e'_z(r)}{r} \alpha + e'_\varphi(r) \chi \right). \quad (2a)$$

$$8. \quad h_z(r) = \frac{1}{\chi} \left( -\frac{h_r(r)}{r} - h'_r(r) - \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha \right), \quad (5a)$$

9. Находим новые значения производных  $h'_{\varphi,z}(r) = (h_{\varphi,z}(r) + h_{\varphi,z,old}(r)) dr$ .

10. Возврат к п. 2.

# Глава 5. Решение уравнений Максвелла для провода ПОСТОЯННОГО ТОКА

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Математическая модель \ 3
3. Потоки энергии \ 8
4. Скорость движения энергии в проводе \ 12
5. Скорость движения энергии из аккумулятора \ 14
6. Обсуждение \ 14
- Приложение 1 \ 16
- Приложение 2 \ 18
- Приложение 3 \ 19

## 1. Введение

В [7, 9-11] было показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру. Ток  $J$  в проводе создает в теле провода магнитную индукцию  $B$ , которая действует на электроны с зарядом  $q_e$ , движущиеся со средней скоростью  $v$  в направлении, противоположном току  $J$ , силой Лоренца  $F$ , заставляя их смещаться к центру провода – см. рис. А.

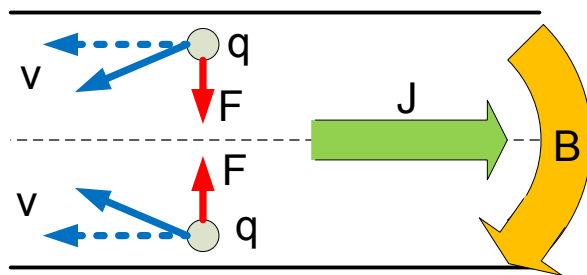


Рис А.

В связи с известным распределением индукции  $B$  по сечению провода сила  $F$  убывает от поверхности провода к центру – см.

рис. В, где показано изменение силы  $F$  в зависимости от радиуса  $r$ , на котором находится электрон.

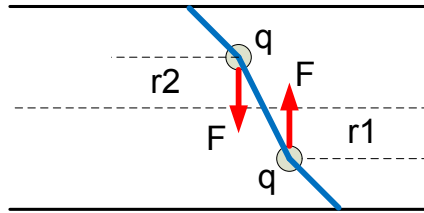


Рис В.

Таким образом, можно полагать, что в теле провода существуют элементарные токи  $I$ , начинающиеся на оси и направленные по некоторым углом  $\alpha$  к оси провода – см. рис. С.

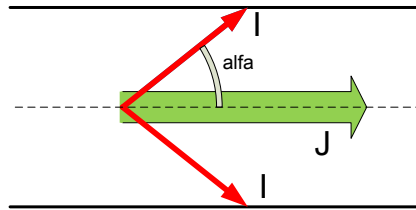


Рис С.

В [7, 9-11] было также показано, что поток электромагнитной энергии распространяется внутри провода. При этом поток электромагнитной энергии

- направлен вдоль оси провода,
- распространяется вдоль оси провода,
- распространяется внутри провода,
- компенсирует тепловые потери осевой составляющей тока.

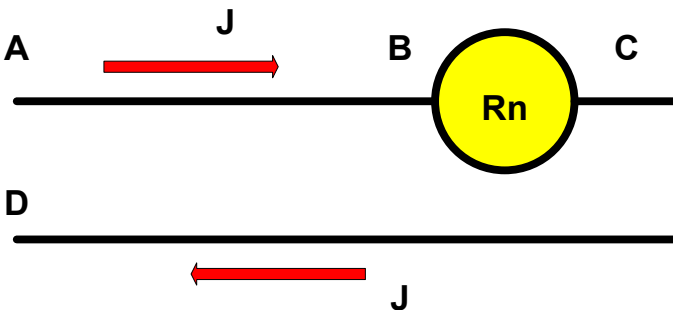


Рис. 1.

В [9-11] была предложена и рассматривалась математическая модель тока и потока, построенная исключительно на уравнениях Максвелла. Остался невыясненным следующий вопрос – см. рис. 1. Электрический  $\mathbf{J}$  ток и поток электромагнитной энергии  $\mathbf{S}$  распространяется внутри провода  $\mathbf{ABCD}$  и проходит через нагрузку  $\mathbf{Rn}$ . В этой нагрузке расходуется некоторая мощность  $\mathbf{P}$ . Следовательно, поток энергии на участке  $\mathbf{AB}$  должен быть больше потока энергии на участке  $\mathbf{CD}$ . Точнее,  $\mathbf{Sab}=\mathbf{Scd}+\mathbf{P}$ . Однако сила тока после прохождения нагрузки не изменилась. Как должна измениться структура тока, чтобы уменьшилась соответствующая ему электромагнитная энергия? Этот вопрос рассматривался в [7]

Ниже рассматривается более общая (по сравнению с [7, 9-11]) математическая модель. Эта математическая модель также построена исключительно на уравнениях Максвелла. В [12] описывается эксперимент, который был выполнен группой авторов в 2008 г. В [17] показано, что этот эксперимент может быть объяснен на основании нелинейной структуры постоянного тока в проводе и может служить экспериментальным доказательством существования такой структуры.

## 2. Математическая модель

Уравнения Максвелла для провода постоянного тока даны в главе "Предисловие" – см. вариант б:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{J})=0, \quad (\text{a})$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H} + \mathbf{H}(\mathbf{J}_o)) - \mathbf{J} - \mathbf{J}_o = 0, \quad (\text{b})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{J})=0, \quad (\text{c})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H})=0. \quad (\text{d})$$

При моделировании будем использовать цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и рассматривать

- основной ток  $\mathbf{J}_o$  и вызванную им напряженность  $\mathbf{H}_{\varphi o}$ ,
- дополнительные токи  $\mathbf{J}_r$ ,  $\mathbf{J}_\varphi$ ,  $\mathbf{J}_z$ ,
- магнитные напряженности  $\mathbf{H}_r$ ,  $\mathbf{H}_\varphi$ ,  $\mathbf{H}_z$ ,
- электросопротивление  $\rho$ .

Здесь в уравнения (a- d) добавлена известная плотность тока  $\mathbf{J}_o$ , передаваемого по проводу в нагрузку. Этот ток создает напряженность  $\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{J}_o r$ . Поскольку в определение ротора входит

производная  $\partial H/\partial r$  и  $\partial H_\varphi/\partial r = J_o$ , то уравнение (b) упрощается, принимая вид

$$\text{rot}(H) - J = 0. \quad (\text{b1})$$

Решение уравнений (a, b1, c, d) принято считать равным нулю. Однако ниже показывается, что при наличии тока  $J_o$  должно существовать ненулевое решение этих уравнений.

В решении необходимо найти плотности распределения всех напряженностей и токов. Ток в проводе принято рассматривать как усредненный поток электронов. Механические взаимодействия электронов с атомами считаются эквивалентными электрическому сопротивлению. Очевидно,

$$E = \rho \cdot J. \quad (0)$$

Уравнения (a-d) для цилиндрических координат имеют вид:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (d)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad \text{см. (b1)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad \text{см. (b1)} \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad \text{см. (b1)} \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (c)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{см. (a)} \quad (6)$$

$$\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r} = 0, \quad \text{см. (a)} \quad (7)$$

$$\frac{J_\varphi}{r} + \frac{\partial J_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_r}{\partial \varphi} = 0. \quad \text{см. (a)} \quad (8)$$

Модель основана на том, что

1. основная электрическая напряженность  $E_o$  направлена вдоль оси провода,
2. она создает основной ток  $J_o$  – вертикальный поток зарядов,

3. вертикальный ток  $J_o$  формирует кольцевое магнитное поле с напряженностью  $H_\phi(J_o) = J_o r$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (4),
4. магнитное поле  $H_\phi$  отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока в радиальном направлении, создавая радиальный поток зарядов - радиальный ток  $J_r$ ,
5. магнитное поле  $H_\phi$  отклоняет силами Лоренца заряды радиального потока перпендикулярно радиусам, создавая вертикальный ток  $J_z$  (дополнительно к току  $J_o$ ),
6. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока перпендикулярно радиусам, создавая кольцевой ток  $J_\phi$ ,
7. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды кольцевого потока вдоль радиусов, создавая вертикальный ток  $J_z$  (дополнительно к току  $J_o$ ),
8. ток  $J_r$  формирует вертикальное магнитное поле  $H_z$  и кольцевое магнитное поле  $H_\phi$  - см. (2),
9. ток  $J_\phi$  формирует вертикальное магнитное поле  $H_z$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (3).
10. ток  $J_z$  формирует кольцевое магнитное поле  $H_\phi$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (4); и т.д.

Таким образом, основной ток  $J_o$  создает дополнительные токи  $J_r$ ,  $J_\phi$ ,  $J_z$  и магнитные поля  $H_r$ ,  $H_\phi$ ,  $H_z$ . Они должны удовлетворять уравнениям Максвелла. Кроме того, потоки электромагнитной энергии должны быть такими, чтобы

- А. Вертикальный поток энергии был равен передаваемой мощности,
- В. Сумма всех потоков энергии должна быть равна передаваемой мощности в сумме с мощностью тепловых потерь в проводе.

Таким образом, токи и напряженности должны удовлетворять уравнениям Максвелла и условия А и В. Для поиска решения мы разобьем задачу на две следующих задачи (что можно сделать в силу линейности уравнений Максвелла):

- а) поиск решения уравнений (1-8) при отсутствии тока  $J_o$ ; это решение оказывается многозначным;

б) поиск дополнительных ограничений, налагаемых на первоначальное решение условиями А и В; здесь учитывается ток  $J_o$  и создаваемая им напряженность  $H_{o\varphi}$ .

Прежде всего, необходимо доказать, что решение системы (1-8) существует при ненулевых токах  $J_r, J_\varphi, J_z$ .

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = -\cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (10)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (11)$$

где  $\alpha, \chi$  – некоторые константы. В приложении 1 показано, что существует решение, имеющее следующий вид:

$$J_r = j_r(r) \cdot co, \quad (12)$$

$$J_\varphi = -j_\varphi(r) \cdot si, \quad (13)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot si, \quad (14)$$

$$H_r = -h_r(r) \cdot co, \quad (15)$$

$$H_\varphi = -h_\varphi(r) \cdot si, \quad (16)$$

$$H_z = h_z(r) \cdot si, \quad (17)$$

где  $j(r), h(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

Можно полагать, что средняя скорость электрических зарядов не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный в единицу времени зарядом по окружности, и путь, пройденный им по вертикали, будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$\Delta\varphi \equiv \Delta z. \quad (18)$$

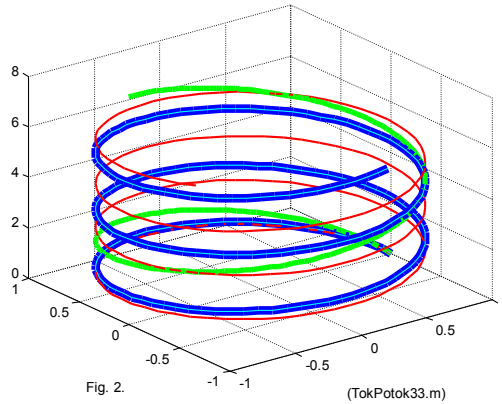
Таким образом, на цилиндре постоянного радиуса  $r$  существует траектория точки, описываемая формулами (10, 11, 18). Такая траектория является винтовой линией. С другой стороны, в соответствии с (12-17) на этой траектории все напряженности и плотности токов изменяются синусоидально в зависимости от  $\varphi$ . Следовательно,

линия на цилиндре постоянного радиуса  $r$ , по которой точка движется так, что все напряженности и плотности токов в ней изменяются синусоидально в зависимости от  $\varphi$ , является винтовой линией.

На основе этого предположения можно построить траекторию движения заряда в соответствии с функциями (10, 11).



На рис. 2 показаны три винтовые линии при  $\Delta\varphi = \Delta z$ , описываемые функциями (10, 11) тока: толстая линия при  $\alpha = 2$ ,  $\chi = 0.8$ , средняя линия при  $\alpha = 0.5$ ,  $\chi = 2$  и тонкая линия при  $\alpha = 2$ ,  $\chi = 1.6$ .



В приложении 1 показано, что существует определенная функция Бесселя, обозначаемая как  $F_\alpha(r)$ , от которой зависят функции напряженности  $h(r)$  и плотности тока  $j(r)$ , а именно

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (25)$$

$$j_r(r) = (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)) / \alpha, \quad (26)$$

$$j_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (27)$$

$$h_z(r) \equiv 0, \quad (28)$$

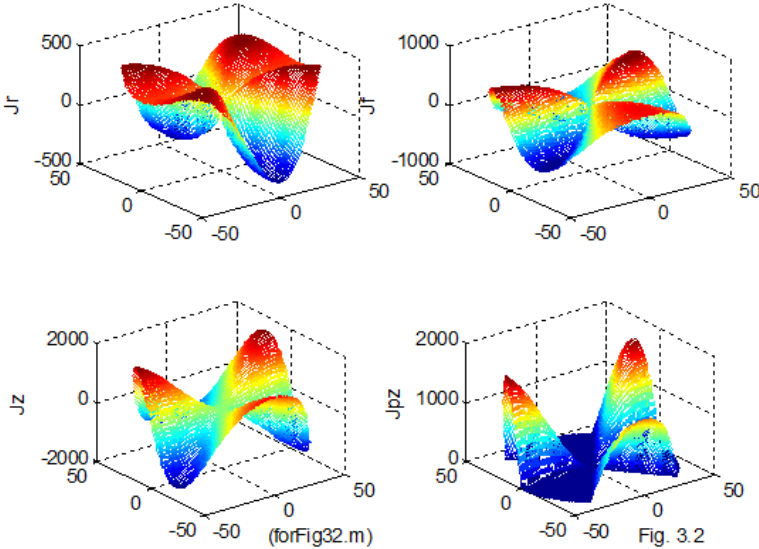
$$h_\varphi(r) = j_r(r) / \chi, \quad (29)$$

$$h_r(r) = j_\varphi(r) / \chi. \quad (30)$$

Функция (25) имеет множество вариантов, определяемых константами  $b$ ,  $z_0$ . Важно отметить, что на графике функции  $j_r(r)$  существует точка, где  $j_r(r) = 0$ . Местоположение этой точки  $r = R$  при моделировании зависит от выбора параметров  $\chi$ ,  $\alpha$ ,  $b$ ,  $z_0$ . Физически это означает, что в области  $r < R$  существуют радиальные токи  $J_r(r)$ , направленные от центра. В точке  $r = R$  токи  $J_r(r)$  отсутствуют. Поэтому величина  $R$  является радиусом провода.

На рис. 3.2 показаны функции (12-14) при  $z = const$ . В четвертом окне показана функция

$$Jp_z(r, \varphi) = \begin{cases} J_z(r, \varphi), & \text{if } J_z(r, \varphi) > 0, \\ 0, & \text{if } J_z(r, \varphi) \leq 0. \end{cases}$$



Найдем значение плотности тока в проводе с радиусом R:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r, \varphi} [J_z] dr \cdot d\varphi. \quad (31)$$

С учетом (14) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r, \varphi} [j_z(r) \sin i] dr \cdot d\varphi = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \int_0^{2\pi} (\sin i \cdot d\varphi) \right) dr. \quad (32)$$

С учетом (11) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha \pi R^2} \int_0^R j_z(r) \left( \cos\left(2\alpha r + \frac{2\omega}{c} z\right) - \cos\left(\frac{2\omega}{c} z\right) \right) dr. \quad (33)$$

Отсюда следует, что суммарный ток  $\overline{J_z}$  изменяется в зависимости от координаты  $z$ . Однако суммарный заданный ток с плотностью  $J_0$  остается постоянным.

### 3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется в этом случае по формуле (1.4.3):

$$S = E \times H. \quad (1)$$

Токам соответствуют одноименные электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J, \quad (2)$$

где  $\rho$  - электросопротивление. Совмещая (1, 2), получаем:

$$S = \rho J \times H = \frac{\rho}{\mu} J \times B. \quad (3)$$

Магнитная сила Лоренца, действующая на все заряды проводника в единичном объеме, - объемная плотность силы Лоренца равна

$$F = J \times B. \quad (4)$$

Из (3, 4) находим:

$$F = \mu S / \rho. \quad (5)$$

Следовательно, в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна вектору Пойнтинга.

**Пример 1.** Для проверки рассмотрим размерности величин в вышеприведенных формулах в системе СИ – см. табл. 1.

Параметр		Размерность
Плотность потока энергии	$S$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Плотность тока	$J$	$\text{А} \cdot \text{м}^{-2}$
Индукция	$B$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}$
Объемная плотность силы Лоренца	$F$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-3} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{м}^{-2}$
Магнитная проницаемость	$\mu$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2}$
Удельное сопротивление	$\rho$	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{А}^{-2}$
$\mu/\rho$	$\mu/\rho$	$\text{с} \cdot \text{м}^{-2}$

Итак, ток с плотностью  $J$  и магнитное поле создают поток энергии с плотностью  $S$ , который тождественен магнитной силе Лоренца с плотностью  $F$  - см. (5). Эта сила Лоренца действует на заряды, движущиеся в токе  $J$ , в направлении, перпендикулярном этому току. Следовательно, можно утверждать, что вектор Пойнтинга создает э.д.с. в проводнике. Этот вопрос с другой стороны рассмотрен в [19], где такая э.д.с. названа четвертым видом электромагнитной индукции.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  плотность потока электромагнитной энергии (3) имеет три компоненты  $S_r, S_\varphi, S_z$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно.

**3.1.** В каждой точке цилиндрической поверхности существует два потока электромагнитной энергии, направленных по радиусу, с плотностями

$$S_{r1} = \rho J_{\varphi} H_z, \quad S_{r2} = -\rho J_z H_{\varphi} \quad (6)$$

- см. рис 5. Суммарная плотность потока в каждой точке цилиндрической поверхности, направленного по радиусу,

$$S_r = S_{r1} + S_{r2} = \rho (J_{\varphi} H_z - J_z H_{\varphi}) \quad (7)$$

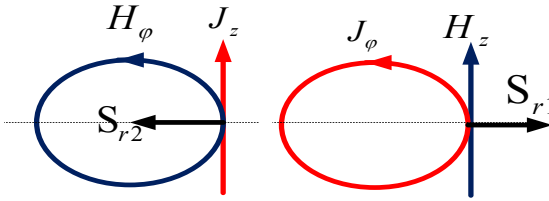


Рис. 5.

**3.2.** В каждой точке сечения цилиндра существует два потока электромагнитной энергии, направленных вертикально, с плотностями

$$S_{z1} = -\rho J_{\varphi} H_r, \quad S_{z2} = \rho J_r H_{\varphi} \quad (8)$$

- см. рис 6. Суммарная плотность потока в каждой точке сечения цилиндра, направленного по вертикали,

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} = \rho (J_r H_{\varphi} - J_{\varphi} H_r) \quad (9)$$

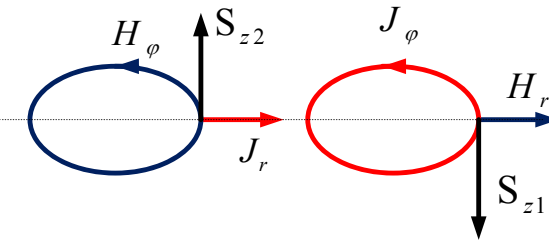


Рис. 6.

**3.3.** В каждой точке сечения цилиндра существует два потока электромагнитной энергии, направленных по окружности, с плотностями

$$S_{\varphi1} = \rho J_z H_r, \quad S_{\varphi2} = -\rho J_r H_z, \quad (10)$$

- см. рис 7. Суммарная плотность потока в каждой точке цилиндрической поверхности, направленного по окружности,

$$S_{\varphi} = S_{\varphi1} + S_{\varphi2} = \rho (J_z H_r - J_r H_z) \quad (11)$$

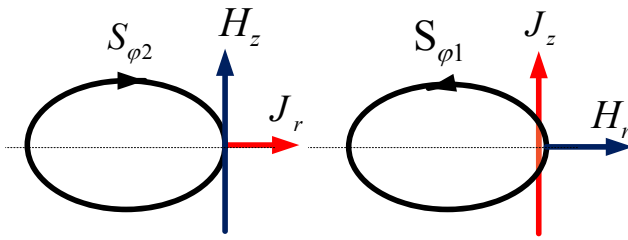


Рис. 7.

С учетом вышеизложенного запишем формулу плотности потока электромагнитной энергии в проводе постоянного тока:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\varphi H_z - (J_z + J_o)(H_\varphi + H_{o\varphi}) \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_\varphi - J_\varphi H_r + J_r H_{o\varphi} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Дополнительные слагаемые в (12) появляются в связи с тем, что на потоки энергии влияют также плотность тока  $J_o$  и напряженность

$$H_{o\varphi} = J_o r \quad (13)$$

- см. (2.4). Подставим (13) в (12):

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\varphi H_z - (J_z + J_o)(H_\varphi + J_o r) \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_\varphi - J_\varphi H_r + J_r J_o r \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Вычисления по этой формуле весьма громоздки и выходят за объем этой книги. Мы выделим из этой формулы только часть вида

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\varphi H_z - J_z H_\varphi \\ J_z H_r - J_r H_z \\ J_r H_\varphi - J_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Обозначим:

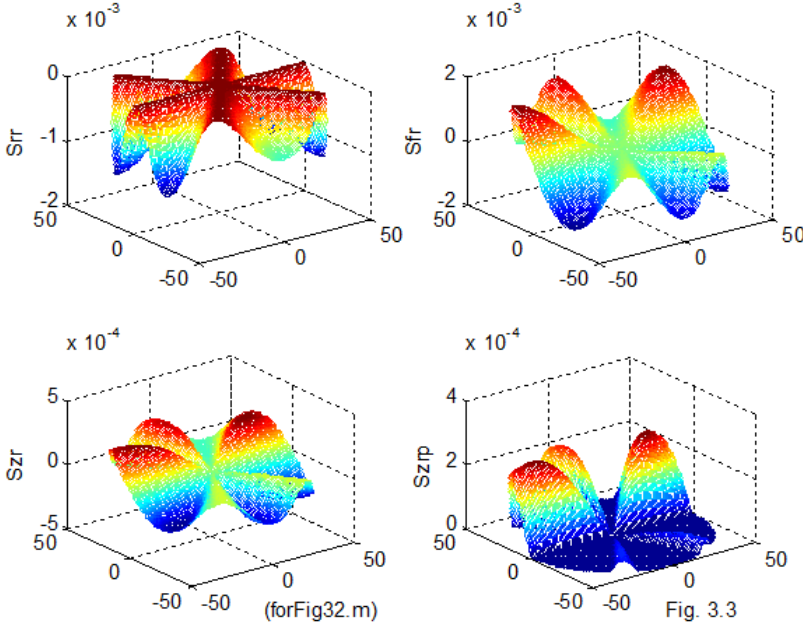
$$\begin{bmatrix} \bar{S}_r(r) \\ \bar{S}_\varphi(r) \\ \bar{S}_z(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (j_\varphi h_z - j_z h_\varphi) \\ (j_z h_r - j_r h_z) \\ (j_r h_\varphi - j_\varphi h_r) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Из (2.12-2.17, 15, 16) следует, что

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \iiint_{r,\varphi,z} \begin{bmatrix} \bar{S}_r(r) \cdot si^2 \\ \bar{S}_\varphi(r) \cdot si \cdot co \\ \bar{S}_z(r) \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi \cdot dz. \quad (17)$$

На рис. 3.1 в правой колонке показаны функции (16). На рис. 3.3 показаны функции (17) при  $z = const$ . В четвертом окне показана функция

$$Sp_z(r, \varphi) = \begin{cases} S_z(r, \varphi), & \text{if } S_z(r, \varphi) > 0, \\ 0, & \text{if } S_z(r, \varphi) \leq 0. \end{cases}$$



Итак, в проводе циркулируют потоки (12). Они являются внутренними. Они порождаются токами и магнитными напряженностями, создаваемые этими токами. В свою очередь, эти потоки воздействуют на токи, как силы Лоренца. При этом суммарная энергия этих потоков частично расходуется на тепловые потери, но в основном передается в нагрузку.

### 4. Скорость движения энергии в проводе

Рассмотрим скорость движения энергии в проводе постоянного тока. Так же, как и в главе 1, мы будем использовать концепцию Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $s$  является произведением плотности энергии  $w$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать только поток энергии вдоль провода. Этот поток равен мощности  $P$ , передаваемой по проводу в нагрузку:

$$s = P/\pi R^2. \quad (2)$$

где  $R$  - радиус провода. Внутренняя энергия провода – это энергия магнитного поля основного тока  $I_o$ . Эта энергия равна

$$W_m = \frac{L_i I_o^2}{2}, \quad (3)$$

где  $L$  - длина провода,  $L_i$  - индуктивность единицы длины провода, причем [83]

$$L_i \approx \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{1}{R}. \quad (4)$$

Объем провода

$$V = L\pi \cdot R^2. \quad (5)$$

Из (3-5) найдем плотность энергии в проводе

$$w = \frac{W_m}{V} = \frac{L_i I_o^2}{2\pi R^2}. \quad (6)$$

Из (1, 2, 6) найдем скорость движения энергии

$$v_\varphi = \frac{s}{w} = \frac{P}{\pi R^2} \bigg/ \left( \frac{L_i I_o^2}{2\pi R^2} \right) = \frac{2P}{L_i I_o^2}. \quad (7)$$

Сопротивление нагрузки

$$R_H = \frac{P}{I_o^2} \quad (8)$$

Следовательно,

$$v_\varphi = \frac{2R}{L_i}. \quad (9)$$

Например, при  $R = 10^{-3}$  и  $R_H = 1$  имеем:  $\ln \frac{1}{r} \approx 7$ ,

$L_i \approx \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \approx 7 \cdot 10^{-7}$ ,  $v_\varphi = 3 \cdot 10^6$ . Эта скорость значительно меньше

скорости света в вакууме. С этой скоростью энергия втекает в провод и из него вытекает в нагрузку. Энергию тепловых потерь мы не учитываем, т.к. она не передается в нагрузку.

При включении такой нагрузки ток в проводе нарастает по функции

$$I_o = \frac{U}{R_H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right), \quad (10)$$

где  $U$  - входное напряжение и

$$\tau = \frac{L_i L}{R_H}. \quad (11)$$

Из (9, 10) находим:

$$v_\varphi = \frac{2P}{L_i I_o^2} = \frac{2U}{L_i I_o} = \frac{2U}{L_i} \bigg/ \frac{U}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) = \frac{2R}{L_i} \bigg/ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right). \quad (12)$$

Таким образом, скорость движения энергии в переходном процессе уменьшается от бесконечности (скорости света в вакууме) до величины (9).

### 5. Скорость движения энергии из аккумулятора

Характеристики "среднего аккумулятора" представлены ниже [92]:

$E_m$ – емкость аккумулятора	60 Ач
$\rho$ - плотность электролита	1250 кг\м <sup>3</sup>
$G$ - вес электролита	1.5 кг
$V=G/\rho$ - объем электролита	0.0012 м <sup>3</sup>
$R$ – сопротивление нагрузки	0.047 Ом
$U$ – напряжение на нагрузке	12.8 В
$I$ – ток нагрузки (стартовый)	270 А
$P=U*I=U^2/R$ – мощность нагрузки	3456 Вт
$W=3600*E_m*U$ – энергия конденсатора (электролита)	2764800 Дж
$w=W/V$ – плотность энергии	2.3*10 <sup>9</sup> Дж\м <sup>3</sup>
$S = P$ – поток энергии	3456 Вт
$b$ - сечение провода	100 мм <sup>2</sup>
$s=S/(b*10^{-6})$ - плотность потока энергии	3.5*10 <sup>7</sup>
$v_\varphi = \frac{w}{s}$ - скорость движения энергии	100 м\сек
$c$ - скорость света	300*10 <sup>6</sup> м\сек

Таким образом, скорость движения энергии по проводу из аккумулятора **намного меньше** скорости света.

### 6. Обсуждение

Итак, полное решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током состоит из двух частей:

- 1) известного уравнения (3.13) вида  $H_{o\varphi} = J_o r$  и
- 2) полученных выше уравнений (2.10-2.17, 2.25-2.30).

Поток энергии вдоль оси провода  $S_z$  создается токами и напряженностями, направленными по радиусу и окружности. Этот поток энергии равен мощности, выделяемой в нагрузке  $R_H$  и в



сопротивлении провода. Токи, текущие вдоль радиуса и окружности, также создают тепловые потери. Их мощность равна потокам энергии  $S_r$ ,  $S_\varphi$ , направленным по радиусу и окружности.

Вопрос о том, каким образом поток электромагнитной энергии создает электрический ток, рассматривается в [19]. Там показано, что существует четвертая электромагнитная индукция, создаваемая изменением потока электромагнитной энергии. Затем определяется зависимость э.д.с. этой индукции от плотности потока электромагнитной энергии и параметров провода. Известен эксперимент, который может служить экспериментальным доказательством существования этой индукции [17].

Показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру и распространяется **внутри** провода по винтовой траектории. При постоянной величине тока плотность винтовой траектории уменьшается по мере уменьшения оставшегося сопротивления нагрузки. Имеется две составляющие тока. Плотность первой составляющей  $J_o$  постоянна на всем сечении провода. Плотность второй составляющей изменяется по сечению провода таким образом, что ток распространяется по винтовой траектории. В цилиндрических координатах  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  эта вторая плотность имеет три компоненты  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ . Они найдены как решение уравнений Максвелла.

При неизменной плотности основного тока в проводе передаваемая по нему мощность зависит от параметров структуры ( $\alpha$ ,  $\chi$ ), которые влияют на плотность витков винтовой траектории тока. Таким образом, один и тот же ток в данном проводе может передавать различную мощность (зависящую от нагрузки).

Снова рассмотрим рис. 1. На участке **AB** по проводу передается энергия нагрузки **P**. Ей соответствует определенное значение параметров структуры ( $\alpha$ ,  $\chi$ ) и, как следствие, плотность витков винтовой траектории тока. На участке **CD** по проводу передается незначительная энергия. Ей соответствует малая плотность витков винтовой траектории тока.

Естественно, нагрузкой является и сопротивление самого провода. Следовательно, по мере прохождения тока по проводу винтовая траектория тока выпрямляется.

Таким образом, показано, что существует такое решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током, которому соответствует представление о

- законе сохранения энергии,
- винтовой траектории постоянного тока в проводе,
- передаче энергии вдоль и внутри провода,
- зависимости плотности винтовой траектории от передаваемой мощности.

## Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.5-2.9) в виде функций (2.10-2.17). Далее производные по  $r$  будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.5-2.9) для удобства читателя:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) - \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot j_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{h_r(r)}{r} - h'_r(r) - \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha + h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (3)$$

$$h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) - \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot j_z(r) \alpha + j_\varphi(r) \chi = 0, \quad (6)$$

$$-j_r(r) \chi - j'_z(r) = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{j_\varphi(r)}{r} - j'_\varphi(r) + \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (8)$$

Сначала решим группу 4-х уравнений (1, 6, 7, 8) относительно 3-х неизвестных функций  $j(r)$ . Из (6) находим:

$$j_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (11)$$

$$j'_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)). \quad (12)$$

Из (7, 12) находим:

$$-j_r(r) \chi + \frac{\chi}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)) = 0,$$

ИЛИ

$$\frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) - \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (13)$$

Но уравнение (13) совпадает с (8). Следовательно, уравнение (7) может быть исключено из системы уравнений (1, 6, 7, 8).

Решение системы уравнений (1, 6, 8) приведено в приложении 2 и имеет вид определенной там функции  $F_\alpha(r)$ , причем

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r). \quad (14)$$

$$j_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (15)$$

$$j_r(r) = \frac{1}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)). \quad (16)$$

При известных функциях  $j(r)$  решаем систему 4-х уравнений (2-5) относительно 3-х неизвестных функций  $h(r)$ . Из (3, 4) находим:

$$h_\varphi(r) = -\frac{1}{\chi} \left( \frac{\alpha}{r} \cdot h_z(r) - j_r(r) \right), \quad (17)$$

$$h_r(r) = \frac{1}{\chi} (j_\varphi(r) + h'_z(r)). \quad (18)$$

Подставим (17, 18) в (2). Тогда найдем

$$\frac{-1}{r\chi} (j_\varphi(r) + h'_z(r)) - \frac{1}{\chi} (j'_\varphi(r) + h''_z(r)) + \frac{\alpha}{r\chi} \left( \frac{\alpha}{r} \cdot h_z(r) - j_r(r) \right) = 0$$

ИЛИ

$$\left( \frac{\alpha^2}{r} \cdot h_z(r) - h'_z(r) - r h''_z(r) \right) - \left\{ \alpha \cdot j_r(r) + j_\varphi(r) + r j'_\varphi(r) \right\} = 0. \quad (19)$$

Подставим (17, 18) в (5). Тогда найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r\chi} \left( \frac{\alpha}{r} \cdot h_z(r) - j_r(r) \right) + \frac{1}{\chi} \left( \frac{\alpha}{r} \cdot h'_z(r) - \frac{\alpha}{r^2} \cdot h_z(r) - j'_r(r) \right) + \\ + \frac{\alpha}{r\chi} (j_\varphi(r) + h'_z(r)) - j_z(r) = 0 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha}{r} \cdot h_z(r) - j_r(r) \right) + r \left( \frac{\alpha}{r} \cdot h'_z(r) - \frac{\alpha}{r^2} \cdot h_z(r) - j'_r(r) \right) + \\ + \alpha (j_\varphi(r) + h'_z(r)) - r \chi j_z(r) = 0 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{r} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \cdot h_z(r) + 2\alpha h'_z(r) + \\ + \left\{ j_r(r) - r \cdot j'_r(r) + \alpha \cdot j_\varphi(r) - \chi \cdot r \cdot j_z(r) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

В уравнениях (19) и (20) правые части в фигурных скобках равны нулю, поскольку совпадают с уравнениями (8) и (1) соответственно. Следовательно, уравнения (19) и (20) одновременно равны нулю только при

$$h_z(r) \equiv 0. \quad (21)$$

Итак, искомые функции  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$  определяются по (14, 16, 15, 18, 17, 21) соответственно.

## Приложение 2

Рассмотрим уравнения (1, 6, 8) из приложения 1 и перенумеруем их:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) - \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot j_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot j_z(r) \alpha + j_\varphi(r) \chi = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{j_\varphi(r)}{r} - j'_\varphi(r) + \frac{j_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (3)$$

Из (2) находим:

$$j_\varphi = -\frac{\alpha}{r\chi} \cdot j_z, \quad (3a)$$

Из (1, 3a) находим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) - \alpha \frac{j_\varphi(r)}{r} - \frac{\chi^2}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r) = 0. \quad (4)$$

Из (3) находим:

$$j_r(r) = \frac{1}{\alpha} (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)), \quad (5)$$

$$j'_r(r) = \frac{1}{\alpha} (2j'_\varphi(r) + r \cdot j''_\varphi(r)). \quad (6)$$

Из (4-6) находим:

$$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) \right) + \frac{1}{\alpha} (2j'_\varphi(r) + r \cdot j''_\varphi(r)) - \alpha \frac{j_\varphi(r)}{r} - \frac{\chi^2}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r) = 0. \quad (7)$$

Упрощая (7), получаем:

$$-\left( \frac{j_\varphi(r)}{r} + j'_\varphi(r) \right) - (2j'_\varphi(r) + r \cdot j''_\varphi(r)) + \alpha^2 \frac{j_\varphi(r)}{r} + \chi^2 r \cdot j_\varphi(r) = j_o,$$

или

$$j_\varphi(r) \left( \frac{\alpha^2 - 1}{r} + \chi^2 r \right) - 3j'_\varphi(r) + r \cdot j''_\varphi(r) = 0 \quad (8)$$

или

$$j_{\varphi}'' - \frac{3}{r} \cdot j_{\varphi}' + j_{\varphi} \left( \chi^2 + \frac{(1-\alpha^2)}{r^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является уравнением Бесселя – см. приложение 3. Далее мы будем обозначать это решение как  $F_{\alpha}(r)$ . Итак,

$$j_{\varphi}(r) = F_{\alpha}(r), \quad (10)$$

$$j_{\varphi}'(r) = \frac{d}{dr} F_{\alpha}(r), \quad (11)$$

### Приложение 3.

Известно уравнение Бесселя, имеющее следующий вид:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\nu$  - порядок уравнения. Обозначим через  $Z_{\nu}(y)$  - общий интеграл уравнения Бесселя порядка  $\nu$ . В [4, стр. 403] показано, что уравнение вида

$$y'' + \frac{a}{x} y' + y \cdot \left( bx^m + \frac{c}{x^2} \right) = 0. \quad (2)$$

можно преобразовать в уравнение вида (1), причем  $Z_{\nu}(y)$  и порядок  $\nu$  определяются через параметры  $a, b, m, c$ .

В частности, уравнение (9) из приложения 3 преобразуется в уравнение вида (1) следующей заменой:

$$\begin{aligned} a &= -3, \quad b = \chi^2, \quad m = 0, \quad c = 1 - \alpha^2, \\ \nu &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{(1+3)^2 - 4(1-\alpha^2)} \right) = \sqrt{3 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, решение уравнения (9)

$$j_{\varphi}(r) = F_{\alpha}(r) = Z_{\nu}(\chi \cdot r). \quad (4)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dy} Z_{\nu}(y) = \frac{1}{2} (Z_{\nu-1}(y) - Z_{\nu+1}(y)), \quad (5)$$

то

$$j_{\varphi}'(r) = \frac{1}{2} (Z_{\nu-1}(\chi \cdot r) - Z_{\nu+1}(\chi \cdot r)). \quad (6)$$

---

# Глава 5а. Двигатель Мильроя

---

## Оглавление

- 1. Введение \ 1
- 2. Математическая модель \ 2
- 3. Потоки электромагнитной энергии \ 4
- 3а. Вращающий момент \ 5
- 4. Дополнительный эксперимент \ 7
- 5. О законе сохранения импульса \ 7
- Приложение 1. Расчет вращающего момента \ 8
- Фотографии \ 10

### 1. Введение

Известен двигатель Мильроя [67] – в дальнейшем - ДМ. В "youtube" можно посмотреть эксперименты с ДМ [68-73]. Известны попытки теоретического объяснения функционирования ДМ [74-77, 80]. В [80] функционирование этого двигателя объясняется действием непотенциальных поперечных сил Лоренца. В [74] функционирование этого двигателя объясняется взаимодействием магнитного потока, созданного спиралью тока в вале и модулированного переменным магнитным сопротивлением зазора между обоями подшипника с индуцированными во внутренней обойме подшипника токами. Не обсуждая правомерность этих теорий, следует отметить, что они не доведены до той стадии, когда на их основе можно было бы рассчитать технические параметры ДМ. Но такие расчеты необходимы перед началом массового производства.

На фотографиях в конце главы показаны различные конструкции ДМ. Токопроводящий вал с надетыми на него маховиками может вращаться в двух подшипниках. Через внешние кольца подшипников и этот вал пропускается электрический ток. Вал начинает раскручиваться в любую сторону после первого толчка.

Вместе с исключительной простотой ДМ, он обладает двумя существенными недостатками:

- 1. Малым к.п.д.
- 2. Необходимостью начального разгона дополнительным двигателем (при этом ДМ продолжает крутиться в ту

сторону, куда его толкнули, и увеличивает скорость вращения).

Сразу же отметим, что второй недостаток иногда не имеет значения. Например, ДМ, установленный на велосипеде, мог бы разогнаться велосипедистом.

ДМ изобрел английский физик Р. Мильрой в 1967 г. В.В. Косырев, В.Д. Рябко и Н.Н. Вельман раньше Мильроя, в 1963 предложили двигатель другой конструкции [82]. Их двигатель принципиально отличается от двигателя Мильроя тем, что один из подшипников отсутствует. Токпроводящий вал запрессован во внутреннее кольцо подшипника, расположенного горизонтально. При этом вал висит на подшипнике. Электрическая цепь замыкается через внешнее кольцо подшипника и щетку, касающуюся нижнего торца вала. Авторы видят причину вращения в том, что вал "вращается в результате упругой деформации деталей при нагреве последних протекающим по ним электрическим током"

Наконец, часто функционирование этого двигателя объясняют эффектом Губера [77, 84].

Ниже дается иное объяснение принципа действия этих двигателей. Показывается, что **внутри** проводника с током возникает крутящий момент. Автору представляется, что двигатель Косырева не может быть объяснен иначе.

## 2. Математическая модель

В главе 5 рассматривалось решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током с плотностью  $J_{oz}$ . Плотность этого тока одинакова на всем сечении провода. Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\operatorname{rot}(J) = 0, \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}(H) - J = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (d)$$

а плотность тока  $J_{oz}$  не включена в уравнения (a, d), потому что все производные этого тока равны нулю.

Было показано, что полное решение уравнений Максвелла в этом случае состоит из двух частей:

- 1) известного уравнения вида

$$H_{o\varphi} = J_{oz} r, \quad (1)$$

- 2) полученных в главе 5 уравнений вида (5.2.10-5.2.17) и (5.2.25-5.2.30); эти уравнения связывают магнитные напряженности и плотности токов с известными константами ( $\alpha$ ,  $\chi$ ) и радиусом провода  $R$ .

Токи и напряженности, определяемые этими уравнениями, формально не зависят от заданного тока  $J_{oz}$ . Но они определяют поток энергии, передаваемый по проводу, т.е. ту мощность, которая выделяется током в нагрузке.

Ниже мы рассмотрим случай, когда существует еще постоянный ток, направленный по окружности, кольцевой ток. Например, обмотку соленоида можно представить как сплошной кольцевой цилиндр, по окружности которого течет постоянный ток. Будем обозначать плотность этого заданного тока как  $J_{o\phi}$ . Так же, как и в случае заданного тока  $J_{oz}$ , полное решение уравнений Максвелла (а-д) в этом случае состоит из двух частей:

- 1) известного уравнения вида

$$-\frac{\partial H_{z0}}{\partial r} = J_{\phi 0}, \quad (17)$$

- 2) уравнений (5.2.10-5.2.17) и (5.2.25-5.2.30).

Рассмотрим вопрос об источнике тока  $J_{o\phi}$ . В отсутствии вращения стержня вдоль него протекает постоянный ток с плотностью  $J_{oz}$ . Свободные электроны этого тока движутся с некоторой скоростью вдоль стержня. При вращении стержня свободные электроны этого тока приобретают еще и окружную скорость. При этом возникает т.н. конвекционный ток, который является током с плотностью  $J_{o\phi}$ . Эйхенвальд показал [86], что конвекционный ток также создает магнитную напряженность. Следовательно, ток с плотностью  $J_{o\phi}$  создает магнитную напряженность (17).

Итак, вдоль провода в токе  $J_o$  движутся заряды с плотностью  $q$  и со скоростью  $v$  (*скорость электронов в проводе*), причем

$$J_o = qv. \quad (18)$$

Если стержень вращается с угловой скоростью  $\omega$ , то

$$J_{\phi 0} = q\omega \cdot r \quad (19)$$

или, с учетом (18),



$$J_{\omega}(r) = J_o \omega \cdot r / v. \quad (20)$$

Таким образом, во вращающемся стержне двигателя Мильроя вместе с осевым током  $J_o$  по окружности провода также течет постоянный конвекционный ток с плотностью (20).

Из (17, 20) находим:

$$H_{zo} = \frac{J_o \omega \cdot r^2}{2v}. \quad (21)$$

Далее будет показано, что из решения уравнений (1-16) следует существование вращающего момента  $M$  в стержне. Этот вращающий момент увеличивает скорость вращения, благодаря чему увеличивается конвекционный ток  $J_{o\phi}$ . Равновесие наступает при равенстве указанного момента и тормозного момента на валу двигателя (при данном токе  $J_{oz}$ ). Это явление аналогично тому, что токи, текущие вдоль провода, под действием силы Ампера смещают провод в целом (в обычных электромоторах).

Наконец, можно представить **конструкцию, где в стержне создается дополнительная радиальная магнитная напряженность  $H_{or}$** .

Можно также представить **конструкцию, где в стержне создается дополнительная осевая магнитная напряженность  $H_{2oz}$** .

### **3. Потоки электромагнитной энергии**

В разделе 3 главы 5 показано, что плотность потока электромагнитной энергии и плотность магнитной силы Лоренца в проводе постоянного тока связаны следующими соотношениями:

$$S = E \times H, \quad (1)$$

$$S = \rho J \times H = \frac{\rho}{\mu} J \times B, \quad (3)$$

$$F = J \times B, \quad (4)$$

$$F = \mu S / \rho, \quad (5)$$

где  $\rho$ ,  $\mu$  - электросопротивление и магнитная проницаемость. Следовательно, в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна вектору Пойнтинга.

В цилиндрических координатах плотности этих потоков энергии по координатам выражаются формулой вида – см. (5.3.12):

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho(J \times H) = \rho \begin{bmatrix} J_\varphi H_z - (J_z + J_o)(H_\varphi + H_{o\varphi}) \\ J_z H_r - J_r H_z + J_o H_r \\ J_r H_\varphi - J_\varphi H_r + J_r H_{o\varphi} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для двигателя Мильроя эта формула дополняется из-за появления величин  $H_{zo}$ ,  $H_{ro}$ ,  $J_{\varphi o}$ ,  $H_{2zo}$  и принимает вид:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} (J_\varphi + J_{\varphi o})(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) - (J_z + J_o)(H_\varphi + H_{o\varphi}) \\ (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) \\ J_r(H_\varphi + H_{o\varphi}) - (J_\varphi + J_{\varphi o})(H_r + H_{ro}) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

В соответствии с (5) находим силы Лоренца, действующие на единицу объема,

$$F = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \frac{\mu}{\rho} \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix}. \quad (8)$$

### 3а. Вращающий момент

В (3.8)  $F_\varphi$  - плотность вращающей силы, действующей на вал в единице объема. Тогда плотность вращающего момента, действующего на вал в слое с радиусом  $r$ , равен

$$M(r) = r \cdot F_\varphi. \quad (9)$$

Из (7, 8) находим:

$$S_\varphi = \rho[(J_z + J_o)H_r - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo})], \quad (11)$$

$$F_\varphi = \frac{\mu}{\rho} S_\varphi = \mu \begin{bmatrix} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Из (9, 12) находим:

$$M(r) = r \cdot F_\varphi = \mu \cdot r \begin{bmatrix} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r(H_z + H_{zo} + H_{2zo}) \end{bmatrix}$$

или, с учетом (2.21),

$$M(r) = \mu \cdot r \begin{bmatrix} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r \left( H_z + H_{2zo} + \frac{J_o \omega \cdot r^2}{2\nu} \right) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В главе 5 показано, что  $H_z \equiv 0$ . Тогда

$$M(r) = \mu \cdot r \left[ \begin{array}{l} (J_z + J_o)(H_r + H_{ro}) - \\ - J_r \left( H_{2zo} + \frac{J_o \omega \cdot r^2}{2\nu} \right) \end{array} \right]. \quad (14)$$

Формула (14) определяет плотность вращающего момента, действующего на вал в слое с радиусом  $r$ . Напомним из главы 5, что

$$J_{r.} = -j_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (15)$$

$$J_{z.} = j_z(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (16)$$

$$H_{r.} = h_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (17)$$

где

$$j_\varphi(r) = F_\alpha(r), \quad (18)$$

$$j_r(r) = (j_\varphi(r) + r \cdot j'_\varphi(r)) / \alpha, \quad (19)$$

$$j_z(r) = -\frac{\chi}{\alpha} r \cdot j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$h_r(r) = j_\varphi(r) / \chi, \quad (21)$$

Здесь константы  $\chi$ ,  $\alpha$  и функция Бесселя  $F_\alpha(r)$  определены в главе 5. Объединяя (14-17), получаем:

$$M(r) = \mu \cdot r \left[ \begin{array}{l} \left[ (j_z(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z) + J_o) \cdot \right. \\ \left. \cdot (h_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z) + H_{ro}) \right] + \\ - H_{2zo} j_r(r) \cos(\alpha\varphi + \chi z) + \\ + \frac{J_o \omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \cos(\alpha\varphi + \chi z) \end{array} \right] \quad (22)$$

Полный вращающий момент вычисляется как интеграл вида

$$\overline{M} = \iiint_{r,\varphi,z} M(r) dr d\varphi dz. \quad (23)$$

Этот интеграл можно представить суммой интегралов:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \overline{M}_4 + \overline{M}_5 + \overline{M}_6, \quad (24)$$

где слагаемые интегралы определены в приложении 1.

Эти соотношения позволяют выполнить механический расчет вращающего момента в двигателе Мильроя.

В приложении 1 показано, что в обычном двигателе Мильроя величина момента (21) незначительна  $\omega = 0$ , т.е. отсутствует пусковой момент. Однако при  $H_{ro} \neq 0$  и\или  $H_{2zo} \neq 0$  **существует значительный пусковой момент.**

#### 4. Дополнительный эксперимент

Можно предложить эксперимент, в котором ранее предложенные объяснения причины вращения двигателя Мильроя не приемлемы (на взгляд автора). Необходимо предоставить стержню с током свободно вращаться без подшипников. Это можно осуществить следующим образом – см. рис. 2. Вал с заостренными концами зажимается между двумя угольными щетками так, чтобы он мог крутиться. Угольные щетки нужны для того, чтобы контакты не приваривались при больших токах. В соответствии с тем, что изложено в статье, в такой конструкции вал должен вращаться. Это позволит отказаться от рассмотрения ряда гипотез по объяснению функционирования двигателя Мильроя.

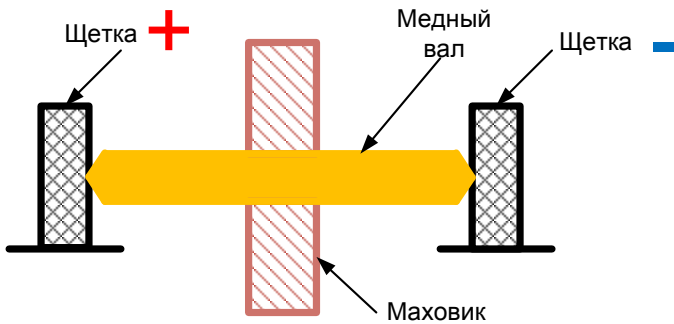


Рис. 2.

#### 5. О законе сохранения импульса

Необходимо обратить внимание на то, что в двигателе Мильроя явным образом нарушается закон сохранения механического импульса. Это объясняется тем, что в стержне присутствует электромагнитный импульс - вместе с потоком электромагнитной энергии. И это еще раз подтверждает, что вращающий момент существует **внутри** провода.

## Приложение 1. Расчет вращающего момента

Преобразуем (3а.22). Тогда получим:

$$M(r) = \mu \cdot r \left[ \begin{aligned} & j_z(r) h_r(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z) \cdot \cos(\alpha\varphi + \chi z) + \\ & j_z(r) \sin(\alpha\varphi + \chi z) H_{r0} + J_o H_{r0} + \\ & + \left[ J_o \left( h_r(r) + \frac{\omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \right) - H_{2z0} j_r(r) \right] \cos(\alpha\varphi + \chi z) \end{aligned} \right]. \quad (1)$$

Полный вращающий момент вычисляется как интеграл вида

$$\bar{M} = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r \left[ \begin{aligned} & j_z(r) h_r(r) \sin(\dots) \cdot \cos(\dots) + \\ & j_z(r) \sin(\dots) H_{r0} + J_o H_{r0} + \\ & + \left[ J_o \left( h_r(r) + \frac{\omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \right) - H_{2z0} j_r(r) \right] \cos(\dots) \end{aligned} \right] dr d\varphi dz. \quad (2)$$

Этот интеграл можно представить суммой интегралов:

$$\bar{M}_1 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r [J_o H_{r0}] dr d\varphi dz, \quad (3)$$

$$\bar{M}_2 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r [j_z(r) h_r(r) \sin(\dots) \cdot \cos(\dots)] dr d\varphi dz, \quad (4)$$

$$\bar{M}_3 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r [j_z(r) \sin(\dots) H_{r0}] dr d\varphi dz, \quad (5)$$

$$\bar{M}_4 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot J_o r h_r(r) \cos(\dots) dr d\varphi dz, \quad (6)$$

$$\bar{M}_5 = \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot J_o r \left( \frac{\omega \cdot r^2 j_r(r)}{2\nu} \right) \cos(\dots) dr d\varphi dz, \quad (7)$$

$$\bar{M}_6 = - \iiint_{r,\varphi,z} \mu \cdot r H_{2z0} j_r(r) \cos(\dots) dr d\varphi dz \quad (8)$$

ИЛИ

$$\bar{M}_1 = \mu \cdot J_o H_{r0} \iiint_{r,\varphi,z} r dr d\varphi dz = \mu \cdot J_o H_{r0} \pi R^2 L, \quad (9)$$

$$\overline{M}_2 = \mu \cdot \left( \int_r M_{2r}(r) dr \right) M_{S2}, \quad (10)$$

$$\overline{M}_3 = \mu \cdot H_{r0} \left( \int_r M_{3r}(r) dr \right) M_{S3}, \quad (11)$$

$$\overline{M}_4 = \mu \cdot J_o \left( \int_r M_{4r}(r) dr \right) M_{S4}, \quad (12)$$

$$\overline{M}_5 = \frac{\mu \cdot \omega}{2\nu} J_o \left( \int_r M_{5r}(r) dr \right) M_{S4}, \quad (13)$$

$$\overline{M}_6 = -\mu \cdot H_{2z0} \left( \int_r M_{6r}(r) dr \right) M_{S4}. \quad (14)$$

где

$$M_{S2} = \left( \iint_{\varphi, z} [\sin(\dots) \cdot \cos(\dots)] d\varphi dz \right), \quad (15)$$

$$M_{S3}(r) = \left( \iint_{\varphi, z} \sin(\dots) d\varphi dz \right), \quad (16)$$

$$M_{S4} = \left( \iint_{\varphi, z} \cos(\dots) d\varphi dz \right), \quad (17)$$

$$M_{2r}(r) = r \cdot j_z(r) h_r(r), \quad (18)$$

$$M_{3r}(r) = r \cdot j_z(r), \quad (19)$$

$$M_{4r}(r) = r \cdot h_r(r), \quad (20)$$

$$M_{5r}(r) = r^3 j_r(r), \quad (21)$$

$$M_{6r}(r) = r \cdot j_r(r). \quad (22)$$

В интегралы (10-14) входят функции,  $h_r(r), j_r(r), j_z(r), f(r) = [j_z(r)h_r(r)]$ , (18-22).

Важно отметить следующее. В обычном двигателе Мильроя отсутствуют напряженности  $H_{r0}, H_{2z0}$ . При этом слагаемые (9, 11, 14) равны нулю, т.е. в обычном двигателе Мильроя вращающий момент

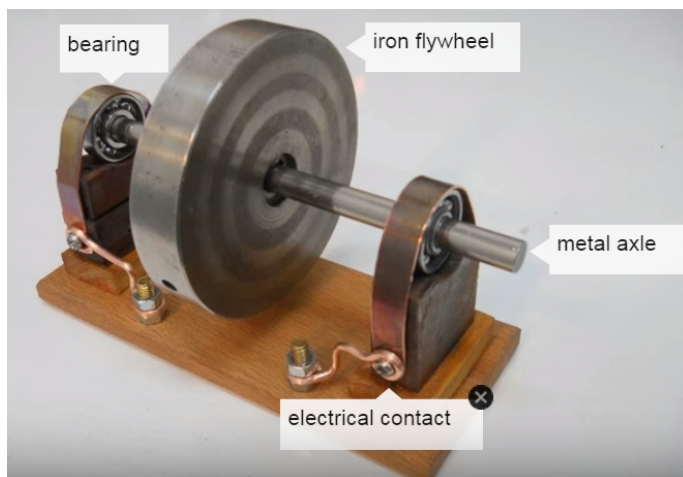
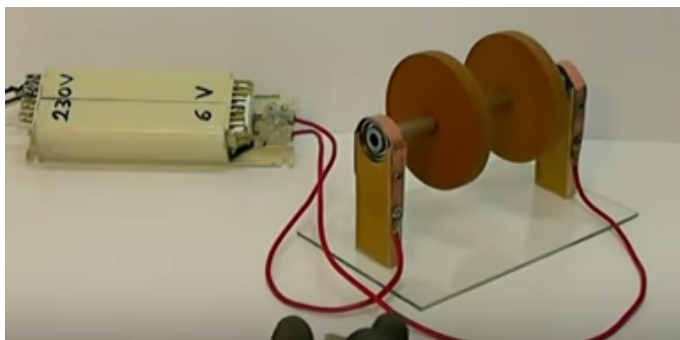
$$\overline{M} = \overline{M}_2 + \overline{M}_4 + \overline{M}_5. \quad (23)$$

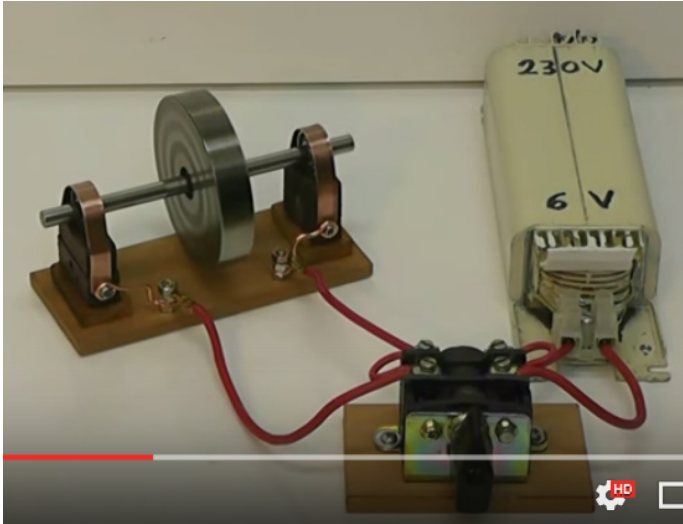
При  $\omega = 0$  остается только вращающий момент

$$\overline{M} = \overline{M}_2 + \overline{M}_4, \quad (24)$$

Этот момент является пусковым в обычном двигателе Мильроя и величина его незначительна. Однако при  $H_{ro} \neq 0$  и\или  $H_{2zo} \neq 0$  вращающий момент существует даже при  $\omega = 0$ . Следовательно, при  $H_{ro} \neq 0$  и\или  $H_{2zo} \neq 0$  существует значительный пусковой момент.

### Фотографии







## Глава 5с. Магнетосопротивление

---

Известен магниторезистивный эффект, заключающийся в том, что электрическое сопротивление материала зависит от магнитной индукции магнитного поля, в котором находится материал, т.н. магнетосопротивление [114]. Ниже мы рассмотрим проводник с постоянным током в магнитном поле и покажем, что существование магнетосопротивления непосредственно следует из решения уравнений Максвелла.

В главе 5 рассматривалось решение уравнений Максвелла для провода с постоянным током. Там показано, что в проводе с постоянным током плотность магнитной силы Лоренца, действующей вдоль оси провода, пропорциональна вектору Пойнтинга – плотности потока энергии. Эта сила движет электрические заряды. Именно эта сила преодолевает сопротивление материала провода движению зарядов.

В главе 5а приведен расчет этой силы. Показано, что она зависит также от напряженности внешнего магнитного поля. Следовательно, воздействие внешнего магнитного поля проявляется как изменение сопротивления провода.

# Глава 6. Излучение и передача энергии по одному проводу

## Оглавление

1. Излучение провода \ 1
2. Однопроводная передача энергии \ 3
3. Обсуждение экспериментов \ 6

### 1. Излучение провода

Рассмотрим снова (как в главе 2) низкоомный провод переменного тока. Несмотря на отсутствие тепловых потерь, в нем есть потери на излучение. Излучает боковая поверхность провода. Вектор плотности потока энергии излучения направлен по радиусу провода и имеет величину  $S_r$  - см. (2.4.4-2.4.6) в главе 2. Итак,

$$\overline{S_r} = \eta \iint_{r,\varphi} [s_r \cdot si^2] dr \cdot d\varphi, \quad (1)$$

где

$$s_r = (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \quad (2)$$

или, с учетом формул, приведенных в табл. 1 главы 2,

$$s_r = -e_z(R)h_\varphi(R) = -\frac{2\chi R}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_\varphi^2(R) = -\frac{2A^2\chi R}{\alpha} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} R^{2\alpha-2}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус провода. Будем учитывать еще формулу (см. (32) в приложении 1 главы 2)

$$\chi = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \text{ или } \chi = \text{sign}(\chi) \cdot \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ где } \text{sign}(\chi) = \pm 1. \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$s_r = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1}, \quad (5)$$

Из (1, 5) получаем:

$$\overline{S_r} = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1} \eta \int_\varphi si^2 d\varphi = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{2A^2\omega\varepsilon}{\alpha c} R^{2\alpha-1} \eta \pi.$$

Учитывая еще (1.4.2), окончательно получаем:

$$\overline{S}_r = -\text{sign}(\chi) \cdot \frac{A^2 \omega \varepsilon}{2\alpha} R^{2\alpha-1}. \quad (6)$$

Очевидно, эта величина должна быть положительной, поскольку излучение существует. Кстати говоря, этот факт служит опровержением известной теории о том, что поток энергии распространяется вне провода и входит в провод из-вне.

Поскольку величина (6) положительна, то должно выполняться условие

$$-\text{sign}(\chi) \cdot \text{sign}(\alpha) = 1, \quad (7)$$

т.е. знаки величин  $\chi$ ,  $\alpha$  должны быть противоположны. В связи с этим в дальнейшем будем пользоваться формулой вида

$$\overline{S}_r = \frac{A^2 \omega \varepsilon}{2|\alpha|} R^{2\alpha-1}. \quad (8)$$

Эта формула определяет величину потока энергии, излучаемой проводом единичной длины. Сопоставим эту формулу с формулой (2.4.15) плотности потока энергии вдоль провода:

$$\overline{S}_z = \frac{A^2 c \sqrt{\varepsilon/\mu} (1 - \cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha-1)} R^{2\alpha-1}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{\overline{S}_r}{\overline{S}_z} = \frac{4\pi(2\alpha-1)\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{c \cdot (1 - \cos(4\alpha\pi))}. \quad (10)$$

Таким образом, провод излучает часть продольного потока энергии, равную

$$\overline{S}_r = \zeta \cdot \overline{S}_z. \quad (11)$$

Пусть в начале провода поток энергии равен  $\overline{S}_{z0}$ . Поток энергии, который излучает провод на длине  $L$ , может быть найден по следующей формуле:

$$\overline{S}_{rL} = \overline{S}_{z0} (1 - \zeta)^L. \quad (12)$$

При этом оставшийся в проводе поток энергии

$$\overline{S}_{zL} = \overline{S}_{z0} - \overline{S}_{rL} = \overline{S}_{z0} (1 - (1 - \zeta)^L). \quad (13)$$

Отсюда можно найти длину провода, на которой сохранился поток

$$\overline{S}_{zL} = \beta \cdot \overline{S}_{z0}. \quad (14)$$

Эта длина определяется из выражения

$$\beta = (1 - (1 - \zeta)^L),$$

т.е.

$$L = \ln(1 - \beta) / \ln(1 - \zeta). \quad (15)$$

**Пример 1.** При  $\alpha = 1.2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  имеем:  $\zeta \approx 10\omega/c$ . Если  $\omega = 3 \cdot 10^3$ . Тогда  $\zeta \approx 3 \cdot 10 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^{10} = 10^{-6}$ . Длина провода, в конце которого сохранился 1% первоначального потока,

$$L = \ln(1 - 0.01) / \ln(1 - \zeta) \approx 9950 \text{ см.}$$

## 2. Однопроводная передача энергии

Существует ряд экспериментов, которые, без сомнения, демонстрируют передачу энергии по одному проводу.

1. В [29] анализируется передающая антенна «длинный провод», которая используется в радиолюбительской коротковолновой связи. Автор отмечает, эта антенна имеет "удовлетворительную круговую диаграмму направленности, дающую возможность устанавливать связь почти во всех направлениях", а в направлении оси провода "достигается значительное усиление, которое увеличивается по мере увеличения длины антенны... С увеличением длины антенны направление основного лепестка диаграммы направленности все больше и больше приближается к оси антенны. Одновременно увеличивается и интенсивность излучения в направлении основного лепестка." Из того факта, что длинный провод излучает во всех направлениях, и из предыдущего раздела следует, что вдоль провода распространяется поток энергии. Этот поток достигает конца провода, где он переходит в излучение, направленное вдоль оси провода. Важно отметить, что поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода.

2. Известен давний эксперимент С.В. Авраменко по однопроводной передаче электроэнергии – так называемая вилка Авраменко. Она впервые описана в [30], а затем в [31] – см. рис. 1. Сообщалось [30], что в экспериментальную установку входил машинный генератор 2 мощностью до 100 кВт, генерирующий напряжение с частотой 8 кГц, подаваемое на трансформатор Тесла. Один конец вторичной обмотки был свободен. Ко второму концу была подсоединена собственно “вилка Авраменко”. Вилка Авраменко представляла собой замкнутый контур, содержащий два последовательно соединенных диода 3 и 4, у которых общая точка подсоединялась к проводу 1, и нагрузку, параллельно которой был включен конденсатор 5. Нагрузкой (в первом варианте) служили несколько лампочек накаливания – сопротивление 6 или (во втором варианте) разрядник 7. По этой разомкнутой цепи Авраменко смог

передать от генератора к нагрузке электрическую мощность порядка 1300 Вт. Электрические лампочки ярко светились. Ток в проводе имел очень малую величину, а тонкий вольфрамовый провод в линии 1 даже не грелся. Именно это обстоятельство послужило главной причиной трудности объяснения результатов эксперимента Авраменко.

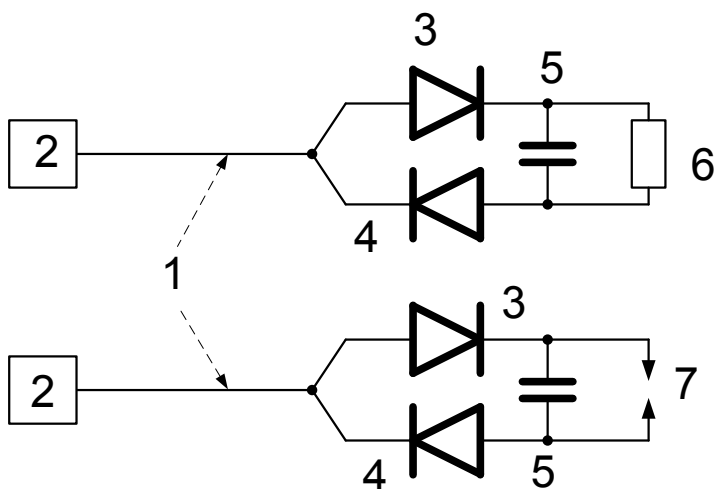


Рис. 1.

Эта конструкция демонстрирует, с одной стороны, весьма привлекательный способ передачи электроэнергии, но, с другой стороны, - кажущееся нарушение законов электротехники. С тех пор многие авторы экспериментировали с этой конструкцией и предлагали теории, объясняющие наблюдаемые феномены – см., например, [32-34]. Однако пока не найдена общепринятая теория. Здесь также поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода.

3. В этот же перечень следует включить лазерный луч. Очевидно, что лазер передает поток энергии в лазерный луч. Эта энергия может быть весьма значительной, передается по лазерному лучу практически без потерь и преобразуется в тепловую энергию на выходе из луча.

4. Известны эксперименты Косинова [35], в которых демонстрировалось свечение перегоревших ламп накаливания. Отмечалось, что "чаще всего лампы накаливания перегорали в двух и более местах, причем перегорала не только спираль, но и токоподводящие проводники внутри лампы. При этом после первого разрыва цепи лампы продолжали некоторое время светить даже более ярко, чем до перегорания.

*Лампа светилась до тех пор, пока не перегорал другой участок цепи. Внутренняя цепь одной лампы в нашем эксперименте перегорела в четырех местах! При этом спираль перегорела в двух местах и, кроме спирали, перегорели оба подводящих электрода внутри лампы. Лампа погасла только после перегорания четвертого участка цепи – электрода, на котором закреплена спираль.*" Здесь также поток энергии существует без внешнего электрического напряжения на концах провода. Важно отметить еще, что лампа после перегорания потребляет еще больше энергии, и этой энергии достаточно для перегорания следующего участка спирали.

5. Известен эксперимент заряда конденсатора через вилку Авраменко [66]. В этом эксперименте используется схема, показанная на рис. 1 сверху, но отсутствует резистор б. Автор эксперимента отмечает, что заряд конденсатора от нуля через вилку Авраменко идёт медленно (3 вольта за 2 часа), но быстрее, чем без этой вилки (заряд без вилки – это заряд конденсатора вместе с емкостью между землей и одной из обкладок конденсатора). Увеличение длины провода до 30м не влияет на результат. Этот эксперимент свидетельствует о том, что постоянный ток заряда идет по одному проводу.

Рассматривая уравнения электромагнитной волны в проводе, невозможно выявить физическую причину существования волны: любая компонента напряженности, тока и плотности потока энергии могут рассматриваться, как внешние воздействия, от которых зависят все остальные. Принято считать, что внешним воздействием является продольная электрическая напряженность. Указанные выше факты свидетельствуют о том, что могут быть исключения – внешним воздействием является поток энергии на входе провода. В [19, 17] показано, что поток энергии может рассматриваться как четвертая электромагнитная индукция.

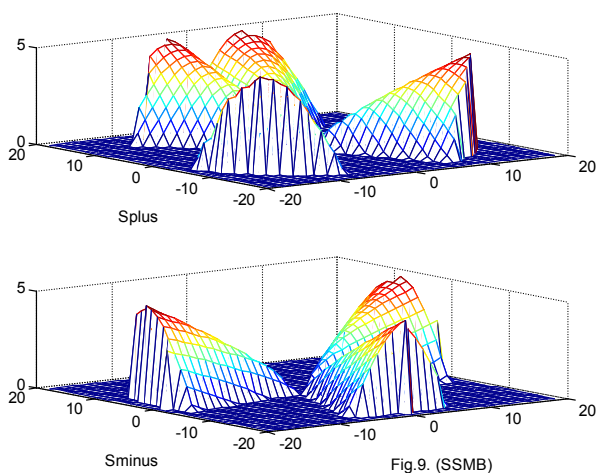
Итак, входной поток энергии распространяется по проводу и может (практически, без потерь - см. выше п.п. 2, 3, 4) достигать другого конца провода. Вместе с потоком энергии может распространяться ток. Но такая взаимосвязь может и отсутствовать (см. выше п.п. 2, 3). Важно отметить, что выходной поток энергии может быть значительным и использоваться в нагрузке. Отсутствие взаимосвязи между потоком энергии и током уже обсуждалось и обосновывалось в разделе 2.5.

### 3. Обсуждение экспериментов

Вернемся снова к антенне «длинный провод». Она излучает во все стороны. Как следует и раздела 1, излучаемый поток энергии  $\overline{S}_r$  является частью продольного потока энергии  $\overline{S}_z$  – см. (1.11). Коэффициент пропорциональности  $\zeta$  между ними, в свою очередь, зависит от частоты  $\omega$  – см. пример 1. Следовательно, при уменьшении частоты  $\omega$  излучаемый поток энергии  $\overline{S}_r$  уменьшается.

В разделе 2.5 рассматривались и сопоставлялись токи и потоки энергии в проводе. Показывалось, что, как правило, в проводе существуют токи и потоки энергии, разделенные на противоположно направленные "струи". Это соответствует существованию потоков активной и реактивной энергий.

Можно предположить, что в "длинном проводе" образуются такие "струи". Если "длинный провод" излучает всю поступающую в него энергию, то превалирует один из этих потоков (поток активной мощности) и генератор расходует энергию на его поддержание. Если "длинный провод" НЕ излучает, то поток энергии проходит в одном направлении и возвращается в другом – генератор НЕ расходует энергию (циркулирует поток реактивной мощности), а ток в проводе отсутствует. Существуют, естественно, и промежуточные случаи, когда "длинный провод" излучает не всю поступающую в него энергию.



Существуют и такие сочетания параметров, при которых суммарные токи противоположно направленных "струй" равны по абсолютной величине и, одновременно с этим, суммарные потоки энергии противоположно направленных "струй" также равны по абсолютной величине. Выше (для удобства читателя) повторен рис. 9 из главы 4. На нем изображены функции противоположно направленных струй:

$S_{plus}$  - струя потока энергии, направленная от источника энергии,

$S_{minus}$  - струя потока энергии, направленная к источнику энергии,

Графики функций для наглядности показаны с обратным знаком. Здесь соблюдаются следующие соотношения между интегралами по площади сечения  $Q$  провода:

$$\int_Q S_{plus} \cdot dQ = - \int_Q S_{minus} \cdot dQ,$$

$$\int_Q J_{plus} \cdot dQ = - \int_Q J_{minus} \cdot dQ.$$

Возможен, как следует из экспериментов (рассмотренных выше) случай, когда токи и потоки замыкаются на обрыве провода – см. рис. 3, где 1 – провод, 2 – прямая "струя", 3 – обратная "струя", 4 – ток замыкания. В этом случае прежде всего возникает вопрос о природе э.д.с., заставляющей ток преодолевать искровой промежуток. В [19, 17] показано, что поток энергии может рассматриваться как четвертая электромагнитная индукция.

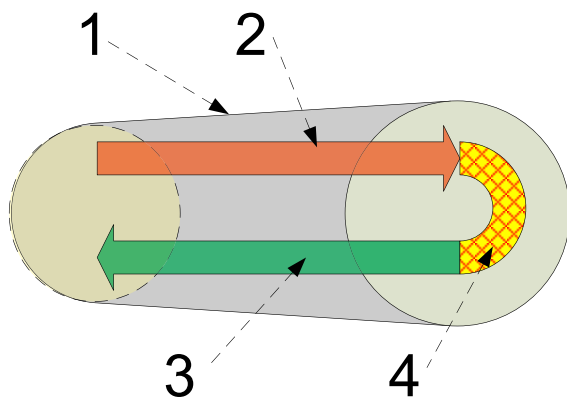


Рис. 3.



Яркие эксперименты Косинова [35] явным образом подтверждают предложенную гипотезу: дуга, возникающая на обрыве спирали, должна иметь начало и конец. Между ними должна быть приложена э.д.с. Когда дуга, расширяясь, достигает следующего участка спирали, этот участок вместе с соединяющей дугой включается в длинную линию и т.д. Косинов наблюдал 8 таких участков

Вилка Авраменко представляет собой контур, содержащий два последовательно соединенных диода и нагрузку – см. рис. 1. Этот контур создает ту дугу, которая изображена на рис. 3. Нагрузкой может быть воздушный промежуток разрядника 7, что эквивалентно дуге в экспериментах Косинова. Нагрузкой может быть резистор 6 - приемник энергии в системе однопроводной передачи энергии. Провод 1 в этой конструкции можно отождествить с "длинным проводом". В данном случае (при низкой частоте 8 кГц) провод 1 не излучает. Следовательно, в нем существуют два противоположно направленных потока энергии и отсутствует ток.

Таким образом, передача энергии по одному проводу не противоречит уравнениям Максвелла, а, напротив, следует из них.

# Глава 7. Решение уравнений Максвелла для конденсатора в цепи постоянного тока. Природа потенциальной энергии конденсатора.

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Решение уравнений Максвелла \ 2
3. Напряженности и потоки энергии \ 6
4. Разряд конденсатора \ 9
5. Обсуждение \ 10

## 1. Введение

В главе 2 рассматривается электромагнитное поле конденсатора в цепи переменного тока. Здесь рассматривается электромагнитное поле в заряжаемом конденсаторе и то поле, которое продолжает существовать в заряженном конденсаторе.

Здесь рассматриваются уравнения Максвелла в системе СГС следующего вида с отличными от единицы величинами  $\varepsilon$ ,  $\mu$ :

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div}(E) = Q(t), \quad (c)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (d)$$

где

$H$ ,  $E$  - ток, магнитная и электрическая напряженности  
соответственно,

$\varepsilon$ ,  $\mu$  - диэлектрическая проницаемость, магнитная  
проницаемость,

$Q(t)$  - заряд на обкладке конденсатора, который появляется и возрастает в процессе заряда.

Эта система уравнений в частных производных имеет решение, которое является суммой частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы уравнений. Однородная система имеет вид

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (4)$$

т.е. отличается от системы (а-d) только отсутствием члена  $Q(t)$ . Частное решение при данном  $t$  является решением, связывающем электрическую напряженность  $E_z(t)$  в зазоре конденсатора и заряд  $Q(t)$ . Если  $E_z(t)$  меняется во времени, то должно существовать решение системы уравнений (1-4) при данном  $E_z(t)$ . Именно это решение мы будем искать далее.

Показывается, что в заряжаемом конденсаторе распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла (1-4). Показывается, что в заряженном конденсаторе существует стационарный поток электромагнитной энергии, а та энергия, которая содержится в конденсаторе и которую принято считать электрической потенциальной энергией, является электромагнитной энергией, хранящейся в конденсаторе в виде стационарного потока.

## **2. Решение системы уравнений**

Снова рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4). В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v \frac{dH_r}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v \frac{dH_\varphi}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v \frac{dH_z}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q \frac{dE_r}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q \frac{dE_\varphi}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = q \frac{dE_z}{dt} \quad (8)$$

где

$$v = -\mu/c, \quad (9)$$

$$q = \varepsilon/c, \quad (10)$$

- электрические напряженности  $E_r, E_\varphi, E_z,$
- магнитные напряженности  $H_r, H_\varphi, H_z.$

Решение должно быть найдено при ненулевой напряженности  $E_z.$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z), \quad (12)$$

где  $\alpha, \chi, \omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r) co \cdot (\exp(\omega t) - 1), \quad (13)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) si \cdot (\exp(\omega t) - 1), \quad (14)$$

$$H_z = h_z(r) si \cdot (\exp(\omega t) - 1), \quad (15)$$

$$E_r = e_r(r) si \cdot (1 - \exp(\omega t)), \quad (16)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r) co \cdot (1 - \exp(\omega t)), \quad (17)$$

$$E_z = e_z(r) co \cdot (1 - \exp(\omega t)), \quad (18)$$

где  $h(r), e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ . При этом ток смещения

$$J_z = \frac{d}{dt} E_z = -\omega \cdot e_z(r) c_0 \cdot \exp(\omega t) \quad (19)$$

На рис. 1 показаны эти переменные, как функции времени, и их производные по времени при  $\omega = -300$ :  $H_z$  - сплошные линии,  $E_z$  - пунктирные линии,  $J_z$  - точечная линия. Можно убедиться, что в системе уравнений (1-8) амплитуды всех напряженностей при  $t \Rightarrow \infty$  одновременно стремятся к постоянному значению, а амплитуда тока стремится к нулю. Это соответствует заряду конденсатора через постоянное сопротивление.

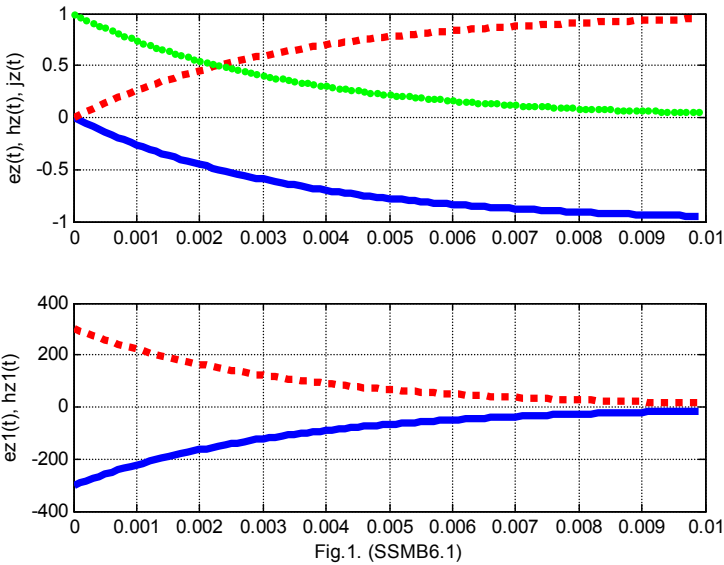


Fig.1. (SSMB6.1)

После заряда конденсатора ток прекращается. Однако, как показывается ниже, стационарный поток электромагнитной энергии сохраняется.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-18) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами  $r, \varphi, z, t$  в систему уравнений с одним аргументом  $r$  и неизвестными функциями  $h(r), e(r)$ .

Эта система уравнений имеет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (21)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi - \frac{\mu \omega}{c} h_r = 0, \quad (22)$$

$$e_r(r)\chi - e'_z(r) + \frac{\mu\omega}{c}h_\varphi = 0, \quad (23)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\mu\omega}{c}h_z = 0, \quad (24)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r)\alpha - h_\varphi(r)\chi - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_r = 0, \quad (26)$$

$$-h_r(r)\chi - h'_z(r) + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_z(r) = 0. \quad (28)$$

Она полностью совпадает с аналогичной системой уравнений для конденсатора в цепи переменного тока – см. главу 2. Решение этой системы также полностью совпадает с полученным в главе 2 и имеет следующий вид:

$$e_\varphi(r) = \text{kh}(\alpha, \chi, r), \quad (30)$$

$$e_r(r) = \frac{1}{\alpha} (e_\varphi(r) + r \cdot e'_\varphi(r)), \quad (31)$$

$$e_z(r) = r \cdot e_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}, \quad (32)$$

$$h_\varphi(r) = -\frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) \frac{1}{\chi}, \quad (33)$$

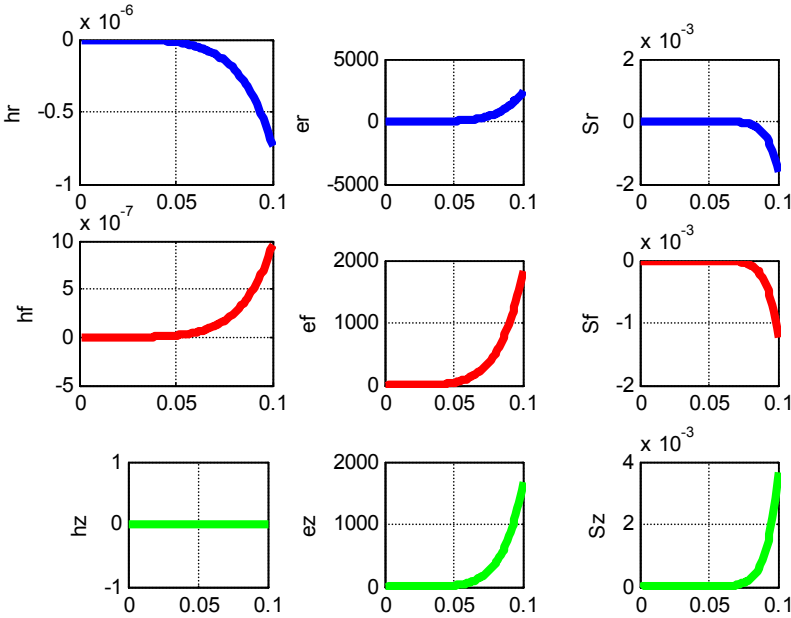
$$h_r(r) = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) \frac{1}{\chi}, \quad (34)$$

$$h_z(r) \equiv 0. \quad (35)$$

где  $\text{kh}()$  – функция, определенная в главе 2,

$$q = \left( \chi - \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2} \right). \quad (36)$$

Таким образом, решение уравнений Максвелла для заряжаемого конденсатора и для конденсатора в цепи синусоидального тока отличаются только тем, что в первом случае присутствуют экспоненциальные функции времени, а во втором – синусоидальные.



### 3. Напряженности и потоки энергии

Также, как и в главе 2, плотности потоков энергии по координатам определяются по формуле

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z), \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \\ \eta &= c/4\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\eta = c/4\pi. \quad (3)$$

Рассмотрим функции (2) и  $e_r(r)$ ,  $e_\varphi(r)$ ,  $e_z(r)$ ,  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ . На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при  $A=1$ ,  $\alpha=5.5$ ,  $\mu=1$ ,  $\varepsilon=2$ ,  $\chi=50$ ,  $\omega=300$ .

Условия этого примера отличаются от условий аналогичного примера в главе 2 для конденсатора в цепи переменного тока только

значением параметра  $\omega = -300$  (в главе 2  $\omega = 300$ ). Видно, что эти функции отличаются только знаками.

Еще раз надо подчеркнуть, что эти функции не равны нулю в любой момент времени, т.е. после заряда конденсатора электрические и магнитные напряженности остаются, принимая стационарное, но отличное от нуля значение. Постоянно равна нулю только магнитная напряженность  $H_z(r) \equiv 0$ , а после заряда конденсатора прекращается ток смещения.

Остается также стационарный поток электромагнитной энергии. Существование стационарного потока не противоречит существующим физическим представлениям [3]. Существование такого потока в статической системе рассматривает Фейнман в [13]. Он приводит пример потока энергии в системе, содержащей только электрический заряд и постоянный магнит, покоящиеся рядом.

Существуют и другие эксперименты, демонстрирующие тот же эффект [38]. На рис. 2 показан электромагнит, сохраняющий силу притяжения после отключения тока. Предполагают, что такими электромагнитами пользовался Эд Леедскалнин при строительстве знаменитого Коралового замка – см. рис. 3 [38]. В таких конструкциях в момент отключения ток электромагнитная энергия имеет некоторое значение. Эта энергия может рассеяться путем излучения и тепловых потерь. Однако, если эти факторы не существенны (по крайней мере, в начальный период) электромагнитная энергия должна сохраняться. При наличии электромагнитных колебаний должен возникнуть и распространяться поток электромагнитной энергии ВНУТРИ конструкции. Прерывание этого потока может быть достигнуто разрушением конструкции. При этом в силу закона сохранения энергии должна быть совершена работа, эквивалентная той электромагнитной энергии, которая исчезает при разрушении конструкции. Это означает, что "разрушителю" нужно преодолеть некоторую силу. Именно это и демонстрируется в указанных экспериментах. В [39] рассматриваются математические модели таких конструкций, построенные на основе уравнений Максвелла. Выявляются условия, при соблюдении которых поток электромагнитной энергии сохраняется сколь угодно долго.





Рис. 2.



Рис. 3.

Итак, в конденсаторе формируется стационарный поток электромагнитной энергии. Рассмотрим подробнее структуру этого потока. Из (2.11, 2.12, 3.1) следует, что в каждой точке диэлектрика проекции потоков энергии определяются по формуле:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_r \cdot \sin^2(\alpha\varphi + \chi z) \\ s_\varphi \cdot 0.5 \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) \\ s_z \cdot 0.5 \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

где, как следует из (2.30-2.35, 3.2),

$$\begin{aligned} s_r &= (-e_z h_\varphi) = \frac{q}{\alpha} \frac{\varepsilon \omega}{\chi c} r \cdot e_\varphi(r) \cdot e_r(r) \\ s_\varphi &= (e_z h_r) = \frac{q}{\alpha} \frac{\varepsilon \omega}{\chi c} r \cdot e_\varphi^2(r) \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) = -\frac{\varepsilon \omega}{\chi c} (e_r^2(r) + e_\varphi^2(r)) \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим, например, развертку цилиндра с данным радиусом  $r$ . На окружности этого радиуса вектор  $S_r$  направлен всегда в сторону увеличения радиуса и колеблется по величине, как  $\sin^2(\alpha\varphi + \chi z)$ . Суммарный вектор  $(S_\varphi + S_z)$  наклонен к линии радиуса всегда под углом  $arctg(s_z/s_\varphi)$ , а величина этого вектора колеблется как  $\sin(2(\alpha\varphi + \chi z))$ . На рис. 4 показано векторное поле  $(S_\varphi + S_z)$  при  $\alpha = 1.35$ ,  $\chi = 50$ . Здесь горизонталь и вертикаль соответствуют координатам  $\varphi$ ,  $z$ .

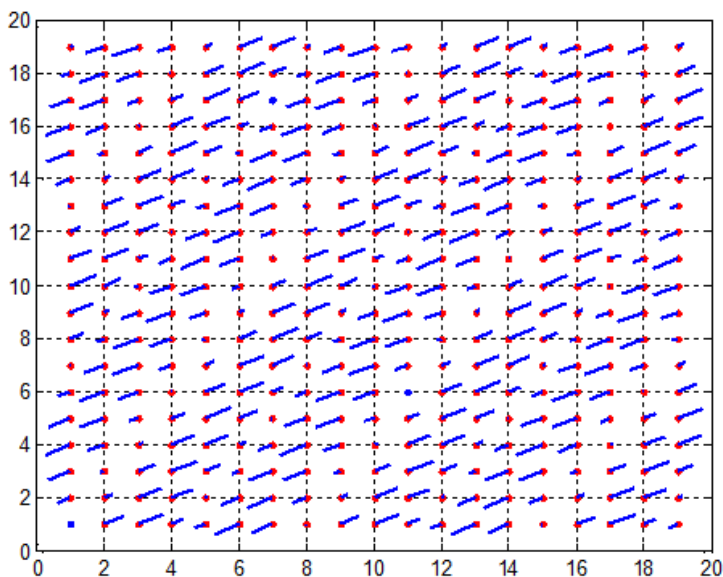


Fig.4. (SSMB.88)

#### 4. Разряд конденсатора

Как и ранее, в главах 1 и 5 рассмотрим скорость движения энергии. Общепринятой является концепция Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $s$  является произведением плотности энергии  $w$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \quad (6)$$

Энергия конденсатора

$$W_e = \frac{CU^2}{2}, \quad (7)$$

а плотность энергии

$$w_e = \frac{W_e}{bd}. \quad (8)$$

где  $U, b, d, C = \varepsilon \cdot b/d$  - напряжение на конденсаторе, площадь пластин, толщина диэлектрика и емкость соответственно.

При разряде конденсатора на резистор  $R$  поток энергии  $S$  в резистор равен выделяемой в резисторе мощности, т.е.

$$S = P = UI = \frac{U^2}{R}. \quad (9)$$

Если конденсатор подключен к нагрузке всей поверхностью пластин, то плотность потока энергии

$$s = \frac{S}{b} = \frac{U^2}{bR}, \quad (10)$$

а мощность источника

$$P = sb. \quad (10a)$$

Тогда скорость движения энергии, определяемая по (8),

$$v_\varphi = \frac{s}{w_e} = \frac{U^2}{bR} \Big/ \frac{W_e}{bd} = \frac{U^2}{bR} \Big/ \frac{CU^2}{2bd} = \frac{2d}{CR}. \quad (11)$$

т.е. эта скорость не зависит от напряжения! Она может иметь значение, существенно меньшее скорости света.

### 5. Обсуждение

Показано, что в заряжаемом конденсаторе распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решение уравнений Максвелла. При этом в теле диэлектрика (т.е. там, где существует напряженность  $e_z$ ) существуют электрические и магнитные напряженности. Существуют также

- круговой поток энергии  $S_\varphi$ , меняющий знак в зависимости от  $\varphi$ ,
- вертикальный поток энергии  $S_z$ , меняющий знак в зависимости от  $\varphi$ ,
- радиальный поток энергии  $S_r$ , всегда направленный от центра; это означает, что заряженный конденсатор излучает через боковую поверхность.

Поток энергии продолжает существовать и в заряженном конденсаторе как стационарный поток электромагнитной энергии. Именно в этом потоке циркулирует электромагнитная энергия, запасенная в конденсаторе. Следовательно, та энергия, которая содержится в конденсаторе и которую принято считать электрической потенциальной энергией, является электромагнитной энергией, хранящейся в конденсаторе в виде стационарного потока.

Известны эксперименты по обнаружению магнитного поля между обкладками заряженного конденсатора с помощью компаса [49, 50]. В соответствии с изложенным в круглом конденсаторе должно наблюдаться только расположение стрелки компаса перпендикулярно радиусу круглого конденсатора. Наблюдаемое отклонение стрелки от оси конденсатора можно объяснить неравномерностью распределения заряда по квадратной пластине.

# Глава 7а. Решение уравнений Максвелла для окрестности торца магнита

## Оглавление

1. Математическая модель \ 1
2. Эксперименты по обнаружению момента импульса в магните \ 3
3. О скорости размагничивания магнитов \ 7

### 1. Математическая модель

Выше был рассмотрен заряженный конденсатор, между обкладками которого существует электрическая напряженность.

Рассмотрим теперь зазор в кольцевом магните. Между плоскостями, ограничивающими этот зазор, существует магнитная напряженность.

В силу симметрии уравнений Максвелла в "зазоре" такого магнита должно существовать электромагнитное поле, аналогичное полю в зазоре заряженного конденсатора. Отличие между этими полями заключается в том, что в уравнениях поля электрические и магнитные напряженности меняются местами. В частности, в заряженном круглом конденсаторе существует электрическая напряженность ( $E_z \neq 0$ ) и отсутствует магнитная напряженность ( $H_z = 0$ ). В незаряженном круглом конденсаторе с магнитом существует магнитная напряженность ( $H_z \neq 0$ ) и отсутствует электрическая напряженность ( $E_z = 0$ ).

По аналогии с (7.2.30-7.2.35) получаем:

$$h_\varphi(r) = kh(\alpha, \chi, r), \quad (1)$$

$$h_r(r) = \frac{1}{\alpha} (h_\varphi(r) + r \cdot h'_\varphi(r)), \quad (2)$$

$$h_z(r) = r \cdot h_\varphi(r) \frac{q}{\alpha}, \quad (3)$$

$$e_{\varphi}(r) = -\frac{\mu\omega}{c} h_r(r) \frac{1}{\chi}, \quad (4)$$

$$e_r(r) = \frac{\mu\omega}{c} h_{\varphi}(r) \frac{1}{\chi}, \quad (5)$$

$$e_z(r) \equiv 0. \quad (6)$$

Здесь, также, как и в конденсаторе, величина  $\omega$  входит в показатель степени экспоненты  $\exp(\omega t)$ , характеризующей процесс намагничивания постоянного магнита в процессе его образования ("зарядки" – по аналогии с конденсатором)

Таким образом, в зазоре нашего магнита (т.е. там, где существует напряженность  $h_z$ ) существуют электрические и магнитные напряженности.

При существовании этих напряженностей в зазоре нашего магнита формируется стационарный поток электромагнитной энергии. Напомним формулу (7.3.4), которая в данном случае определяет проекции потоков энергии определяются по формуле:

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_{\varphi} \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_{\varphi} \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_r \cdot \sin^2(\alpha\varphi + \chi z) \\ s_{\varphi} \cdot 0.5 \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) \\ s_z \cdot 0.5 \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

где, как следует из (1-6, 7.3.2),

$$\begin{aligned} s_r &= (h_z e_{\varphi}) = \frac{q}{\alpha} \frac{\mu\omega}{\chi c} r \cdot h_{\varphi}(r) \cdot h_r(r) \\ s_{\varphi} &= (-e_r h_z) = \frac{q}{\alpha} \frac{\mu\omega}{\chi c} r \cdot h_{\varphi}^2(r) \\ s_z &= (e_r h_{\varphi} - e_{\varphi} h_r) = -\frac{\mu\omega}{\chi c} (h_r^2(r) + h_{\varphi}^2(r)) \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, что существуют

- круговой поток энергии  $S_{\varphi}$ , меняющий знак в зависимости от  $\varphi$ ,
- вертикальный поток энергии  $S_z$ , меняющий знак в зависимости от  $\varphi$ ,
- радиальный поток энергии  $S_r$ , всегда направленный от центра.

Как показано в разделе 1.5, вместе с такими потоками энергии в электромагнитной волне существуют также импульсы, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси.

Существуют также моменты импульса относительно любого радиуса, любой окружности и относительно оси.

Очевидно, все эти выводы не зависят от длины зазора. Следовательно, можно утверждать, что

| потоки энергии, импульсы и моменты импульсов существуют в окрестности торца магнита.

Как показано в (1.5.6), момент импульса относительно оси магнита в данной точке "зазора"  $(r, \varphi, z)$

$$L_z(r, \varphi, z) = S_z r / c \quad (9)$$

или, с учетом (7, 8),

$$\begin{aligned} L_z(r, \varphi, z) &= S_z \frac{r}{c} = \frac{r s_z}{2c} \cdot \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) = \\ &= -\frac{\mu\omega r}{2\chi c^2} (h_r^2(r) + h_\varphi^2(r)) \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) \end{aligned} \quad (10)$$

где  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$  определяются по (1, 2). Суммарный момент импульса на всей окружности данного радиуса и на данном расстоянии от торца

$$L_{zr} = \int_0^{2\pi} L_z(r, \varphi, z) d\varphi = -\frac{\mu\omega r}{2\chi c^2} (h_r^2(r) + h_\varphi^2(r)) \int_0^{2\pi} \sin(2(\alpha\varphi + \chi z)) d\varphi. \quad (11)$$

Здесь все параметры могут быть найдены в результате экспериментов и в настоящее время неизвестны. Однако можно сказать, что при нецелом  $\alpha$  всегда существует величина  $L_{zr} \neq 0$ .

## 2. Эксперименты по обнаружению момента импульса в магните

Существование момента импульса в магните можно было бы проверить экспериментально. Но у автора нет таких возможностей. Поэтому предлагается рассмотреть эксперименты, которые (**вероятно!**) демонстрируют существование такого момента импульса в магните.

1. Эксперимент, известный по Интернету, показан на рис. 1, где

- М - магнит с индукцией В,
- К - железное кольцо с зазором V (который нужен для того, чтобы при поиске объяснения не предполагать, что по кольцу идет ток),

## Глава 7а. Решение для окрестности торца магнита

---

- N – нить,
- L, D, A, C, d – размеры.

При опускании кольца оно в некотором положении начинает быстро вращаться и вращается некоторое время  $T$ , а затем останавливается и начинает вращаться в противоположную сторону. Это вращение длится в течение времени  $t \ll T$ . Процессы переменного по направлению вращения повторяются 3-5 раз и затихают.

Автор повторил этот эксперимент в следующем виде:

вариант 1:  $B = 1$  Tesla,  $T = 30$  sec,

$(L, D, A, C, d) = (200, 15, 10, 15, d)$  mm;

вариант 2:  $B = 1$  Tesla,  $T = 20$  sec,

$(L, D, A, C, d) = (200, 20, 05, 15, d)$  mm.

Этот эксперимент можно объяснить существованием вращающего момента, который в установившемся режиме уравнивается крутящим моментом нити. Иначе этот эксперимент объясняют изменением крутящего момента нити, когда она натягивается притяжением кольца  $K$  к магниту  $M$ . Такое объяснение кажется неубедительным, когда делаешь этот эксперимент собственными руками.

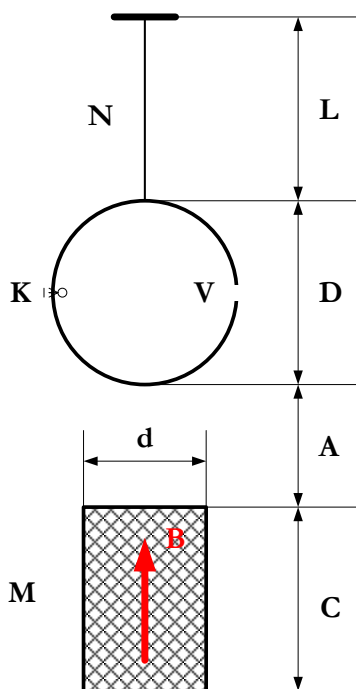


Рис. 1.

2. В Интернете [46] показан другой эксперимент – см. рис. 2, где

- М - магнит,
- К – магнит в виде железного кольца,
- S – деревянный стержень,
- Р - держатель стержня S.

Кольцо К удерживается на некотором расстоянии от торца магнита М и вращается на деревянном стержне S. Идея этого эксперимента может быть использована для строгой экспериментальной проверки существования момента импульса вокруг оси магнита.

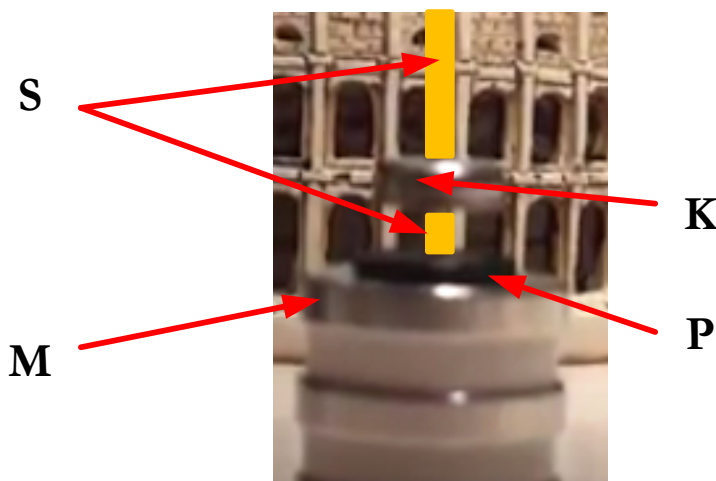


Рис. 2.

3. В Интернете [47] показан еще один эксперимент, который легко повторить. Два кольцевых магнита подвешиваются крючком на длинной нитке – см. рис. 3.1. В первом случае магниты сцепляются плоскостями колец (см. рис. 3.2), а во втором – касаются внешними цилиндрическими поверхностями (см. рис. 3.3). В первом случае конструкция висит спокойно, а во втором – вращается. Поскольку вес конструкции не меняется, то влияние нитки исключено.





Рис. 3.1.



Рис. 3.2.



Рис. 3.3.

4. Известен по интернету также эксперимент, аналогичный эксперименту 3, где нижний кольцевой магнит был заменен на сплошной прямоугольный магнит – см. рис. 4, где использованы обозначения из рис. 1. Конструкция вращалась так же, как и в эксперименте 3 [48]. Объяснением может служить существование момента импульса вокруг оси магнита.

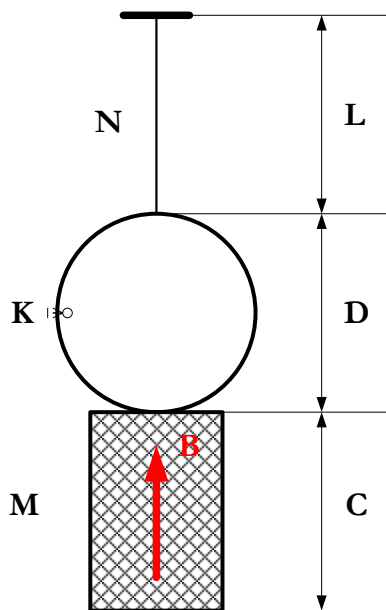


Рис. 4.

Два кольцевых магнита в эксперименте 3 можно рассматривать как две совмещенных конструкции из рис. 4:

- нижнее кольцо в роли магнита для верхнего кольца,
- верхнее кольцо в роли магнита для нижнего кольца,

При этом все 4 эксперимента объясняются существованием момента импульса в магните.

Эксперименты 1,3, 4 можно представить общей схемой – см. рис. 5. Магнит М создает магнитный поток В1, направленный в кольцо К. (Другую часть поток магнита М мы не рассматриваем). Этот поток раздваивается в кольце К на два потока В2. Далее потоки В2 замыкаются потоком В3 внутри кольца и потоком В4 вне кольца. Таким образом,

$$B1=2*B2 - B3, B4=2*B2 - B3, B1=B4,$$

т.е. всегда существует поток  $B3 > 0$ . Этот поток, как показано выше, обладает моментом импульса.

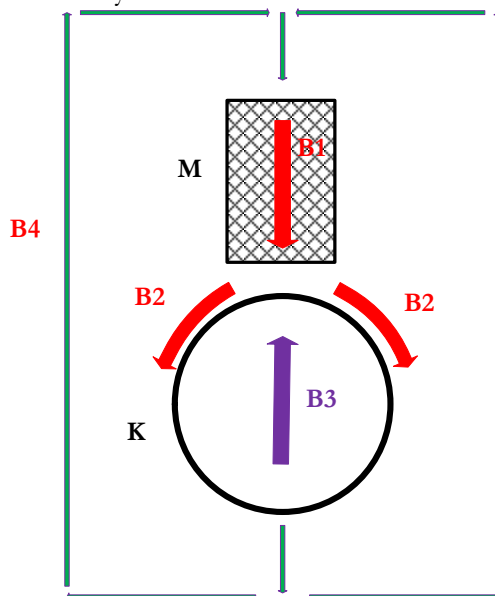


Рис. 5.

### 3. О скорости размагничивания магнитов

Рассмотрим скорость движения энергии из магнита. Так же, как и в главе 1, мы будем использовать концепцию Умова [81], согласно которой плотность потока энергии  $s$  является произведением плотности энергии  $w$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \quad (1)$$

Из [93] рассмотрим, например, зависимость уменьшения индукции с течением времени для сплава ЮНДК25А – см. рис. 1, где показаны функции в зависимости от времени, прошедшего от

## Глава 7а. Решение для окрестности торца магнита

момента намагничивания. Время показано в днях. В окне 1 показана функция индукции  $B(t)$  из [93]. В окне 2 показана функция плотности магнитной энергии

$$W(t) = 10^{-4} (B(t))^2. \quad (1)$$

В окне 3 показана функция, обратная функции (1),

$$B_s(t) = \sqrt{10^4 W_s(t)}, \quad (2)$$

где плотность магнитной энергии  $W_s(t)$  вычисляется с учетом потерь энергии за счет излучения потока энергии со скоростью  $v_\varphi$ :

$$\frac{dW_s(t)}{dt} = -S(t)dt = -\frac{W_s(t)}{v_\varphi} dt. \quad (3)$$

Видно, что при скорости  $v_\varphi = 4 \cdot 10^{-10}$  m/sec функции  $B_s(t)$  и  $B(t)$  совпадают. Эта скорость намного меньше скорости света, что и требовалось показать.

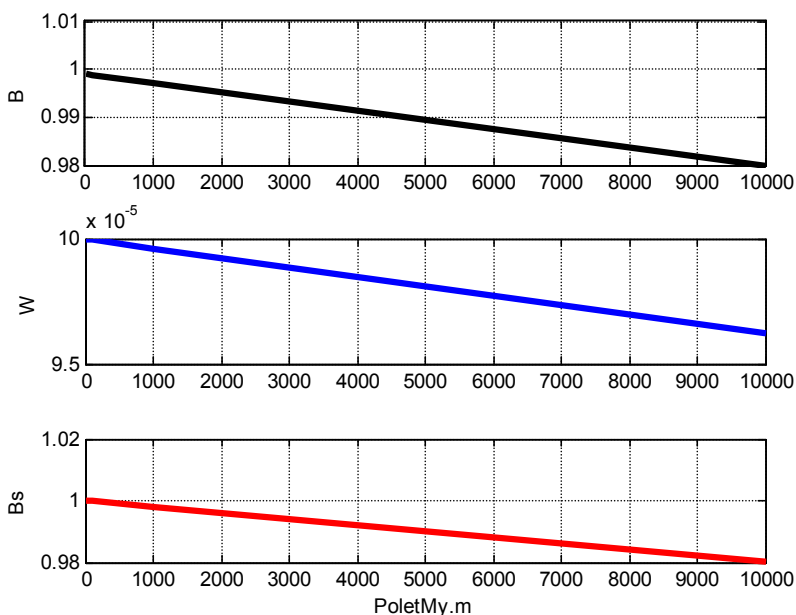


Рис. 1.

# Глава 8. Уравнения Максвелла в сферических координатах

---

## Оглавление

- Первое решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов. \ 1
1. Решение уравнений Максвелла \ 1
  2. Потоки энергии \ 5
  3. Заключение \ 7
- Приложение 1 \ 7
- Таблицы \ 8
- Второе решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах в общем случае. \ 12
1. Введение \ 12
  2. Решение уравнений Максвелла \ 12
  3. Потоки энергии \ 15
  4. Заключение \ 18
- Приложение 1 \ 18
- Таблицы \ 20
- Третье решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах для электропроводной среды. \ 27
1. Приближенное решение \ 27
  2. Точное решение \ 28
- Таблицы \ 28

**Первое решение.** Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов.

## 1. Решение уравнений Максвелла

На рис. 1 показана система сферических координат  $(\rho, \theta, \varphi)$ . В табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора  $\mathbf{E}$  в этих координатах [4]. Здесь и далее

$E$  - напряженность электрического поля,

$H$  - напряженность магнитного поля,

$\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,

$\varepsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов имеют вид, приведенный в табл. 2. Далее мы будем искать решение при  $E_\rho = 0$ ,  $H_\rho = 0$  и в виде функций  $E$ ,  $H$ , представленных в табл. 3, где функцию  $g(\theta)$  и функции вида  $E_{\varphi\rho}(\rho)$  предстоит вычислить. Будем полагать, что напряженности  $E$ ,  $H$  не зависят от аргумента  $\varphi$ . При этих условиях преобразуем табл. 1 в табл. 3а. Далее подставим функции  $E$ ,  $H$  из табл. 3 в табл. 3а. Тогда получим табл. 4.

Подставляя выражения для роторов и дивергенций из табл. 4 в уравнения Максвелла (см. табл. 2), дифференцируя по времени и сокращая общие множители, получаем новую форму уравнений Максвелла – см. табл. 5.

Рассмотрим табл. 5. Из строки 2 следует:

$$\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} = 0, \quad (2)$$

$$\chi H_{\varphi\rho} + \frac{\omega \varepsilon}{c} E_{\theta\rho} = 0. \quad (3)$$

Следовательно,

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (4)$$

$$H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\varepsilon}{\chi c} E_{\theta\rho}, \quad (5)$$

где  $h_{\varphi\rho}$  – некоторая константа. Аналогично, из строк 3, 5, 5 следует соответственно:

$$H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (6)$$

$$H_{\theta\rho} = \frac{\omega\varepsilon}{\chi c} E_{\varphi\rho}, \quad (7)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (8)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} H_{\theta\rho}, \quad (9)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (10)$$

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} H_{\varphi\rho}. \quad (11)$$

Из (5) следует, что

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\chi c}{\omega\varepsilon} H_{\varphi\rho}, \quad (12)$$

а из сравнения (11) и (12) следует, что

$$\frac{\omega\mu}{\chi c} = \frac{\chi c}{\omega\varepsilon}$$

или

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (13)$$

Эта же формула следует из сравнения (7) и (9).

Из (5, 13) следует, что

$$H_{\varphi\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\theta\rho}, \quad (14)$$

а из (14, 4, 11, 12) следует, что

$$h_{\varphi\rho} = -e_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (15)$$

Аналогично, из (7, 13) следует, что

$$H_{\theta\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\varphi\rho}, \quad (16)$$

а из (16, 6, 8, 12) следует, что

$$h_{\theta\rho} = -e_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17) следует, что

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = q, \quad (18)$$

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (19)$$

Далее замечаем, что строки 1, 4, 7 и 8 совпадают, откуда следует, что функция  $g(\theta)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0. \quad (20)$$

В приложении 1 показано, что решением этого уравнения является функция

$$g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|}, \quad (20a)$$

где  $A$  – константа. Заметим, что в известном решении  $g(\theta) = \sin(\theta)$ . Легко убедиться, что такая функция не удовлетворяет уравнению (20). Следовательно,

**в известном решении не выполняются 4 уравнения Максвелла с выражениями  $\operatorname{rot}_\rho(E)$ ,  $\operatorname{rot}_\rho(H)$ ,  $\operatorname{div}(E)$ ,  $\operatorname{div}(H)$ .**

Итак, решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне имеет вид напряженностей, представленных в табл. 3, где

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho} \quad (21)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (\text{см. 13}), \quad g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|} \quad (\text{см. 20a})$$

и константы  $h_{\varphi\rho}$ ,  $h_{\theta\rho}$ ,  $e_{\theta\rho}$ ,  $e_{\varphi\rho}$  удовлетворяют условиям

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = q \quad (\text{см. 18}), \quad \frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (\text{см. 19})$$

Из табл. 3 следует, что

**одноименные (по координатам  $\varphi$  и  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.**

Это соответствует экспериментальной электротехнике. На рис. 2 показаны векторы напряженностей в сферической системе координат.

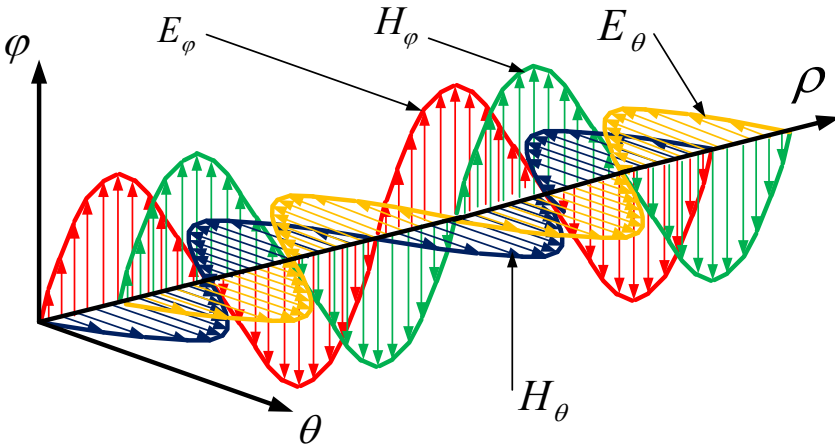


Рис. 2 (4hehe.vsd).

## 2. Поток энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В сферических координатах  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\rho$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_\varphi$ ,  $S_\theta$ ,  $S_\rho$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле



$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Отсюда и из табл. 3 следует, что

$$\begin{aligned} S_\varphi &= 0 \\ S_\theta &= 0 \end{aligned}. \quad (5)$$

$$S_\rho = \eta \left( \begin{aligned} &E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} (g(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t))^2 - \\ &- E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} (g(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t))^2 \end{aligned} \right)$$

Из (1.9, 1.11) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\theta\rho})^2, \quad (6)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\varphi\rho})^2. \quad (7)$$

Далее из (6, 7, 1.4, 1.6) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\theta\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\varphi\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}. \quad (9)$$

Из (5, 8, 9) получаем:

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \frac{\omega\mu}{\chi c} \frac{1}{\rho^2} \left( \begin{aligned} &(h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + \\ &+ (h_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \end{aligned} \right). \quad (9)$$

Далее из (9, 1.13, 1.18) следует, что

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\rho^2} \left( \begin{aligned} &(h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + \\ &+ (qh_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \end{aligned} \right), \quad (10)$$

где  $q$  – ранее неопределенная константа. Если принять

$$q = 1, \quad (10a)$$

то получим

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h_{\theta\rho}^2}{\rho^2}. \quad (11)$$

Заметим еще, что площадь поверхности сферы с радиусом  $\rho$  равна  $4\pi\rho^2$ . Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом  $\rho$  равен

$$\bar{S}_\rho = \int_0^{2\pi} 4\pi\rho^2 S_\rho d\theta = 4\pi\rho^2 \eta \omega \frac{h_{\theta\rho}^2}{\rho^2} \int_0^{2\pi} g^2(\theta) d\theta$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} g^2(\theta) d\theta = C,$$

где  $C$  – константа, то

$$\bar{S}_\rho = 4\pi C \eta \omega h_{\theta\rho}^2. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

**в сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени.**

Это строго соответствует закону сохранения энергии.

Из (12) следует, что плотность потока энергии меняется вдоль меридиана по закону  $g^2(\theta)$ .

### 3. Заключение

Получено строгое решение уравнений Максвелла для дальней зоны, которое представлено в табл. 3, где

$H_{\varphi\rho}(\rho)$ ,  $H_{\theta\rho}(\rho)$ ,  $E_{\varphi\rho}(\rho)$ ,  $E_{\theta\rho}(\rho)$  – функции, определенные по (1.21, 1.18, 1.19),

$g(\theta)$  – функция, определяемая по (1.20а),

$\chi$  – константа, определяемая по (1.13).

- Одноименные (по координатам  $\varphi$  и  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.
- В сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени и это строго соответствует закону сохранения энергии.
- Плотность энергии меняется вдоль меридиана по закону  $g^2(\theta)$ .

### Приложение 1

Рассмотрим (1.20):

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = -\text{ctg}(\theta) \cdot g(\theta) \quad (2)$$

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (\ln(g(\theta))) = \frac{\partial(g(\theta))}{g(\theta)}. \quad (3)$$

Из (2, 3) находим:

$$\ln(g(\theta)) = -\int \text{ctg}(\theta) \partial\theta. \quad (4)$$

Известно, что

$$\int \text{ctg}(\theta) \partial\theta = \ln(A \cdot |\sin(\theta)|). \quad (5)$$

где  $A$  – константа. Из (4, 5) получаем:

$$\ln(g(\theta)) = -\ln(A \cdot |\sin(\theta)|) \quad (6)$$

или

$$g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|}. \quad (8)$$

## Таблицы

Таблица 1.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$

Таблица 2.

1	2
1.	$\text{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$
2.	$\text{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$
3.	$\text{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$
4.	$\text{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$
5.	$\text{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$
6.	$\text{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$
7.	$\text{div}(E) = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$

Таблица 3.

1	2
	$E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\rho = 0$
	$H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\rho = 0$

Таблица 3а.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$

Таблица 4.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \sin(\dots) + \chi E_{\varphi\rho} \cos(\dots)\right) g(\theta)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial \rho} \cos(\dots) - \chi E_{\theta\rho} \sin(\dots)\right) g(\theta)$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \cos(\dots) - \chi H_{\varphi\rho} \sin(\dots)\right) g(\theta)$
7	$\text{rot}_\varphi(H)$	$\left(\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial \rho} \sin(\dots) + \chi H_{\theta\rho} \cos(\dots)\right) g(\theta)$
8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta}$

Таблица 5.

1	2
1.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
2.	$-\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\dots) - \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \cos(\dots) + \chi H_{\varphi\rho} \sin(\dots) + \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\theta\rho} \sin(\dots) = 0$
3.	$\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho} \sin(\dots) + \chi H_{\theta\rho} \cos(\dots) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\varphi\rho} \cos(\dots) = 0$
4.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
5.	$-\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(\dots) - \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \sin(\dots) - \chi E_{\varphi\rho} \cos(\dots) + \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} \sin(\dots) = 0$
6.	$\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho} \cos(\dots) - \chi E_{\theta\rho} \sin(\dots) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} \sin(\dots) = 0$
7.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
8.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$

## Второе решение. Уравнения Максвелла в сферических координатах в общем случае.

### 1. Введение

Выше в «Первом решении» предложено решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне. Далее рассматривается решение уравнений Максвелла для сферической волны во всей области существования волны (без разбиения на зоны).

### 2. Решение уравнений Максвелла

Итак, будем использовать сферические координаты  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Далее формулы мы будем размещать в таблицах и использовать следующие обозначения:

$T(\text{номер\_таблицы})-(\text{номер\_столбца})-(\text{номер\_строки})$

В таблице **T1-3** приведены выражения для ротора и дивергенции вектора в этих координатах [4]. Здесь и далее

$E$  - напряженность электрического поля,

$H$  - напряженность магнитного поля,

$J$  - плотность электрического тока смещения,

$M$  - плотность магнитного тока смещения,

$\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,

$\varepsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Примем следующие обозначения:

$$\Psi(E_\rho) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} \quad (1)$$

$$T(E_\varphi) = \left( \frac{E_\varphi}{tg(\theta)} + \frac{\partial(E_\varphi)}{\partial(\theta)} \right) \quad (2)$$

С учетом этих обозначений формулы в таблице **T1-3** принимают вид, приведенный в таблице **T1-4**. В таблице **T1A-2** запишем уравнения Максвелла.

Итак, имеется 8 уравнений Максвелла с 6-ю неизвестными. Эта система является переопределенной. Принято считать, что в сферической волне отсутствуют радиальные напряженности (хотя это и не доказано). При этом появляется система 8 уравнений

Максвелла с 4-мя неизвестными. Выше в «Первом решении» найдено решение этой задачи. В сущности, там находится решение 4-х уравнений (см. **T1A-2.2, 3, 6, 7**). В этом решении функции напряженностей имеют одинаковый для всех функций множитель – функцию  $g(\theta)$  от аргумента  $\theta$ . Остальные 4 уравнения выполняются при определенном выборе этой функции. Она оказывается такой, что у нее существуют бесконечные значения – это делает то решение практически неприменимым.

Приходится признать, что в сферической волне присутствуют радиальные напряженности. Однако и при этом система уравнений Максвелла остается переопределенной. Допустим еще, что существуют радиальные электрические токи смещения. Это допущение не снимает проблему переопределенности, но добавляет еще одну проблему. Дело в том, что сфера имеет идеальную симметрию и решение, очевидно, должно быть симметричным.

Напрашивается предположение о том, что существуют еще и радиальные магнитные токи смещения. Такое предположение не требует существования магнитных монополей также, существование электрических токов смещения не следует из существования электрических зарядов.

Итак, далее мы будем искать решение в виде функций  $E, H, J, M$ , представленных в таблице **T2-2**, где действительные функции вида  $g(\theta)$  и  $e(\rho), h(\rho), j(\rho), m(\rho)$ , предстоит вычислить, а коэффициенты  $\chi, \alpha, \omega$  известны.

При этих условиях преобразуем формулы **T1-3** в **T1-4**, где приняты следующие обозначения:

$$\boxed{e_\varphi} = \frac{\partial(e_\varphi(\rho))}{\partial(\rho)}, \quad (3)$$

$$q = k\rho + \omega t \quad (4)$$

Из (2, 4) найдем:

$$T(E_\varphi) = \left( \frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta)} + \cos(\theta) \right) e_\varphi \cos(q) = 2e_\varphi \cos(\theta) \cos(q) \quad (5)$$

Аналогично,

$$T(E_\theta) = 2e_\theta \cos(\theta) \sin(q) \quad (6)$$

$$T(H_\varphi) = 2h_\varphi \cos(\theta) \sin(q) \quad (7)$$

$$T(H_\theta) = 2h_\theta \cos(\theta) \cos(q) \quad (8)$$



С учетом этих обозначений формулы в таблице **T1-3** принимают вид, приведенный в таблице **T1-4**.

Далее по приведенным выше формулам и формулам из таблицы **T2** построим таблицы  $T2i, T2\rho, T2\psi$ .

В таблице **T1A-2** запишем уравнения Максвелла с учетом радиальных токов смещения. Далее примем условие

$$\alpha = 0 \quad (9)$$

Подставим роторы и дивергенции из таблицы **T1-4** в уравнения **T1A-2**, учтем условие (9), сократим полученные выражения на функции аргумента  $\theta$  и результат запишем в таблицу **T1A-3**. Затем подставим функции из таблиц  $T2i, T2\rho, T2\psi$  в функции **T1A-3** и запишем результат в таблицу **T4-2**. В этой таблице и далее применены обозначения вида

$$si = \sin(\chi\rho + \omega t), \quad (10)$$

$$co = \cos(\chi\rho + \omega t). \quad (11)$$

Далее каждое уравнение в таблице **T4-2** заменим на два уравнения, одно из которых содержит слагаемые со множителем  $si$ , а другое – со множителем  $co$ . Результат запишем в таблицу **T5-2**.

Уравнения **T5-2-2, 6, 3, 7** имеют решение, найденное в «Первом решении» и имеющее следующий вид (что можно проверить непосредственной подстановкой):

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (12)$$

$$e_\varphi = A/\rho, \quad e_\theta = A/\rho, \quad (13)$$

$$h_\varphi = -B/\rho, \quad h_\theta = B/\rho, \quad (14)$$

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (15)$$

Рассмотрим уравнения **T5-2.4, T5-2.8**. Их решение рассмотрено в приложении 1, где найдены функции  $e_\rho(\rho), \bar{e}_\rho(\rho), h_\rho(\rho), \bar{h}_\rho(\rho)$ . После этого по уравнениям **T5-2.1, T5-2.5** могут быть найдены функции  $j_\rho(\rho), \bar{j}_\rho(\rho), m_\rho(\rho), \bar{m}_\rho(\rho)$ .

Тем самым задача решена.

В частности, при  $A=B$  и малой величине  $\chi$  эти функции принимают следующий вид:

$$h_\rho = e_\rho = -\frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)), \quad (16)$$

$$\bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho = \frac{D}{\rho}, \quad (17)$$

$$j_\rho = \frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (18)$$

$$\bar{j}_\rho = -\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (19)$$

$$m_\rho = -\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho} \quad (20)$$

$$\bar{m}_\rho = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (21)$$

Здесь

$G$  – константа, которая может принимать различные для функций  $e_\rho$  и  $h_\rho$ ,

$D$  – константа, которая может принимать различные для функций  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{h}_\rho$ .

### 3. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi \quad (2)$$

В системе СИ  $\eta = 1$  и формула (1) принимает вид:

$$S = E \times H \quad (3)$$

В сферических координатах  $\varphi, \theta, \rho$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_\varphi, S_\theta, S_\rho$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Выше показано, что они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Найдем вначале радиальный поток энергии. Подставляя сюда формулы из таблицы **T2** и (1.4, 2.13, 2.14), находим:

$$\begin{aligned} S_\rho &= \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) - \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) \frac{-B}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) = \\ &= \frac{AB}{\rho^2} \sin^2(\theta) (\sin^2(q) + \cos^2(q)) \end{aligned} \quad (4a)$$

или, с учетом (2.15),

$$S_\rho = \frac{A^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin^2(\theta) \quad (5)$$

Заметим, что площадь поверхности сферы с радиусом  $\rho$  равна  $4\pi\rho^2$ . Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом  $\rho$  равен

$$\bar{S}_\rho = \int_{\theta} 4\pi\rho^2 S_\rho d\theta = -4\pi\rho^2 \eta \frac{A^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_{\theta} \sin^2(\theta) d\theta$$

или

$$\bar{S}_\rho = -4\pi\eta A^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta$$

или

$$\bar{S}_\rho = -4\pi^2 \eta A^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (6)$$

Таким образом, плотность потока энергии, проходящего сквозь сферу, не зависит от радиуса и не зависит от времени, т.е. этот поток имеет одну и ту же величину на сферической поверхности любого радиуса в любой момент времени. Иначе говоря, поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

Найдем теперь поток энергии

$$S_\varphi = \eta(E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta), \quad (7)$$

Подставляя сюда формулы из таблицы **T2** и (2.13, 2.14, 2.16, 2.17), находим:

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \eta \left( \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \cos(q) \cos(\theta) (h_\rho \sin(q) + \bar{h}_\rho \cos(q)) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\theta) (e_\rho \cos(q) + \bar{e}_\rho \sin(q)) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \sin(q) \right) = \\ &= \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( A \cos(q) (h_\rho \sin(q) + \bar{h}_\rho \cos(q)) \right. \\ &\quad \left. - B \sin(q) (e_\rho \cos(q) + \bar{e}_\rho \sin(q)) \right) = \\ &= \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( (h_\rho A \cos(q) \sin(q) + \bar{h}_\rho A \cos^2(q)) \right. \\ &\quad \left. - (e_\rho B \sin(q) \cos(q) + \bar{e}_\rho B \sin^2(q)) \right) \end{aligned}$$

или, учитывая (2.16, 2.17),

$$S_\varphi = \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( (e_\rho A \cos(q) \sin(q) + \bar{e}_\rho A \cos^2(q)) \right. \\ \left. - (e_\rho B \sin(q) \cos(q) + \bar{e}_\rho B \sin^2(q)) \right)$$

или

$$S_\varphi = \frac{\eta \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)}{\rho} \left( e_\rho (A - B) \cos(q) \sin(q) + \right. \\ \left. \bar{e}_\rho (A \cos^2(q) + B \sin^2(q)) \right) \quad (8)$$

Найдем теперь поток энергии

$$S_\theta = \eta(E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho). \quad (9)$$

Аналогично предыдущему найдем:

$$S_{\theta} = \frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} \begin{pmatrix} -(e_{\rho} B \cos(q)\sin(q) + \bar{e}_{\rho} B \cos^2(q)) \\ -(e_{\rho} A \sin(q)\cos(q) + \bar{e}_{\rho} A \sin^2(q)) \end{pmatrix}$$

или

$$S_{\theta} = -\frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} \begin{pmatrix} e_{\rho}(A+B)\cos(q)\sin(q) + \\ \bar{e}_{\rho}(A\cos^2(q) + B\sin^2(q)) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В частности, при  $\epsilon = \mu$ , например, для вакуума, из (2.15) находим, что  $A=B$ , и из (7, 10) получаем:

$$S_{\varphi} = \frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} A \bar{e}_{\rho}, \quad (11)$$

$$S_{\theta} = -\frac{\eta \cdot \sin(\theta)\cos(\theta)}{\rho} (2Ae_{\rho}\cos(q)\sin(q) + A\bar{e}_{\rho}). \quad (12)$$

или

$$S_{\varphi} = \frac{\eta \cdot \sin(2\theta)}{2\rho} A \bar{e}_{\rho}, \quad (13)$$

$$S_{\theta} = -\frac{A\eta \cdot \sin(2\theta)}{2\rho} (e_{\rho}\sin(2q) + \bar{e}_{\rho}). \quad (14)$$

Из (12, 13) найдем плотность суммарного потока энергии, направленного по касательной к сфере данного радиуса,

$$S_{\varphi\theta} = S_{\varphi} + S_{\theta} = -\frac{A\eta \cdot}{2\rho} e_{\rho}\sin(2\theta)\sin(2q)$$

или

$$S_{\varphi\theta} = -\frac{A\eta \cdot}{4\rho} e_{\rho} (\cos(2\theta - 2q) - \cos(2\theta + 2q))$$

или

$$S_{\varphi\theta} = -\frac{A\eta \cdot}{4\rho} e_{\rho} \begin{pmatrix} \cos(2(\chi\rho + \omega t - \theta)) \\ -\cos(2(\chi\rho + \omega t + \theta)) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Это означает, что на окружностях сферы существуют стоячие волны.

## 4. Заключение

1. Решение уравнений Максвелла, свободное от указанных выше недостатков, представлено в таблице **T2**.

2. Решение является монохроматическим.

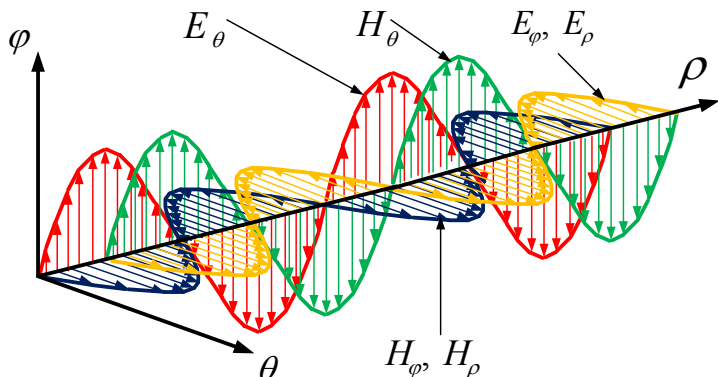
3. Амплитуды напряженностей поперечной волны пропорциональны  $\rho^{-1}$

4. Одноименные (по координатам  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.

5. Поток энергии, направленный вдоль радиуса, сохраняет свою величину с увеличением радиуса и не зависит от времени, что соответствует закону сохранения энергии.

6. Существуют радиальные электрическая и магнитная напряженности.

7. Существуют радиальные электрические и магнитные токи смещения.



### Приложение 1.

Из **Т5-4.1** и (2.13) находим:

$$\bar{e}_\rho = -\frac{1}{\chi} \bar{e}_\theta - \frac{1}{\chi \rho} e_\rho - \frac{2A}{\chi \rho^2}. \quad (1)$$

Дифференцируя (1), получаем:

$$\bar{e}_\rho = -\frac{1}{\chi} \bar{e}_\theta - \frac{1}{\chi \rho} \bar{e}_\theta + \frac{1}{\chi \rho^2} e_\rho + \frac{4A}{\chi \rho^3}. \quad (2)$$

Подставим (2) в **Т5-4.2** и найдем:

$$\left( -\frac{1}{\chi \rho} \bar{e}_\theta - \frac{1}{\chi \rho^2} e_\rho - \frac{2A}{\chi \rho^3} - \chi e_\rho - \frac{1}{\chi} \bar{e}_\theta - \frac{1}{\chi \rho} \bar{e}_\theta + \frac{1}{\chi \rho^2} e_\rho + \frac{4A}{\chi \rho^3} \right) = 0$$

или

$$\bar{e}_\theta + \frac{2}{\rho} \bar{e}_\theta + \chi^2 e_\rho - \frac{2A}{\rho^3} = 0. \quad (3)$$

По этому дифференциальному уравнению можно найти функцию  $e_\rho(\rho)$ , а при этой известной функции и дифференциальному уравнению **Т5-4.2** найти функцию  $\bar{e}_\rho(\rho)$ .

Из **Т5-8.1** и (2.14) находим:

$$\bar{h}_\rho = \frac{1}{\chi} \bar{h}_\theta + \frac{1}{\chi \rho} h_\rho + \frac{2B}{\chi \rho^2}. \quad (4)$$

Дифференцируя (4), получаем:

$$\bar{h}_\rho = \frac{1}{\chi} \bar{h}_\theta + \frac{1}{\chi \rho} \bar{h}_\theta - \frac{1}{\chi \rho^2} h_\rho - \frac{4B}{\chi \rho^3}. \quad (5)$$

Подставим (5) в **Т5-8.2** и найдем:

$$\left(\frac{1}{\chi\rho}\bar{h}_\rho + \frac{1}{\chi\rho^2}h_\rho + \frac{2B}{\chi\rho^3} + \chi h_\rho + \frac{1}{\chi}\bar{h}_\rho + \frac{1}{\chi\rho}\bar{h}_\rho - \frac{1}{\chi\rho^2}h_\rho - \frac{4B}{\chi\rho^3}\right) = 0$$

или

$$\bar{h}_\rho + \frac{2}{\rho}\bar{h}_\rho + \chi^2 h_\rho - \frac{2B}{\rho^3} = 0 \quad (6)$$

По этому дифференциальному уравнению можно найти функцию  $h_\rho(\rho)$ , а при этой известной функции и дифференциальному уравнению **T5-8.2** найти функцию  $\bar{h}_\rho(\rho)$ .

В частности, при  $\varepsilon = \mu$ , например, для вакуума, из (2.15) находим, что  $A=B$ , и, сравнивая (3) и (6), находим, что

$$h_\rho = e_\rho. \quad (7)$$

При  $A=B$  и малой величине  $\chi$  уравнения **T5-4.1** и **T5-8.1** совпадают и принимают вид

$$\dot{y} + \frac{2}{\rho}y - \frac{2A}{\rho^3} = 0, \quad (8)$$

где

$$y = \bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho. \quad (9)$$

Метод решения такого уравнения приведен в [111, стр. 50]. Следуя этому методу, находим

$$y = \frac{C + 2A \ln(\rho)}{\rho^2} \quad (10)$$

где  $C$  – константа, которая может принимать различные для функций  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{h}_\rho$ . Из (9, 10) находим:

$$h_\rho = e_\rho = -\frac{C}{\rho} - 2A\left(\frac{1 + \ln(\rho)}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (11)$$

где  $G$  – константа, которая может принимать различные для функций  $e_\rho$  и  $h_\rho$ .

При малой величине  $\chi$  уравнения **T5-4.1** и **T5-8.1** совпадают и принимают вид

$$\dot{z} + \frac{1}{\rho}z = 0, \quad (12)$$

где

$$z = \bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho. \quad (13)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\bar{h}_\rho = \bar{e}_\rho = \frac{D}{\rho}, \quad (14)$$

где  $D$  – константа, которая может принимать различные для функций  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{h}_\rho$ .

Из **T5-2.1** и (2.13, 14, 11) находим:

$$j_\rho = \frac{2}{\rho} e_\varphi - \frac{\mu}{c} \omega \bar{h}_\rho = \frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (15)$$

$$\bar{j}_\rho = \frac{\mu}{c} \omega h_\rho = -\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (16)$$

Из **T5-2.2** и (2.14, 14, 11) находим:

$$m_\rho = \frac{2}{\rho} h_\varphi + \frac{\varepsilon}{c} \omega \bar{e}_\rho = -\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}, \quad (17)$$

$$\bar{m}_\rho = \frac{\varepsilon}{c} \omega e_\rho = -\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho} (G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (18)$$

### Таблицы

Таблица 1.

1	2	3	4
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha E_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - \frac{i\alpha H_\theta}{\rho \sin(\theta)}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha E_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(E_\varphi)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(E_\theta) - \frac{i\alpha E_\rho}{\rho}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$\frac{\partial H_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{H_\varphi}{\rho} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho}$	$\frac{i\alpha H_\rho}{\rho \sin(\theta)} - \psi(H_\varphi)$
7	$\text{rot}_\varphi H$	$\frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\rho \partial \varphi}$	$\psi(H_\theta) - \frac{i\alpha H_\rho}{\rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha E_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$
8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{H_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$	$\psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} + \frac{i\alpha H_\varphi}{\rho \sin(\theta)}$

Таблица 1А.

1	2	3
1.	$rot_{\rho}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\rho}}{\partial t} - M_{\rho} = 0$	$\frac{T(E_{\varphi})}{\rho} + \frac{i\omega\mu H_{\rho}}{c} - M_{\rho} = 0$
5.	$rot_{\rho}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\rho}}{\partial t} - J_{\rho} = 0$	$\frac{T(H_{\varphi})}{\rho} - \frac{i\omega\varepsilon E_{\rho}}{c} - J_{\rho} = 0$
2.	$rot_{\theta}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial t} = 0$	$-\Psi(E_{\varphi}) + \frac{i\omega\mu H_{\theta}}{c} = 0$
3.	$rot_{\varphi}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} = 0$	$\Psi(E_{\theta}) + \frac{i\omega\mu H_{\varphi}}{c} = 0$
6.	$rot_{\theta}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\theta}}{\partial t} = 0$	$-\Psi(H_{\varphi}) - \frac{i\omega\varepsilon E_{\theta}}{c} = 0$
7.	$rot_{\varphi}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial t} = 0$	$\Psi(H_{\theta}) - \frac{i\omega\varepsilon E_{\varphi}}{c} = 0$
4.	$div(E) = 0$	$\Psi(E_{\rho}) + \frac{T(E_{\theta})}{\rho} = 0$
8.	$div(H) = 0$	$\Psi(H_{\rho}) + \frac{T(H_{\theta})}{\rho} = 0$

Таблица 2.

1	2
	$E_{\theta} = e_{\theta} \sin(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t)$
	$E_{\varphi} = e_{\varphi} \sin(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t)$
	$E_{\rho} = \cos(\theta) (e_{\rho} \cos(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_{\rho} \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$J_{\rho} = \cos(\theta) (j_{\rho} \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{j}_{\rho} \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$H_{\theta} = h_{\theta} \sin(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t)$
	$H_{\varphi} = h_{\varphi} \sin(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t)$
	$H_{\rho} = \cos(\theta) (h_{\rho} \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{h}_{\rho} \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$M_{\rho} = \cos(\theta) (m_{\rho} \cos(\chi\rho + \omega t) + \bar{m}_{\rho} \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2i.

1	2
	$i\omega E_{\theta} = \omega \sin(\theta) (-e_{\theta} \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega E_{\varphi} = \omega \sin(\theta) (e_{\varphi} \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega E_{\rho} = \omega \cos(\theta) (-e_{\rho} \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_{\rho} \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_{\theta} = \omega \sin(\theta) (h_{\theta} \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_{\varphi} = \omega \sin(\theta) (-h_{\varphi} \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$i\omega H_{\rho} = \omega \cos(\theta) (h_{\rho} \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{h}_{\rho} \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2ρ.

1	2



	$\frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (-e_\theta \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (e_\varphi \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta) (-e_\rho \sin(\chi\rho + \omega t) + \bar{e}_\rho \cos(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (-h_\varphi \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \chi \sin(\theta) (-h_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$
	$\frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \chi \cos(\theta) (h_\rho \cos(\chi\rho + \omega t) - \bar{h}_\rho \sin(\chi\rho + \omega t))$

Таблица 2Ψ.

<b>2</b>	
$\Psi(E_\theta) = \frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho} (e_\theta \cos) + \chi (-e_\theta \sin) + (\bar{e}_\theta \cos) \right)$	
$\Psi(E_\varphi) = \frac{E_\varphi}{\rho} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho} (e_\varphi \sin) + \chi (e_\varphi \cos) + (\bar{e}_\varphi \sin) \right)$	
$\Psi(E_\rho) = \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta) \cdot$ $\cdot \left( \frac{1}{\rho} (e_\rho \cos) + \frac{1}{\rho} (\bar{e}_\rho \sin) + \chi (e_\rho \cos) - \chi (e_\rho \sin) + (\bar{e}_\rho \cos) + (\bar{e}_\rho \sin) \right)$	
$\Psi(H_\theta) = \frac{H_\theta}{\rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho} (h_\theta \sin) + \chi (h_\theta \cos) + (\bar{h}_\theta \sin) \right)$	
$\Psi(H_\varphi) = \frac{H_\varphi}{\rho} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = \sin(\theta) \left( \frac{1}{\rho} (h_\varphi \cos) + \chi (-h_\varphi \sin) + (\bar{h}_\varphi \cos) \right)$	
$\Psi(H_\rho) = \frac{H_\rho}{\rho} + \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} = \cos(\theta) \cdot$ $\cdot \left( \frac{1}{\rho} (h_\rho \sin) + \frac{1}{\rho} (\bar{h}_\rho \cos) - \chi (\bar{h}_\rho \sin) + \chi (h_\rho \cos) + (\bar{h}_\rho \sin) + (\bar{h}_\rho \cos) \right)$	

Таблица 4.

<b>1</b>	<b>2</b>
1.	$\frac{2}{\rho} (e_\varphi \sin) - \frac{\mu}{c} \omega (\bar{h}_\rho \sin) = j_\rho \sin$ $\frac{\mu}{c} \omega (h_\rho \cos) = \bar{j}_\rho \cos$
5.	$\frac{2}{\rho} (h_\varphi \cos) + \frac{\varepsilon}{c} \omega (\bar{e}_\rho \cos) = m_\rho \cos$ $\frac{\varepsilon}{c} \omega (e_\rho \sin) = \bar{m}_\rho \sin$
2.	$-\left( \frac{1}{\rho} (e_\varphi \sin) + \chi (e_\varphi \cos) + (\bar{e}_\varphi \sin) \right) + \frac{\mu}{c} \omega (h_\theta \cos) = 0$
3.	$\left( \frac{1}{\rho} (e_\theta \cos) + \chi (-e_\theta \sin) + (\bar{e}_\theta \cos) \right) + \frac{\mu}{c} \omega (-h_\varphi \sin) = 0$
6.	$-\left( \frac{1}{\rho} (h_\varphi \cos) + \chi (-h_\varphi \sin) + (\bar{h}_\varphi \cos) \right) - \frac{\varepsilon}{c} \omega (-e_\theta \sin) = 0$

7.	$\left(\frac{1}{\rho}(h_{\theta}si) + \chi(h_{\theta}co) + (\overline{h_{\theta}}si)\right) - \frac{\varepsilon}{c}\omega(e_{\varphi}co) = 0$
4.	$\left(\frac{1}{\rho}(e_{\rho}co) + \chi(\overline{e_{\rho}}co) + (\overline{e_{\rho}}co)\right) + \frac{2}{\rho}(e_{\theta}co) = 0$ $\left(\frac{1}{\rho}(\overline{e_{\rho}}si) - \chi(e_{\rho}si) + (\overline{e_{\rho}}si)\right) = 0$
8.	$\left(\frac{1}{\rho}(h_{\rho}si) - \chi(\overline{h_{\rho}}si) + (\overline{h_{\rho}}si)\right) + \frac{2}{\rho}(h_{\theta}si) = 0$ $\left(\frac{1}{\rho}(\overline{h_{\rho}}co) + \chi(h_{\rho}co) + (\overline{h_{\rho}}co)\right) = 0$

Таблица 5

1	2
1.	$\frac{2}{\rho}e_{\varphi} - \frac{\mu}{c}\omega\overline{h_{\rho}} = j_{\rho}; \frac{\mu}{c}\omega h_{\rho} = \overline{j_{\rho}}$
5.	$\frac{2}{\rho}h_{\varphi} + \frac{\varepsilon}{c}\omega\overline{e_{\rho}} = m_{\rho}; \frac{\varepsilon}{c}\omega e_{\rho} = \overline{m_{\rho}}$
2.	$\overline{e_{\varphi}} = -\frac{1}{\rho}e_{\varphi}; -\chi e_{\varphi} + \frac{\mu\omega}{c}h_{\theta} = 0$
6.	$\overline{h_{\varphi}} = -\frac{1}{\rho}h_{\varphi}; \chi h_{\varphi} + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\theta}$
3.	$\overline{e_{\theta}} = -\frac{1}{\rho}e_{\theta}; -\chi e_{\theta} - \frac{\mu\omega}{c}h_{\varphi} = 0$
7.	$\overline{h_{\theta}} = -\frac{1}{\rho}h_{\theta}; \chi h_{\theta} - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\varphi}$
2.	$\overline{e_{\varphi}} = -\chi e_{\varphi} - \frac{1}{\rho}e_{\varphi} + \frac{\mu\omega}{c}h_{\varphi}$
6.	$\overline{h_{\varphi}} = \chi h_{\varphi} - \frac{1}{\rho}h_{\varphi} - \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\theta}$
3.	$\overline{e_{\theta}} = \chi e_{\theta} - \frac{1}{\rho}e_{\theta} - \frac{\mu\omega}{c}h_{\varphi}$
7.	$\overline{h_{\theta}} = -\chi h_{\theta} - \frac{1}{\rho}h_{\theta} + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_{\varphi}$
4.	1 $\left(\frac{1}{\rho}e_{\rho} + \chi\overline{e_{\rho}} + \overline{e_{\rho}}\right) + \frac{2}{\rho}e_{\theta} = 0$
	2 $\left(\frac{1}{\rho}\overline{e_{\rho}} - \chi e_{\rho} + \overline{e_{\rho}}\right) = 0$
8.	1 $\left(\frac{1}{\rho}h_{\rho} - \chi\overline{h_{\rho}} + \overline{h_{\rho}}\right) + \frac{2}{\rho}h_{\theta} = 0$
	2 $\left(\frac{1}{\rho}\overline{h_{\rho}} + \chi h_{\rho} + \overline{h_{\rho}}\right) = 0$

## Третье решение. Уравнения Максвелла в сферических координатах для электропроводной среды.

### 1. Приближенное решение

Выше во «Втором решении» было рассмотрено решение уравнений Максвелла для сферы в среде, у которой есть отличные от единицы величины  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Далее предположим еще, что среда имеет некоторую электропроводность  $\sigma$ . В этом случае уравнение вида

$$\operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

заменяется на уравнение вида

$$\operatorname{rot} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma E = 0 \quad (2)$$

Мы будем искать решение в виде функций  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$ , представленных в таблице **T2-2** (см. «Второе решение») и перепишем ее в комплексном виде как таблицы **T1-2**. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{i\omega\varepsilon}{c} E - \sigma E = 0 \quad (3)$$

или

$$\operatorname{rot}(H) - wE = 0, \quad (4)$$

где комплексное число

$$w = \frac{i\omega\varepsilon}{c} + \sigma. \quad (5)$$

Перепишем теперь таблицу **T1A** (см. «Второе решение») в комплексном виде в таблицу **T2** с учетом формулы (4). Будем полагать, что токи проводимости существенно больше токов смещения на окружностях сферы, т.е. на окружностях можно учитывать только токи проводимости. При этом в таблице **T2-3** мы получим систему из 8-ми алгебраических уравнений с 8-ю комплексными неизвестными  $E, H, J_\rho, M_\rho$ .

Решение может быть выполнено в следующем порядке.

1. Решается системы двух уравнений T2-2 и T2-7 относительно неизвестных  $E_\varphi$  и  $H_\theta$ .

2. Решается системы двух уравнений Т2-3 и Т2-6 относительно неизвестных  $E_\theta$  и  $H_\phi$ .
3. При данных  $E_\theta$  и  $H_\phi$ , решаются уравнения Т2-4 и Т2-8 и определяются неизвестные  $E_\rho$  и  $H_\rho$  соответственно.
4. При данных  $E_\phi$  и  $H_\rho$  решается уравнение Т2-1 и определяется неизвестное  $M_\rho$ .
5. При данных  $H_\phi$  и  $E_\rho$  решается уравнение Т2-1 и определяется неизвестное  $J_\rho$ .

## 2. Точное решение

Рассмотрим теперь таблицу **Т2**, в которой указаны все 6 токов смещения. Эта таблица содержит 8 алгебраических уравнений с 12-ю комплексными неизвестными  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$  и является переопределенной.

Рассмотрим уравнения потоков энергии (3.4) из раздела «Второе решение»:

$$S_\phi = \eta(E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta), \quad (1)$$

$$S_\theta = \eta(E_\rho H_\phi - E_\phi H_\rho), \quad (2)$$

$$S_\rho = \eta(E_\phi H_\theta - E_\theta H_\phi). \quad (3)$$

Из закона сохранения энергии следует, что поток энергии не может изменяться во времени. Это означает, что величины (1-3) должны быть реальными. Следовательно,

$$\text{Im}(E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta) = 0, \quad (4)$$

$$\text{Im}(E_\rho H_\phi - E_\phi H_\rho) = 0, \quad (5)$$

$$\text{Im}(E_\phi H_\theta - E_\theta H_\phi) = 0. \quad (6)$$

Будем полагать еще, что известна одна из напряженностей, например,

$$e_\phi = A/\rho, \quad (7)$$

где  $A$  – константа. При этом мы имеем систему 12 нелинейных уравнений **Т3-3** и (4-7) с 12-ю комплексными неизвестными  $E$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$ . Методы решения таких систем известны.

## Таблицы

Таблица 1.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta)$
	$E_\varphi = ie_\varphi \sin(\theta)$
	$E_\rho = \cos(\theta)(e_\rho + i\bar{e}_\rho)$
	$J_\rho = \cos(\theta)(ij_\rho + \bar{j}_\rho)$
	$H_\theta = ih_\theta \sin(\theta)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta)$
	$H_\rho = \cos(\theta)(ih_\rho + \bar{h}_\rho)$
	$M_\rho = \cos(\theta)(m_\rho + im_\rho)$

Таблица 2.

1	2	3
1.	$rot_\rho(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_\rho - M_\rho = 0$	$\frac{T(E_\varphi)}{\rho} + \frac{i\omega\mu H_\rho}{c} - M_\rho = 0$
5.	$rot_\rho(H) - wE_\rho - J_\rho = 0$	$\frac{T(H_\varphi)}{\rho} - wE_\rho - J_\rho = 0$
2.	$rot_\theta(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_\theta = 0$	$-\Psi(E_\varphi) + \frac{i\omega\mu H_\theta}{c} = 0$
7.	$rot_\varphi(H) - wE_\varphi = 0$	$\Psi(H_\theta) - wE_\varphi = 0$
3.	$rot_\varphi(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_\varphi = 0$	$\Psi(E_\theta) + \frac{i\omega\mu H_\varphi}{c} = 0$
6.	$rot_\theta(H) - wE_\theta = 0$	$-\Psi(H_\varphi) - wE_\theta = 0$
4.	$div(E) = 0$	$\Psi(E_\rho) + \frac{T(E_\theta)}{\rho} = 0$
8.	$div(H) = 0$	$\Psi(H_\rho) + \frac{T(H_\theta)}{\rho} = 0$

Таблица 3.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1.	$rot_{\rho}(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_{\rho} - M_{\rho} = 0$	$\frac{T(E_{\varphi})}{\rho} + \frac{i\omega\mu H_{\rho}}{c} - M_{\rho} = 0$
5.	$rot_{\rho}(H) - wE_{\rho} - J_{\rho} = 0$	$\frac{T(H_{\varphi})}{\rho} - wE_{\rho} - J_{\rho} = 0$
2.	$rot_{\theta}(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_{\theta} - M_{\theta} = 0$	$-\Psi(E_{\varphi}) + \frac{i\omega\mu H_{\theta}}{c} - M_{\theta} = 0$
7.	$rot_{\varphi}(H) - wE_{\varphi} - J_{\varphi} = 0$	$\Psi(H_{\theta}) - wE_{\varphi} = 0$
3.	$rot_{\varphi}(E) - \frac{i\omega\mu}{c}H_{\varphi} - M_{\varphi} = 0$	$\Psi(E_{\theta}) + \frac{i\omega\mu H_{\varphi}}{c} - M_{\varphi} = 0$
6.	$rot_{\theta}(H) - wE_{\theta} - J_{\theta} = 0$	$-\Psi(H_{\varphi}) - wE_{\theta} - J_{\theta} = 0$
4.	$div(E) = 0$	$\Psi(E_{\rho}) + \frac{T(E_{\theta})}{\rho} = 0$
8.	$div(H) = 0$	$\Psi(H_{\rho}) + \frac{T(H_{\theta})}{\rho} = 0$

# Глава 8а. Решение уравнений Максвелла для сферического конденсатора

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Решение уравнений Максвелла для вакуума \ 1
3. Электрические и магнитные напряженности \ 4
4. Электромагнитная волна в заряженном сферическом \ 7

### 1. Введение

В главах 2 и 7 рассмотрена электромагнитная волна в конденсаторе, который включен в цепь переменного или постоянного тока. Ниже рассматривается сферический конденсатор в цепи синусоидального тока или постоянного тока. Обкладками такого конденсатора являются две сферы с общим центром и радиусами  $R_2 > R_1$ .

### 2. Уравнения Максвелла в сферических координатах

Решение уравнений Максвелла в сферических координатах получено в главе 8.

Радиальная координата изменяется в пределах

$$R_1 < \rho < R_2. \quad (1)$$

При ограниченном  $\rho$  и малой величине  $\chi$  таблица 2 в главе 8 (второе решение) примет вид таблицы 1.

Таблица 1.

1	2
	$E_{\theta} = e_{\theta} \sin(\theta) \cos(\omega t)$
	$E_{\varphi} = e_{\varphi} \sin(\theta) \sin(\omega t)$
	$E_{\rho} = \cos(\theta) (e_{\rho} \cos(\omega t) + \bar{e}_{\rho} \sin(\omega t))$
	$J_{\rho} = \cos(\theta) (j_{\rho} \sin(\omega t) + \bar{j}_{\rho} \cos(\omega t))$
	$H_{\theta} = h_{\theta} \sin(\theta) \sin(\omega t)$
	$H_{\varphi} = h_{\varphi} \sin(\theta) \cos(\omega t)$
	$H_{\rho} = \cos(\theta) (h_{\rho} \sin(\omega t) + \bar{h}_{\rho} \cos(\omega t))$
	$M_{\rho} = \cos(\theta) (m_{\rho} \cos(\omega t) + \bar{m}_{\rho} \sin(\omega t))$

Далее перепишем эту таблицу в комплексном виде – см. таблицы Т2-2 и Т2-3, где  $|E_{\rho}|$  – модуль напряженности  $E_{\rho}$  (включающий зависимость от  $\theta$ ),  $\Psi$  – аргумент напряженности  $E_{\rho}$  и т.п.

Таблица 2.

1	2	
	$E_{\theta} = e_{\theta} \sin(\theta)$	$E_{\theta} =  E_{\theta} $
	$E_{\varphi} = ie_{\varphi} \sin(\theta)$	$E_{\varphi} = i E_{\varphi} $
	$E_{\rho} = \cos(\theta) (e_{\rho} + i\bar{e}_{\rho})$	$E_{\rho} =  E_{\rho}  \cos(\Psi)$
	$J_{\rho} = \cos(\theta) (ij_{\rho} + \bar{j}_{\rho})$	$J_{\rho} =  J_{\rho}  \cos(\Psi)$
	$H_{\theta} = ih_{\theta} \sin(\theta)$	$H_{\theta} = i H_{\theta} $
	$H_{\varphi} = h_{\varphi} \sin(\theta)$	$H_{\varphi} =  H_{\varphi} $
	$H_{\rho} = \cos(\theta) (ih_{\rho} + \bar{h}_{\rho})$	$H_{\rho} =  H_{\rho}  \cos(\Psi)$
	$M_{\rho} = \cos(\theta) (m_{\rho} + im_{\rho})$	$M_{\rho} =  M_{\rho}  \cos(\Psi)$

Важно отметить, что в данный момент потенциал на сфере данного радиуса меняется как функция  $\sin(\theta)$ . Внешняя и внутренняя поверхности металлические поверхности находятся на постоянном радиусе. Следовательно, потенциал на металлической обкладке сферического радиуса различен в разных точках сферы. Следовательно, далее, по обкладкам сферического конденсатора протекают токи.

Дополнительным аргументом в пользу существования таких токов является существование теллурических токов [53]. Отсутствует общепринятое объяснение их причины.

Далее мы будем ссылаться на формулы из 8 (второе решение) в виде: (8.”номер\_радела”.”номер\_формулы”).

Из (8.2.16, 8.2.17) находим:



$$|E_\rho| = \sqrt{(e_\rho)^2 + (\bar{e}_\rho)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right)^2 + \left(\frac{D}{\rho}\right)^2} = \frac{1}{\rho} \sqrt{(G + 2A \cdot \ln(\rho))^2 + D^2}, \quad (2)$$

$$tg(\Psi_{e\rho}) = \frac{\bar{e}_\rho}{e_\rho} = D / (G + 2A \cdot \ln(\rho)) \quad (3)$$

Полностью аналогичные формулы существуют для  $H_\rho$ , но для  $\Psi_{h\rho}$  формула имеет вид

$$tg(\Psi_{h\rho}) = \frac{h_\rho}{\bar{h}_\rho} = (G + 2A \cdot \ln(\rho)) / D \quad (6)$$

что следует из таблицы **T2-2**. Следовательно,

$$tg(\Psi_{h\rho}) = 1 / tg(\Psi_{e\rho}). \quad (7)$$

Далее из (8.2.18, 8.2.19) находим:

$$|J_\rho| = \sqrt{(j_\rho)^2 + (\bar{j}_\rho)^2} = \sqrt{\left(\frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right)^2}, \quad (8)$$

$$tg(\Psi_{j\rho}) = \frac{j_\rho}{\bar{j}_\rho} = \left(\frac{2A}{\rho^2} - \frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right) / \left(-\frac{\mu\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right). \quad (9)$$

Наконец, из (8.2.20, 8.2.21) находим:

$$|M_\rho| = \sqrt{(m_\rho)^2 + (\bar{m}_\rho)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right)^2}, \quad (10)$$

$$tg(\Psi_{m\rho}) = \frac{\bar{m}_\rho}{m_\rho} = \left(-\frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{1}{\rho}(G + 2A \cdot \ln(\rho))\right) / \left(-\frac{2B}{\rho^2} + \frac{\varepsilon\omega}{c} \cdot \frac{D}{\rho}\right). \quad (11)$$

Из полученных формул следует, что сферический конденсатор должен обладать магнитными свойствами, аналогичными его электрическим свойствам.

При известном напряжении со среднеквадратичным значением  $U$  на конденсаторе из (2) находим:

$$U = |E_\rho(R_2)| - |E_\rho(R_1)| = \frac{1}{R_2} \sqrt{(G + 2A \cdot \ln(R_2))^2 + D^2} - \frac{1}{R_1} \sqrt{(G + 2A \cdot \ln(R_1))^2 + D^2} \quad (12)$$

В частности, при  $\ln(R_2) \approx \ln(R_1)$  получаем:

$$U = K \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (13)$$

где  $K$  – некоторая константа. Следовательно, амплитуда потенциала на внешней сфере конденсатора меньше амплитуды потенциала на внутренней сфере конденсатора.

### 3. Электрические и магнитные напряженности

Рассмотрим на сфере радиуса  $\rho$  точку  $T$  с координатами  $\varphi, \theta$ . Векторы  $H_\varphi$  и  $H_\theta$ , исходящие из этой точки, лежат в плоскости  $P$ , касательной к этой сфере в этой точке  $T(\varphi, \theta)$  - см. рис. 2. Эти векторы перпендикулярны друг другу. Следовательно, в каждой точке  $(\varphi, \theta)$  суммарный вектор

$$H_{\varphi\theta} = H_\varphi + H_\theta \quad (1)$$

лежит в плоскости  $P$  и направлен под углом  $\psi$  к линии параллели (вдоль координаты  $\theta$ ). Как следует из табл. 2 и (8.2.14), модуль этого вектора  $|H_{\varphi\theta}|$  и угол  $\psi$  определяются следующими формулами:

$$H_{\varphi\theta} = |H_{\varphi\theta}| \cos(\psi) \quad (2)$$

$$|H_{\varphi\theta}| = \frac{B}{\rho} \sin(\theta) \quad (3)$$

$$\psi = \arctg(\chi\rho + \omega t) \quad (4)$$

Найдем напряженности  $H_{\varphi\theta}$  на полюсах сферы, где

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \sin(\theta) = \pm 1, \quad \rho = R. \quad (5)$$

Из (2-4) следует, что на полюсах

$$|H_{\varphi\theta}| = \pm \frac{B}{R} \quad (6)$$

и между полюсами существует магнитная напряженность

$$H_{pp} = \frac{2B}{R} \cos(\chi R + \omega t) \quad (7)$$

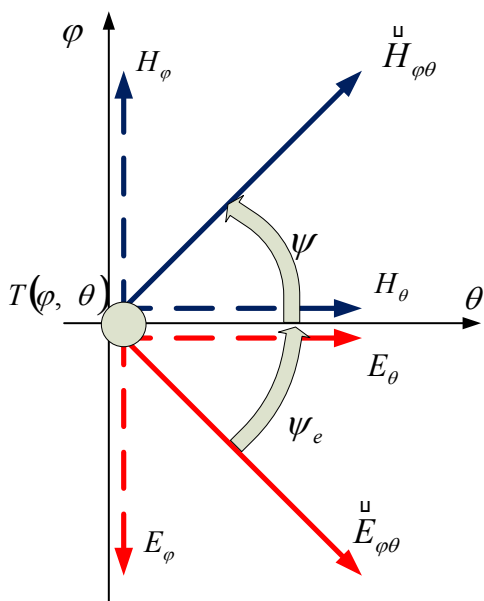


Рис. 2 (Sfera110.vsd).

Подобные соотношения существуют и для векторов  $E_\varphi$  и  $E_\theta$ . В каждой точке  $(\varphi, \theta)$  суммарный вектор

$$E_{\varphi\theta} = E_\varphi + E_\theta \quad (8)$$

лежит в плоскости  $P$  и направлен под углом  $\psi_e$  к линии параллели (вдоль координаты  $\theta$ ). Как следует из табл. 2 и (8.2.13), модуль этого вектора и угол  $\psi_e$  определяются следующими формулами:

$$E_{\varphi\theta} = |E_{\varphi\theta}| \cos(\psi_e) \quad (9)$$

$$|E_{\varphi\theta}| = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) \quad (10)$$

$$\psi_e = \arctg(\chi\rho + \omega t) \quad (11)$$

Угол между векторами  $H_{\varphi\theta}$  и  $E_{\varphi\theta}$  в плоскости  $P$  является прямым.

Следовательно, в сферическом конденсаторе можно рассматривать только один вектор электрической напряженности  $E_{\varphi\theta}$  и только один вектор магнитной напряженности  $H_{\varphi\theta}$ . Поскольку эти векторы лежат на сфере, будем называть их сферическими.

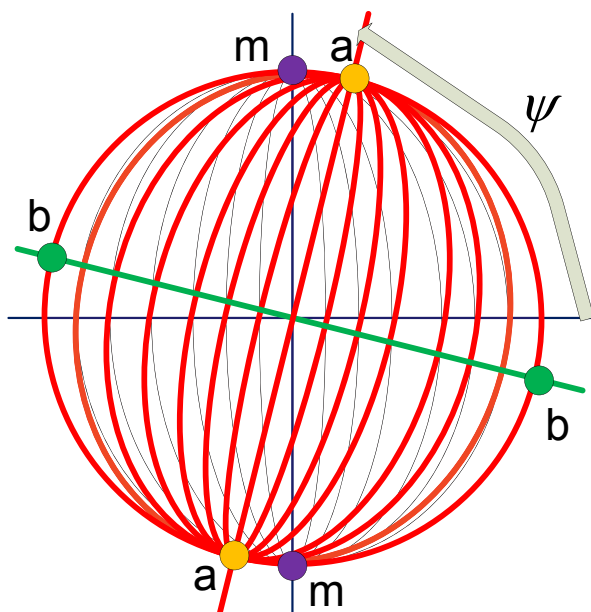


Рис. 4 (Sfera133.vsd).

Угол  $\psi$  одинаков для всех векторов  $H_{\varphi\theta}$  при данном радиусе  $\rho$ . Это означает, что на сфере с радиусом  $\rho$  направления всех векторов  $H_{\varphi\theta}$  составляют со всеми параллелями один и тот же угол  $\psi$ . Это означает, в свою очередь, что существует магнитная экваториальная плоскость, наклоненная к математической экваториальной плоскости на угол  $\psi$ , магнитная ось, магнитные полюса и магнитные меридианы, по которым направлены векторы  $H_{\varphi\theta}$  - см. рис. 4, где тонкими линиями обозначена математическая меридиональная сетка, толстыми линиями – магнитная меридиональная сетка, показаны математическая  $mm$ , магнитная  $aa$  и электрическая  $bb$  оси. Важно отметить, что магнитная  $aa$  и электрическая  $bb$  оси и, вообще, векторы  $E_{\varphi\theta}$  и  $H_{\varphi\theta}$  перпендикулярны.

При  $\frac{\omega}{c} \approx 0$  магнитная ось совпадает с математической.

Сферические векторы зависят от  $\sin(\theta)$ . Радиальные векторы зависят от  $\cos(\theta)$  - см. табл. 2. Поэтому в точках, где сферические напряженности равны нулю, существуют только радиальные напряженности.

## 4. Электромагнитная волна в заряженном сферическом конденсаторе

Решение уравнений Максвелла для заряжаемого плоского конденсатора (см. главу 7) является следствием решения этих уравнений для плоского конденсатора в цепи синусоидального тока (см. главу 3). Здесь мы воспользуемся методом, изложенным в главе 7, при решении уравнений Максвелла для заряжаемого сферического конденсатора.

Далее показывается, что в заряжаемом сферическом конденсаторе распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решением уравнений Максвелла. Показывается, что в заряженном конденсаторе существует стационарный поток электромагнитной энергии, а та энергия, которая содержится в конденсаторе и которую принято считать электрической потенциальной энергией, является электромагнитной энергией, хранящейся в конденсаторе в виде стационарного потока.

Для заряжаемого сферического конденсатора система уравнений Максвелла, представленная в таблицы 1А-2 главы 8, (второе решение), должна быть изменена, а именно, вместо уравнения (4)  $\operatorname{div}(E)=0$  должно быть использовано уравнение вида

$$\operatorname{div}(E)=Q(t), \quad (1)$$

где  $Q(t)$  - заряд на обкладке конденсатора, который появляется и возрастает в процессе заряда. Полученная таким образом система уравнений в частных производных имеет решение, которое является суммой частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы уравнений. Однородная система представлена в указанной таблицы, т.е. отличается от вновь полученной системы только отсутствием члена  $Q(t)$ . Частное решение при данном  $t$  является решением, связывающем электрическую напряженность  $E_\rho(t)$  в зазоре конденсатора и заряд  $Q(t)$ . Если  $E_\rho(t)$  меняется во времени, то должно существовать решение системы уравнений из указанной таблицы при данном  $E_\rho(t)$ . Именно это решение мы будем искать далее.

Таблица 6.

1	2
	$E_\theta = e_\theta \sin(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$E_\varphi = e_\varphi \sin(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$
	$E_\rho = \cos(\theta)(e_\rho(1 - \exp(\omega t)) + \bar{e}_\rho(\exp(\omega t) - 1))$
	$J_\rho = \cos(\theta)(j_\rho(\exp(\omega t) - 1) + \bar{j}_\rho(1 - \exp(\omega t)))$
	$H_\theta = h_\theta \sin(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$
	$H_\varphi = h_\varphi \sin(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$H_\rho = \cos(\theta)(h_\rho(\exp(\omega t) - 1) + \bar{h}_\rho(1 - \exp(\omega t)))$
	$M_\rho = \cos(\theta)(m_\rho(1 - \exp(\omega t)) + \bar{m}_\rho(\exp(\omega t) - 1))$

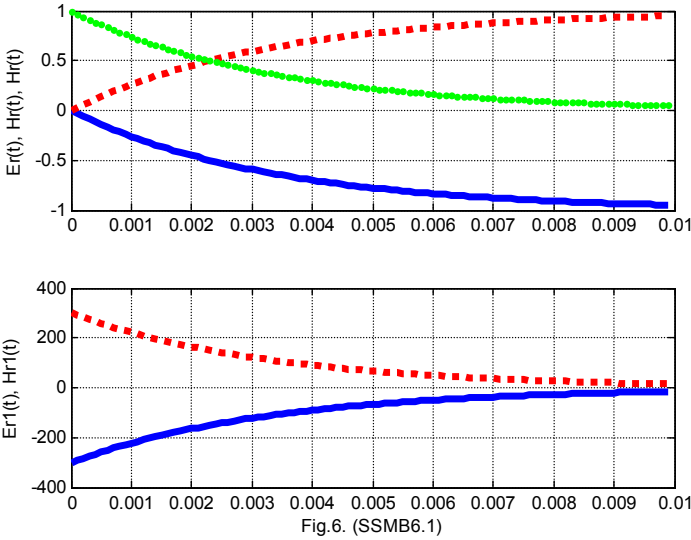


Fig.6. (SSMB6.1)

Рассмотрим напряженности в виде функций, представленных в табл. 6. Эти функции отличаются от приведенных в табл. 1 только видом зависимости от времени: в табл. 3 эти зависимости у функций  $E$ ,  $H$  имеет вид функций  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$  соответственно, а в табл. 6 эти зависимости у функций  $E$ ,  $H$  имеет вид функций  $(\exp(\omega t) - 1)$ ,  $(1 - \exp(\omega t))$  соответственно. Несмотря на указанную замену, при этом решение уравнений Максвелла остается неизменным. Здесь константа  $\omega = -1/\tau$ , где  $\tau$  - постоянная времени в цепи заряда конденсатора.

На рис. 6 показаны напряженности и их производные по времени, а также ток смещения, как функции времени, при  $\omega = -300$ :  $H_\rho$  - сплошные линии,  $E_\rho$  - пунктирные линии,  $J_\rho$  - точечная линия. Можно убедиться, что амплитуды всех напряженностей при  $t \Rightarrow \infty$  одновременно стремятся к постоянному значению, а амплитуда тока стремится к нулю. Это соответствует заряду конденсатора через постоянное сопротивление.

Таким образом, можно говорить, что сферический конденсатор представляет собой устройство, в котором присутствует и электрическое и магнитное поле. Таким образом, конденсатор – устройство, эквивалентное магниту и, одновременно, электрету, оси которых перпендикулярны.

По аналогии с разделом 3 в главе 8 рассмотрим поток радиальной энергии в заряжаемом сферическом конденсаторе. Для этого в формуле (8.3.4а) необходимо произвести следующую замену функций:

$$\sin(q) \Rightarrow (\exp(\omega t) - 1), \quad (2)$$

$$\cos(q) \Rightarrow (1 - \exp(\omega t)). \quad (3)$$

Тогда получим:

$$S_\rho = \frac{A}{\rho} \sin(\theta) (\exp(\omega t) - 1) \frac{B}{\rho} \sin(\theta) (\exp(\omega t) - 1) - \\ - \frac{A}{\rho} \sin(\theta) (1 - \exp(\omega t)) - \frac{B}{\rho} \sin(\theta) (1 - \exp(\omega t))$$

или

$$S_\rho = \frac{2AB}{\rho^2} \sin^2(\theta) (1 - \exp(\omega t))^2 \Rightarrow 0 \quad (4)$$

Таким образом, решение уравнений Максвелла для заряжаемого конденсатора и для конденсатора в цепи синусоидального тока отличаются только тем, что в первом случае присутствуют экспоненциальные функции времени, а во втором – синусоидальные.

# Глава 8b. О проектировании антенн

---

## Оглавление

О недостатках существующих методов \ 1

Приложение 1 \ 3

### **О недостатках существующих методов**

Решение уравнений Максвелла для сферической волны необходимо для проектирования антенн. Такая задача возникает при решении уравнений электродинамики для элементарного электрического диполя – вибратора. Решение этой задачи известно и именно на основе этого решения строятся антенны. Вместе с тем это решение обладает рядом недостатков, в частности [107-110],

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем,
2. решение неоднородно и практически необходимо разбивать его на отдельные зоны (как правило, ближнюю, среднюю и дальнюю), в которых решения оказываются полностью различными,
3. в ближней зоне отсутствует поток энергии с реальным значением
4. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
5. в ближней зоне решение не является волновым (т.е. расстояние не является аргументом тригонометрической функции),
6. известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (решение, удовлетворяющее одному уравнению системы, нельзя считать решением системы уравнений).

На рис. 1 [110] показана картина силовых линий электрического поля, построенная на основе известного решения. Очевидно, что такая картина не может существовать в сферической волне.



Вдали от вибратора – в т.н. дальней зоне, где продольными (направленными вдоль радиуса) электрической и магнитной напряженностями можно пренебречь, решение задачи упрощается. Но и там известное решение обладает рядом недостатков [107-110]. Основные недостатки этого решения (см. приложение 1) состоят в том, что

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем (по времени),
2. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
3. в системе уравнений Максвелла в известном решении выполняется только одно уравнение из восьми.

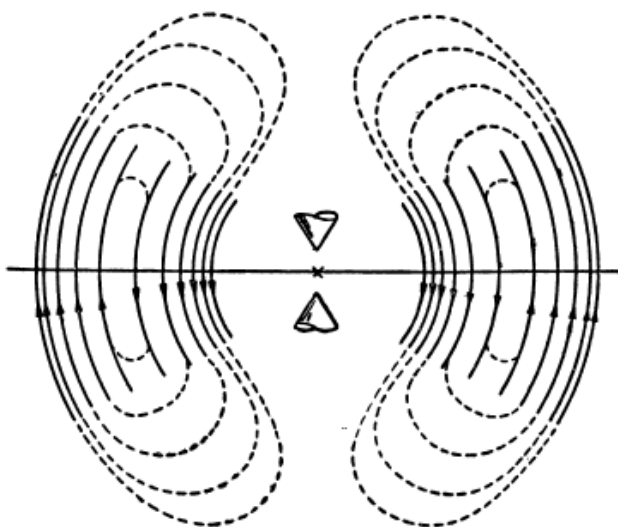


Рис. 1.

Указанные недостатки являются следствием того, что до настоящего времени не удавалось решить уравнения Максвелла для сферических координат. Известное решение получено после разбиения всей области на т.н. ближние, средние и дальние зоны и после применения множества предположений и допущений, различных для каждой из этих зон.

Практически эти недостатки известного решения означают, что они (математические решения) нестрого описывают реальные характеристики технических устройств. Строгое решение, полученное в главе 8, будучи примененным в системах проектирования таких устройств, безусловно, должно повысить их качество.

## Приложение 1

Известное решение имеет вид [107, 108]:

$$E_\theta = e_\theta \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi \rho), \quad (1)$$

$$H_\varphi = h_\varphi \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi \rho), \quad (2)$$

где  $k_{e\theta} = \frac{\chi^2 l}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0}$ ,  $k_{h\varphi} = \frac{\chi l}{4\pi}$ , где  $l$ ,  $I$  - длина и ток вибратора.

Заметим, что

$$\frac{e_\theta}{h_\varphi} = \frac{\chi}{\omega\varepsilon} \quad (3)$$

Надо отметить, что эти напряженности синфазны, что противоречит практической электротехнике.

Рассмотрим, как соотносятся уравнения (1, 2) с системой уравнений Максвелла – см. табл. 2. Напряженности (1, 2) входят только в уравнение (6) из табл. 2, имеющее вид

$$\operatorname{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Подставим (1, 2) в (5) и получим:

$$\begin{aligned} & -e_\theta \frac{\chi}{\rho} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) - \\ & -h_\varphi \frac{\chi \mu}{\rho c} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\frac{e_\theta}{h_\varphi} + \frac{\mu}{c} = 0. \quad (7)$$

Из сравнения (3) и (7) следует, что напряженности (1, 2) удовлетворяют уравнению (4). Остальные 7 уравнений Максвелла нарушаются. В уравнениях (2, 3, 5) из табл. 2 одно из слагаемых отличается от нуля, а другое равно нулю. Нарушение уравнений (1, 4, 7, 8) из табл. 2 показано выше в разделе 2. Итак,

**известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла.**

## Глава 9. Природа земного магнетизма

Известно, что электрическое поле Земли можно рассматривать, как поле "между обкладками сферического конденсатора" [51]. Этими обкладками являются поверхность Земли заряженная отрицательно, и ионосфера, заряженная положительно. Заряд этих оболочек поддерживается постоянным грозовой деятельностью атмосферы

Известно также о существовании магнитного поля Земли. Однако в этом случае отсутствует общепринятое объяснение источника этого поля. "Проблема происхождения и сохранения поля не решена по сей день" [52].

Далее мы рассмотрим гипотезу о том, что **магнитное поле Земли является следствие существования электрического поля Земли.**

В главе 8а рассматривается сферический конденсатор в цепи постоянного тока и показывается, что после заряда конденсатора, когда ток практически прекращается, в конденсаторе сохраняется стационарный поток электромагнитной энергии, а вместе с ним сохраняется электромагнитная волна. При этом в конденсаторе присутствует магнитное поле.

В главе 8а было показано, что в сферическом конденсаторе существует магнитная экваториальная плоскость, магнитная ось, магнитные полюса и магнитные меридианы, по которым направлены векторы  $H_{\varphi\theta}$  - см. рис. 4 в главе 8. Угол между магнитной осью и математической осью модели не может быть определен из математической модели. Тем более, не определен угол между магнитной осью и физической осью вращения Земли.

Сферические векторы зависят от  $\sin(\theta)$ . Радиальные векторы зависят от  $\cos(\theta)$  - см. табл. 6 в главе 8. Поэтому в точках, где сферические напряженности равны нулю, существуют только радиальные напряженности.

Из вышесказанного следует, что **магнитное поле Земли является следствие существования электрического поля Земли.**

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

На рис. 8 показано векторное поле  $H_{\varphi\theta}$  в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом  $|H_{\varphi\theta}| = 0.7$ ;  $\rho = 1$ . На рис. 9 показано векторное поле  $H_\rho$  в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом  $|H_\rho| = 0.4$ ;  $\rho = 1$ . Наконец, на рис. 10 показано векторное поле  $H = H_{\varphi\theta} + H_\rho$  в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом  $|H_{\varphi\theta}| = 0.3$ ;  $|H_\rho| = 0.2$ ;  $\rho = 1$ .

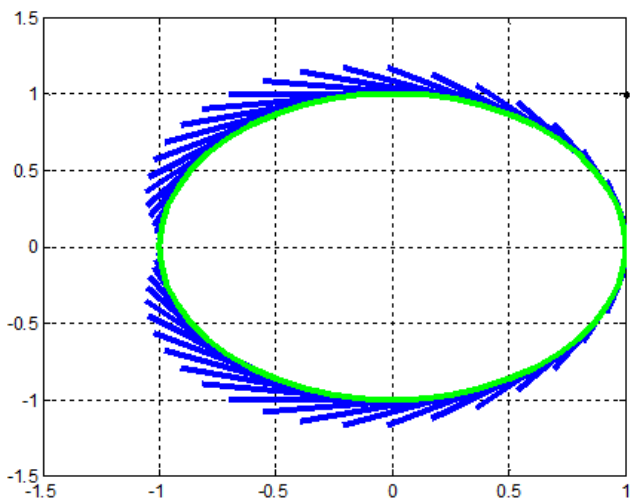


FIG. 8. (Sfera.88)

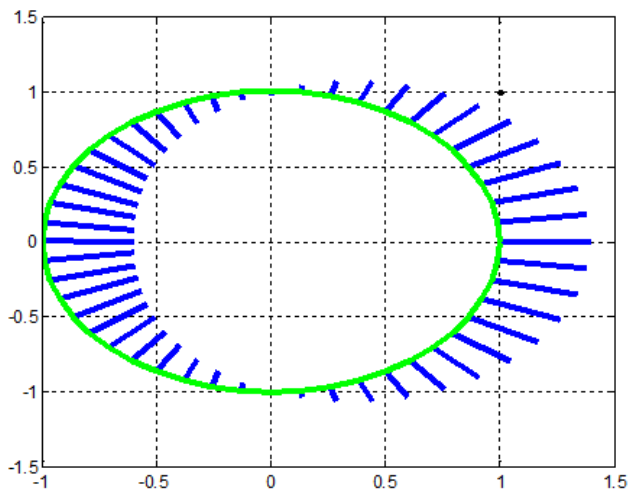
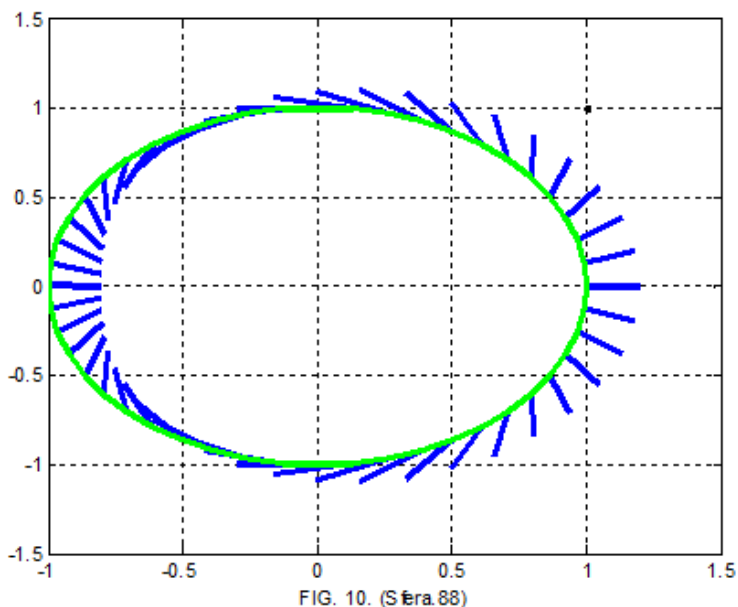


FIG. 9. (Sfera.88)



Аналогично можно описать электрическое поле Земли. Важно отметить, что электрическое поле перпендикулярно магнитному полю.

Еще раз подчеркнем, что само существование электрического поля не вызывает сомнения, а заряд "сферического конденсатора Земли" поддерживается грозовой деятельностью [51].

Рассмотрим еще сравнительные количественные оценки магнитной и электрической напряженностей поля Земли.

В вакууме, где  $\varepsilon = \mu = 1$ , и в системе СГС между магнитной и электрической напряженностью в любом направлении существует соотношение вида

$$E = H. \quad (9)$$

Это соотношения справедливо, если эти напряженности измеряются в системе СГС в данной точке в одном и том же направлении. Для перехода в систему СИ надо учесть, что

$$\begin{aligned} \text{для } H: 1 \text{ СГС} &= 80 \text{ А/м} \\ \text{для } E: 1 \text{ СГС} &= 30000 \text{ В/м} \end{aligned}$$

Таким образом, системе СИ выражение (9) принимает вид:

$$3000E = 80H \quad (10)$$

или

$$E \approx 0.03H. \quad (11)$$

или

$$H \approx 30E \cdot \operatorname{tg}(\beta). \quad (12)$$

Дополнительным аргументом в пользу существования электрического поля указанной структуры является существование теллурических токов [53]. Отсутствует общепринятое объяснение их причины. Исходя из вышеизложенного, следует полагать, что эти токи должны иметь максимум в направлении параллелей.

Возможно, электрическое поле Земли может быть обнаружено с помощью свободно подвешенного электрического диполя, выполненного в виде длинного изолированного стержня с металлическими шарами на концах. Возможно также, что при низкой частоте изменения зарядов диполя будут зафиксированы колебания стержня.

Исходя из предложенной гипотезы, можно предположить, что магнитное поле должно наблюдаться у планет, имеющих атмосферу. Действительно, магнитное поле отсутствует у Луны и Марса, лишенных атмосферы. Однако магнитное поле отсутствует и у Венеры. Возможно, это объясняется высокой плотностью и проводимостью атмосферы – атмосферу Венеры нельзя рассматривать как изолирующий слой сферического конденсатора.

# Глава 10. Решение уравнений Максвелла для шаровой молнии

---

## Оглавление

1. Введение \ 1
2. Решение уравнений Максвелла в сферических координатах \ 2
3. Энергия \ 3
4. Об устойчивости шаровой молнии \ 3
5. О свечении шаровой молнии \ 4
6. О времени существования шаровой молнии \ 4
7. О возможном механизме образования шаровой молнии \ 4

## 1. Введение

*Высказанные гипотезы о природе шаровой молнии неприемлемы, так как они противоречат закону сохранения энергии. Это происходит потому, что свечение шаровой молнии обычно относят за счет энергии, выделяемой при каком-либо молекулярном или химическом превращении, и таким образом предполагают, что источник энергии, за счет которого светится шаровая молния, находится в ней самой.*

Капица П.Л. 1955 [41]

Это утверждение (насколько известно автору) справедливо и сегодня. Оно усиливается еще и тем, что по современным оценкам, типичная шаровая молния содержит десятки килоджоулей [42], высвобождающихся при ее взрыве.

Общепризнано, что шаровая молния как-то связана с электромагнитными явлениями, однако нет строгого описания этих процессов.

В [56] на основе уравнений Максвелла была предложена математическая модель шаровой молнии, которая позволила объяснить многие свойства шаровой молнии. Эта модель оказалась сложной в математическом описании. Далее была предложена другая математическая модель шаровой молнии, более обоснованная и позволяющая получить менее сложное

математическое описание [56]. Кроме того, эта модель согласуется с моделью сферического конденсатора – см. главу 8.

При построении математической модели мы будем полагать, что шаровая молния представляет собой плазму - газ заряженных частиц - электронов и положительно заряженных ионов, а доля нейтральных атомов в ней пренебрежимо мала, то есть плазма шаровой молнии полностью ионизована. Кроме того, предполагаем, что в этой плазме число положительных зарядов равно числу отрицательных и в целом электрический заряд шаровой молнии равен нулю. В плазме принято рассматривать средние по некоторому элементарному объему плотности заряда и тока. Электрические и магнитные поля, создаваемые «средней» плотностью заряда и «средним» током в плазме, подчиняются уравнениям Максвелла [62]. Эффект столкновений частиц плазмы обычно описывают при помощи функции распределения частиц в плазме. Ниже мы эти эффекты будем учитывать в уравнениях Максвелла, полагая, что плазма обладает некоторым электрическим сопротивлением или проводимостью.

Итак, далее на основе уравнений Максвелла и представления об электропроводности тела шаровой молнии строится математическая модель шаровой молнии, показывается структура электромагнитного поля и электротоков в ней. Далее показывается (как следствие этой модели), что в шаровой молнии может циркулировать поток электромагнитной энергии и таким образом может сохраняться энергия, полученная шаровой молнией при ее возникновении. Кратко рассматриваются также устойчивость, свечение, заряд, время существования, механизм образования.

## 2. Решение уравнений Максвелла в сферических координатах

В главе 8, «Третье решение» получено решение уравнений Максвелла для сферы, материал которой имеет диэлектрическую и магнитную проницаемость, а также обладает проводимостью. Это решение получено в предположении, что сфера нейтральна (не имеет нескомпенсированных зарядов). Это решение, очевидно, не является единственным. Существование решения означает, что в электропроводной и нейтральной сфере может существовать электромагнитная волна и циркулировать токи смещения и токи проводимости.



### 3. Энергия

Из полученного следует, что в такой сфере имеются

- активная энергия потерь  $W_a$ ,
- реактивная электрическая энергия  $W_e$ ,
- реактивная магнитная энергия  $W_h$ .

Вместе с тем в каждой точке шара этот закон не выполняется. Следовательно, существуют перетоки энергии между точками шара.

### 4. Об устойчивости шаровой молнии

Вопрос об устойчивости тел, в которых циркулирует поток электромагнитной энергии, рассмотрен в [43].

Здесь мы рассмотрим только силу, которая действует по диаметру и разрывает шаровую молнию по диаметральной плоскости, перпендикулярной этому диаметру. В первый момент она должна совершить работу

$$A = F \frac{dR}{dt}. \quad (1)$$

Эта работа изменяет внутреннюю энергию шаровой молнии, т.е.

$$A = \frac{dW}{dt}. \quad (2)$$

Рассматривая (1, 2) совместно находим:

$$F = \frac{dW}{dt} \bigg/ \frac{dR}{dt}. \quad (3)$$

Если энергия шаровой молнии пропорциональна объему, т.е.

$$W = aR^3. \quad (4)$$

где  $a$  – коэффициент пропорциональности, то

$$\frac{dW}{dt} = 3aR^2 \frac{dR}{dt}. \quad (5)$$

Тогда

$$F = \frac{dW}{dt} \bigg/ \frac{dR}{dt} = 3aR^2 = \frac{3W}{R}. \quad (6)$$

Таким образом, внутренняя энергия шаровой молнии эквивалентна силе, создающей устойчивость шаровой молнии.

## 5. О свечении шаровой молнии

Выше задача была решена с учетом электрического сопротивления шаровой молнии. Естественно, оно не равно нулю и при протекании токов по этому сопротивлению в нем выделяется тепловая энергия. Эта тепловая энергия выделяется радиальным потоком энергии через внешнюю сферу шаровой молнии, т.е. излучается, что и является причиной свечения шаровой молнии.

## 6. О времени существования шаровой молнии

Энергия шаровой молнии  $W$  и мощность тепловых потерь  $P$  могут быть найдены при полученном выше решении.

Время существования шаровой молнии равно времени преобразования электрической энергии молнии в тепловые потери, т.е.

$$\tau = W/P \quad (1)$$

## 7. О возможном механизме образования шаровой молнии

Лидер линейной молнии, встречая какое-либо препятствие, может изменить траекторию движения с прямолинейной на круговую. Это может служить причиной возникновения тех электромагнитных полей и электротоков, которые описаны выше.

Вот как описывается этот процесс в [44]

*Очередной сильнейший разряд молнии, одновременный с грохотом, осветил всё пространство. Я вижу, как длинный ослепительный луч цвета солнца приближается ко мне прямо в солнечное сплетение. Конец его острый, чем дальше, тем толще, примерно 0,5 метра в длину. Дальше я не вижу, потому что смотрю под углом вниз.*

*Мгновенная мысль, это конец. Я смотрю, как острие луча приближается. Вдруг оно остановилось и между острием и телом начал вступать шар, размером с большой грейпфрут. Раздался хлопок, как при вылете пробки из бутылки шампанского. Луч влетел в шар. Я вижу ослепительно яркий шар, цвета солнца, который вращается с бешеной скоростью, перемалывая луч внутри. Но я не чувствую ни прикосновения, ни тепла.*

*Шар перемалывал луч и увеличивался в размерах. ... Шар не издавал никаких звуков. Сначала он был ярким и непрозрачным, а затем начал тускнеть и я увидел, что он пуст. Его оболочка изменилась и он стал похож на мыльный пузырь. Оболочка вращалась, но ее диаметр оставался стабильным, а поверхность отливала металлом.*

# Глава 11. Математическая МОДЕЛЬ ПЛАЗМЕННОГО КРИСТАЛЛА

---

## Оглавление

1. Постановка задачи \ 1
2. Система уравнений \ 4
3. Первая математическая модель \ 5
4. Вторая математическая модель \ 7
5. Энергия плазменного кристалла \ 10

### 1. Постановка задачи

Пылевая плазма (см. [87]) представляет собой множество заряженных частиц. Эти "частицы могут выстраиваться в пространстве определённым образом и образовывать так называемый плазменный кристалл" [88]. Механизм образования, поведение и формы таких кристаллов трудно предсказуемы. В условиях слабой гравитации наблюдения этих процессов и форм вызывает удивление – см. иллюстрации (рис. 1) экспериментов в космосе из [89].

Поэтому в 2007 г. было выполнено их компьютерное моделирование. Результаты вызвали еще большее удивление, что отразилось даже в названии соответствующей статьи [90]: "От плазменных кристаллов и спиральных структур к неорганической живой материи". В [91] приведено краткое изложение и обсуждение результатов моделирования.

Мне тоже нравятся такие сопоставления. Но, тем не менее, надо отметить, что используемый авторами метод моделирования молекулярной динамики не полностью учитывает все особенности пылевой плазмы. В этом методе для описания движения частиц применяется классическая механика и рассматриваются только электростатические силы взаимодействия между заряженными частицами. В действительности же при движении заряженных частиц возникают токи зарядов – электрические токи и, как следствие, электромагнитные поля. Их необходимо учитывать при моделировании.

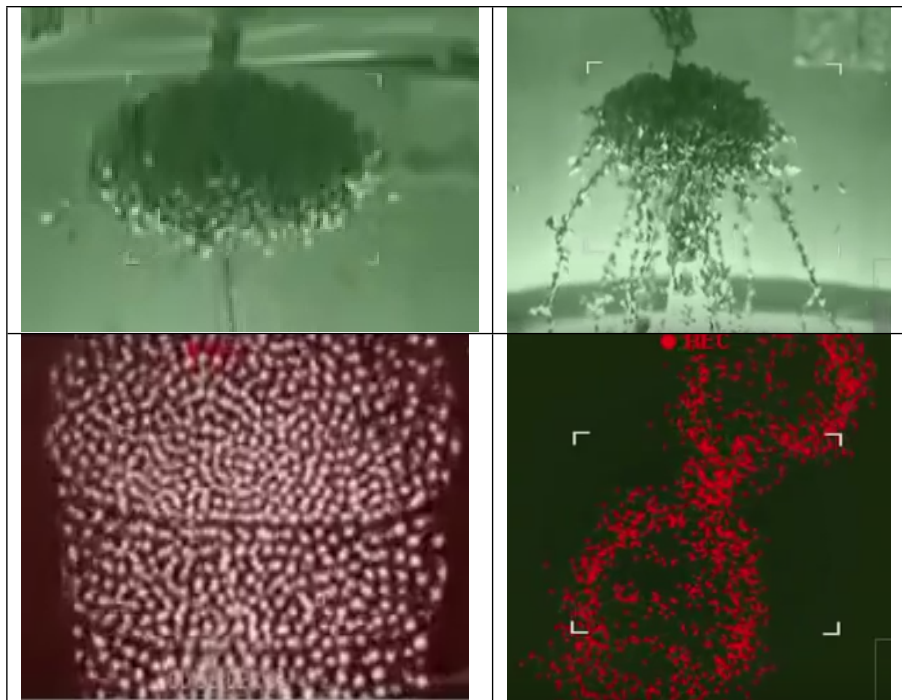


Рис. 1.

В невесомости на частицы плазмы не воздействуют гравитационные силы. Если исключить из рассмотрения энергию излучения, то можно утверждать, что пылевая плазма представляет собой электрические заряды, электрические токи и электромагнитные поля. Кроме того, плазма в момент образования (заполнения некоторого сосуда множеством заряженных частиц) получает некоторую энергию. Эта энергия может быть только электромагнитной энергией и кинетической энергией частиц, поскольку механическое взаимодействие частиц отсутствует: они заряжены одноименными зарядами. Итак, пылевая плазма должна удовлетворять следующим условиям:

- удовлетворять уравнениям Максвелла,
- сохранять суммарную энергию, как сумму электромагнитной энергии и кинетической энергии частиц,
- приобрести через некоторое время стабильную структуру расположения и движения частиц; это следует, например, из упомянутых экспериментов в космосе – см. рис. 1.

Очевидно, заряженные частицы отталкиваются силами Кулона. Однако эксперименты показывают, что эти силы не действуют на периферии облака частиц. Следовательно, они компенсируются другими силами. Ниже будет показано, что этими силами являются силы Лоренца, возникающие при движении заряженных частиц (хотя на первый взгляд кажется странным, что эти силы направлены внутрь облака, противодействуя силам Кулона). Частицы не могут быть неподвижными, поскольку тогда будут превалировать силы Кулона. Но тогда эти силы приведут частицы в движение, благодаря которому возникнут силы Лоренца и т.д.

Ниже в математической модели мы не будем учитывать силы Кулона, полагая, что их роль сводится только к тому, чтобы изолировать частицы друг от друга (подобно тому, как эти силы не учитываются в задачах электротехники).

Итак, мы будем рассматривать пылевую плазму как область, где текут электротоки и анализировать ее с помощью уравнений Максвелла. Поскольку частицы находятся в вакууме и всегда изолированы друг от друга, то отсутствует омическое сопротивление и отсутствует электрическая напряженность, пропорциональная току – ее не надо учитывать в уравнениях Максвелла. Кроме того, на первом этапе мы будем полагать, что токи изменяются медленно – являются постоянными токами. С учетом этих замечаний уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot}(H) - J = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (3)$$

где  $J$ ,  $H$  - ток и магнитная напряженность соответственно. Кроме того, к этим уравнениям необходимо добавить уравнение, связывающее энергию  $W$  плазмы с  $J$ ,  $H$

$$W = f(J, H). \quad (4)$$

В этом уравнении энергия  $W$  является известной, поскольку плазма в момент образования получает эту энергию.

В скалярном виде система уравнений (1-4) является системой 6-ти уравнений с 6-ю неизвестными и должна иметь единственное решение. Однако регулярный алгоритм решения такой системы отсутствует. Поэтому ниже предлагается другой подход:

1. Поиск аналитических решений недоопределенной системы уравнений (1-3) при данной форме облака плазмы. Таких решений может быть множество.

2. Вычисление энергии  $W$  по (4). Если решение системы (1-4) является единственным, то тем самым решена система (1-4) при данных  $W$  и форме облака.

## 2. Система уравнений

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$ , как известно [4],

дивергенция и ротор вектора  $H$  имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left( \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}_r(H) = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}_\varphi(H) = \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (c)$$

$$\operatorname{rot}_z(H) = \left( \frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right). \quad (d)$$

С учетом уравнений (a-d) перепишем уравнения (1.1-1.3) в следующем виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Система 5-ти уравнений (1-5) относительно 6-ти неизвестных  $(H_r, H_\varphi, H_z, J_r, J_\varphi, J_z)$  является переопределенной и может иметь множество решений. Ниже показывается, что такие решения существуют и для различных случаев определяются некоторые из возможных решений.

Будем вначале искать решение этой системы уравнений (1-5) в виде функций, сепарабельных относительно координат. Эти функции имеют следующий вид:

$$H_{r.} = h_r(r) \cdot \cos(\chi z), \quad (6)$$

$$H_{\varphi.} = h_{\varphi}(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (7)$$

$$H_{z.} = h_z(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (8)$$

$$J_{r.} = j_r(r) \cdot \cos(\chi z), \quad (9)$$

$$J_{\varphi.} = j_{\varphi}(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (10)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (11)$$

где  $\chi$  – некоторая константа, а  $h_r(r)$ ,  $h_{\varphi}(r)$ ,  $h_z(r)$ ,  $j_r(r)$ ,  $j_{\varphi}(r)$ ,  $j_z(r)$  – функции от координаты  $r$ ; производные этих функций будем обозначать штрихами.

Подставляя (6-11) в (1-5), получаем:

$$\frac{h_r}{r} + h'_r + \chi h_z = 0, \quad (12)$$

$$-\chi h_{\varphi} = j_r, \quad (13)$$

$$-\chi h_r - h'_z = j_{\varphi} \quad (14)$$

$$\frac{h_{\varphi}}{r} + h'_{\varphi} = j_z, \quad (15)$$

$$\frac{j_r}{r} + j'_r + \chi j_z = 0. \quad (16)$$

Подставим (13) и (15) в (16). Тогда получим:

$$\frac{-\chi h_{\varphi}}{r} - \chi h'_{\varphi} + \chi \left( \frac{h_{\varphi}}{r} + h'_{\varphi} \right) = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) является тождеством  $0=0$ . Поэтому (16) следует из (13, 15) и может быть исключено из системы уравнений (12-16). Оставшиеся уравнения перепишем в виде:

$$h_z = -\frac{1}{\chi} \left( \frac{h_r}{r} + h'_r \right), \quad (18)$$

$$j_z = \frac{h_{\varphi}}{r} + h'_{\varphi}, \quad (19)$$

$$j_r = -\chi h_{\varphi}, \quad (20)$$

$$j_{\varphi} = -\chi h_r - h'_z \quad (21)$$

### 3. Первая математическая модель

В этой системе 4-х дифференциальных уравнений (18-21) с 6-ю неизвестными функциями можно произвольным образом

определить две функции. Для дальнейшего мы определим следующие две функции:

$$h_\varphi = q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi), \quad (22)$$

$$h_r = h \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi), \quad (23)$$

где  $q, h$  - некоторые константы. Тогда из (18-23) найдем:

$$h_z = -\frac{h}{\chi} \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{\pi \cdot r}{\chi} \cos(\pi \cdot r / \chi) \right), \quad (24)$$

$$j_z = q \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{\pi \cdot r}{\chi} \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi) \right), \quad (25)$$

$$j_r = -\chi \cdot q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi) \quad (26)$$

$$j_\varphi = h \cdot \left( \frac{\pi^2}{\chi R^2} - \chi \right) \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{h}{\chi} \left( 2 - \frac{\pi}{\chi} \right) \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi). \quad (27)$$

Таким образом, функции  $j_r(r), j_\varphi(r), j_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r)$  определяются по (26, 27, 25, 23, 22, 24) соответственно.

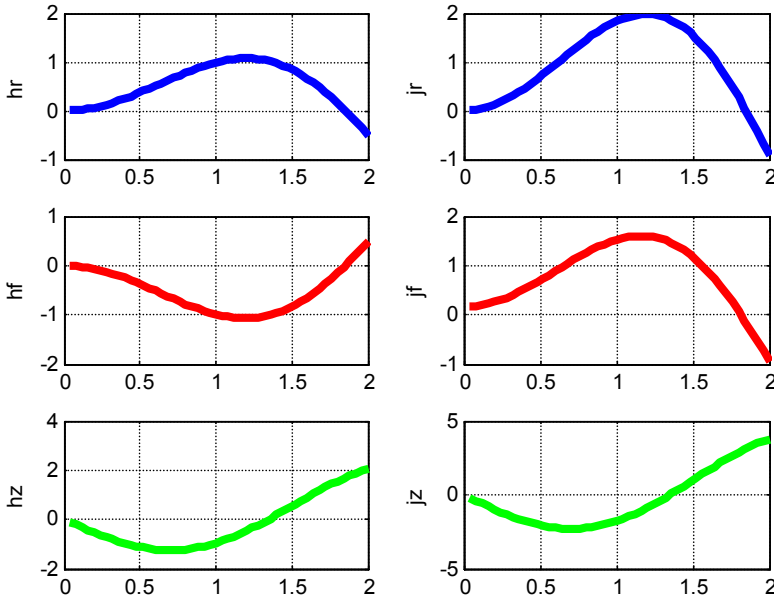


FIG. 2 (figPlazma.m)

**Пример 1.**

На рис. 2 показаны графики функций  $j_r(r), j_\varphi(r), j_z(r), h_r(r), h_\varphi(r), h_z(r)$ . Эти функции вычисляются



при данных  $\chi = 1.85$ ,  $h = 1$ ,  $q = -1$ . В первой колонке показаны функции  $h_r(r)$ ,  $h_\varphi(r)$ ,  $h_z(r)$ , во второй колонке показаны функции  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$ ,  $j_z(r)$ .

Здесь важно отметить, что на графике функций  $j_r(r)$ ,  $j_\varphi(r)$  существует точка, где  $j_r(r) = 0$  и  $j_\varphi(r) = 0$ . Физически это означает, что в области  $r < \chi$  существуют радиальные токи  $J_r(r)$ , направленные от центра (при  $\chi q < 0$ ). В точке  $r = \chi$  токи  $J_r(r)$ ,  $J_\varphi(r)$  отсутствуют. Поэтому величина  $R = \chi$  является радиусом кристалла. Пылинки, попавшие за пределы этого радиуса, испытывают радиальные токи  $J_r(r)$ , направленные к центру. Тем самым создается устойчивая граница кристалла.

Построенная модель описывает цилиндрический кристалл бесконечной длины, что, конечно же, не соответствует реальности. Рассмотрим теперь более сложную модель.

#### 4. Вторая математическая модель

Корень уравнения  $j_r(r) = 0$  определял величину  $R = \chi$  радиуса цилиндрического кристалла. Будем теперь изменять величину  $\chi$ . Если величина  $\chi$  будет зависеть от  $z$ , то и радиус  $R$  будет зависеть от  $z$ . Но именно такая зависимость наблюдается в экспериментах – см., например, первый фрагмент на рис. 1.

Имея это в виду рассмотрим математическую модель, отличающуюся от использованной выше, тем, что вместо константы  $\chi$  используется функция  $\chi(z)$ . Перепишем (6-11) с учетом этого:

$$H_{r.} = h_r(r) \cdot \cos(\chi(z)), \quad (28)$$

$$H_{\varphi.} = h_\varphi(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (29)$$

$$H_{z.} = h_z(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (30)$$

$$J_{r.} = j_r(r) \cdot \cos(\chi(z)), \quad (31)$$

$$J_{\varphi.} = j_\varphi(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (32)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin(\chi(z)). \quad (33)$$

Система уравнений (1-6) отличается от системы (2.9-2.14) только тем, что вместо константы  $\chi$  используется производная  $\chi'(z)$  по  $z$  от функции  $\chi(z)$ . Следовательно, и решение системы (28-33) будет отличаться от решения системы от предыдущего

только тем, что вместо константы  $\chi$  используется производная  $\chi'(z)$ . Таким образом, решение в этом случае примет следующий вид:

$$j_r = -\chi'(z) \cdot q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (34)$$

$$j_\phi = \left[ \begin{aligned} &h \cdot \left( \frac{\pi^2}{\chi'(z)R^2} - \chi'(z) \right) \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \\ &+ \frac{h}{\chi'(z)} \left( 2 - \frac{\pi}{\chi'(z)} \right) \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \end{aligned} \right], \quad (35)$$

$$j_z = q \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \frac{\pi \cdot r}{R} \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \right), \quad (36)$$

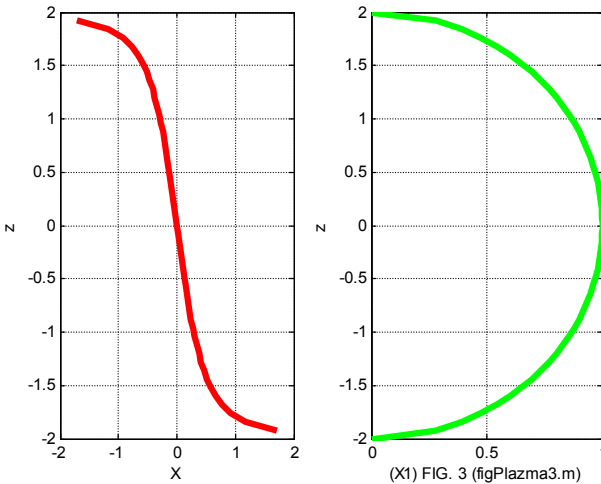
$$h_r = h \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (37)$$

$$h_\phi = q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (38)$$

$$h_z = -\frac{h}{\chi'(z)} \left( 2 \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \frac{\pi \cdot r}{R} \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \right). \quad (39)$$

Указанные функции будут зависеть от  $\chi'(z)$ . При  $\chi(z) = \eta z$  уравнения (34-39) превращаются в уравнения (22-27).

Например, на рис. 3 показаны функции  $\chi(z)$  и  $\chi'(z)$ , где  $\chi'(z)$  - уравнение эллипса.



(X1) FIG. 3 (figPlazma3.m)

Можно полагать, что ток пылинок таков, что их средняя скорость не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный пылинкой в единицу

времени по окружности, и путь, пройденный ею по вертикали, будут равны. Следовательно, в этом случае при фиксированном радиусе можно полагать, что

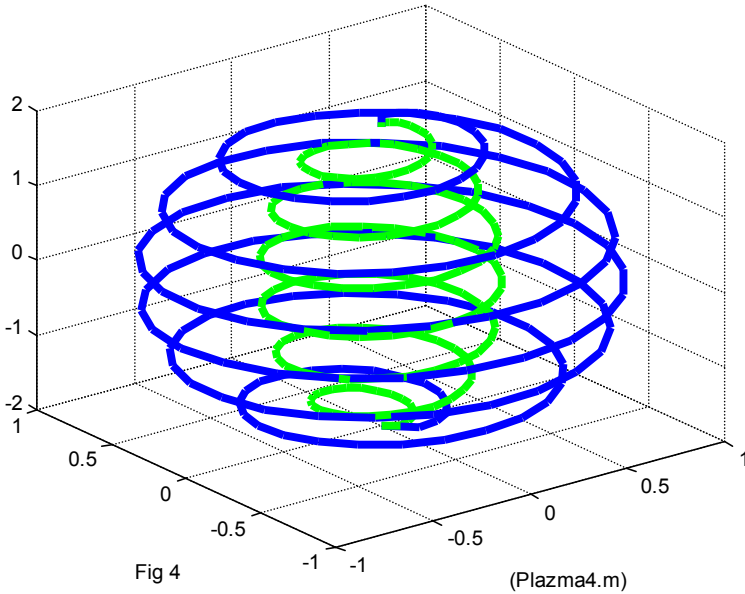
$$\Delta\varphi \equiv \Delta z. \quad (40)$$

В рассмотренной выше системе траектория пылинок описывается формулами

$$co = \cos(\chi(z)), \quad (41)$$

$$si = \sin(\chi(z)). \quad (42)$$

Таким образом, в такой системе на фигуре вращения радиусом  $r = \chi'(z)$  существует траектория точки, описываемая формулами (40-42). Такая траектория является винтовой линией. На этой траектории все напряженности и плотности токов не зависят от  $\varphi$ .



На основе этого предположения можно построить траекторию движения пылинок в соответствии с функциями (1-3). На рис. 4 показаны две винтовые, описываемые функциями  $j_r(r)$  и  $j_z(r)$  тока: при  $r_1 = \chi'(z)$  при  $r_2 = 0.5\chi'(z)$ , где  $\chi'(z)$  определена на рис. 3.

## 5. Энергия плазменного кристалла

При известных магнитных напряженностях и плотностях тока можно найти энергию плазменного кристалла. Плотность энергии магнитного поля

$$W_H = \frac{\mu}{2} (H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2). \quad (43)$$

Плотность кинетической энергии пылинок  $W_J$  найдем в предположении, что все пылинки имеют одинаковую массу  $m$ . Тогда

$$W_J = \frac{1}{m} (J_\varphi^2 + J_\varphi^2 + J_\varphi^2). \quad (44)$$

Для определения полной энергии кристалла необходимо проинтегрировать (43, 44) по объему кристалла, форма которого определена. Таким образом, при определенной форме кристалла и принятой математической модели могут быть найдены все характеристики кристалла.

---

## Глава 12. Работа силы Лоренца

Ниже доказывается, что сила Лоренца совершает работу, и выводятся соотношения, определяющие величину этой работы.

Магнитная сила Лоренца определяется формулой вида

$$F = qQ(V \times B), \quad (1)$$

где

$q$  - плотность электрического заряда,

$Q$  - объем заряженного тела,

$V$  - скорость заряженного тела (вектор),

$B$  - магнитная индукция (вектор).

Работа силы Лоренца равна нулю, поскольку векторы силы и скорости всегда ортогональны – см. рис. 1.

Сила Ампера определяется формулой вида

$$A = Q(j \times B), \quad (2)$$

где  $j$  - плотность электрического тока (вектор). Поскольку

$$j = qV, \quad (3)$$

то формулу (2) можно записать в виде

$$A = qQ(V \times B). \quad (4)$$

Можно заметить, что формулы (1, 4) совпадают. Между тем работа силы Ампера НЕ равна нулю, что подтверждается существованием электромоторов. Следовательно, **работа силы Лоренца НЕ равна нулю**. Таким образом, определение механической силы через работу нельзя распространять на силу Лоренца.

Рассмотрим, **каким образом сила Лоренца выполняет работу**.

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется по формуле:

$$S = E \times H, \quad (5)$$

где

$E$  - напряженность электрического поля (вектор),

$H$  - напряженность магнитного поля (вектор).

Токам соответствуют электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho j, \quad (6)$$

где  $\rho$  - удельное электросопротивление. Совмещая (5, 6), как в главе 5, получаем:

$$S = \rho j \times H = \frac{\rho}{\mu} j \times B. \quad (7)$$

где  $\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость. Магнитная сила Лоренца, действующая на все заряды проводника в единичном объеме, - объемная плотность силы Лоренца равна (как следует из (1))

$$f = qV \times B. \quad (8)$$

Из (3, 8) находим:

$$f = qV \times B = j \times B. \quad (9)$$

Из (7, 9) находим:

$$f = \mu S / \rho. \quad (10)$$

Следовательно, плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна плотности электромагнитной энергии - вектору Пойнтинга.

Поток энергии с плотностью  $S$  эквивалентен плотности мощности  $p$ , т.е.

$$p = S. \quad (11)$$

Следовательно, плотность магнитной силы Лоренца пропорциональна плотности мощности.

**Пример 1.** Для проверки рассмотрим размерности величин в вышеприведенных формулах в системе СИ – см. табл. 1.

Параметр		Размерность
Энергия		кг·м <sup>2</sup> ·с <sup>-2</sup>
Плотность энергии		кг·м <sup>-1</sup> ·с <sup>-2</sup>
Мощность	<b>P</b>	кг·м <sup>2</sup> ·с <sup>-3</sup>
Плотность потока энергии, плотность мощности	<i>S</i>	кг·с <sup>-3</sup>
Плотность тока	<i>j</i>	А·м <sup>-2</sup>
Индукция	<i>B</i>	кг·с <sup>-2</sup> ·А
Объемная плотность силы Лоренца	<i>f</i>	Н·м <sup>-3</sup> =кг·с <sup>-3</sup> ·м <sup>-2</sup>
Магнитная проницаемость	$\mu$	кг·с <sup>-2</sup> ·м·А <sup>-2</sup>
Удельное сопротивление	$\rho$	кг·с <sup>-3</sup> ·м <sup>3</sup> ·А <sup>-2</sup>
$\mu/\rho$	$\mu/\rho$	с·м <sup>-2</sup>

Итак, ток с плотностью  $j$  и магнитное поле с индукцией  $B$  создают поток энергии с плотностью  $S$  (или мощность с плотностью  $p$ ), который тождественен магнитной силе Лоренца с плотностью  $f$  - см. (11) или

$$f = \mu p / \rho. \quad (12)$$

Таким образом, сила Лоренца с плотностью  $f$  и тождественный ей поток энергии с плотностью  $S$  (или мощность с плотностью  $p$ ), действует на заряды, движущиеся в токе  $J$ , в направлении, перпендикулярном этому току. Следовательно, можно утверждать, что вектор Пойнтинга (или мощность с плотностью  $p$ ) создает э.д.с. в проводнике. Этот вопрос с другой стороны рассмотрен в [19, 17], где такая э.д.с. названа четвертым видом электромагнитной индукции.

Рассмотрим э.д.с., создаваемую силой Лоренца. Напряженность, эквивалентная силе Лоренца, действующей на единичный заряд, равна

$$e_f = \frac{f}{q} = \frac{p\mu}{q\rho}, \quad (13)$$

а ток, создаваемый силой Лоренца в направлении этой силы, имеет плотность

$$i = e_f \rho = \frac{p\mu}{q}. \quad (14)$$

Если известен ток  $I$ , создаваемый силой Лоренца в сопротивлении  $R$ , то

$$U = e_f \rho = I \left( R + \rho \frac{l}{s} \right), \quad (15)$$

где  $l$ ,  $s$  - длина и сечение проводника, в котором действует сила Лоренца. Из (15) находим:

$$I = e_f \rho / \left( R + \rho \frac{l}{s} \right) = e_f / \left( \frac{R}{\rho} + \frac{l}{s} \right). \quad (16)$$

Полная мощность

$$P = pls. \quad (17)$$

Наконец, из (13, 16, 17) получаем:

$$I = \frac{P\mu}{qls} \bigg/ \left( R + \rho \frac{l}{s} \right) = \frac{P\mu}{ql} \bigg/ (sR + \rho l), \quad (18)$$

$$U = \frac{P}{I} = \frac{ql}{\mu} (sR + \rho l). \quad (19)$$

Из этих формул по результатам измерения  $U$  и  $I$  может быть найдена плотность зарядов, находящихся под действием силы Лоренца.



# Литература

*Примечание:* **Vixra**, <http://vixra.org>,  
**DNA** – Доклады независимых авторов,  
ISSN 2225-6717, <http://dna.izdatelstwo.com/>

1. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
2. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvella.html>
3. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
5. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, ViXra, 2016-01-26, <http://vixra.org/abs/1601.0292>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#).
6. Хмельник С.И. Математическая модель электрического торнадо, ViXra, 2015-04-11, <http://vixra.org/abs/1504.0088>; DNA, № 33, 2015, см. [здесь](#).
7. Хмельник С.И. Вторая структура постоянного тока, ViXra, 2015-11-21, <http://vixra.org/abs/1511.0206>; DNA, № 35, 2016, см. [здесь](#). (916)
8. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с переменным током, ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0068> (744)
9. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, DNA-32, ID16319679, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0048> (747)
10. Хмельник С.И. Структура постоянного тока, DNA-33, ID16537771, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1503.0241> (748)
11. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током, DNA-33, ID16537771, 2015; ViXra, <http://vixra.org/abs/1504.0061> (749)
12. Торшин В.В., Бусыгин Б.П., Пащенко Ф.Ф., Круковский Л.Е. Эффект генерации постоянного электрического тока

- в неподвижном проводнике в постоянном магнитном поле. Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова. Альманах современной науки и образования, вып 12, 2008, <http://cyberleninka.ru/article/n/effekt-generatsii-postoyannogo-elektricheskogo-toka-v-nepodvizhnom-provodnike-v-postoyannom-magnitnom-pole>
13. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. Москва, изд. "Мир", 1966.
  14. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, Vixra, 1510.0396, 2015-10-26, <http://vixra.org/abs/1510.0396>
  15. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в проводе переменного тока, Vixra, 1603.0020, 2016-03-02, <http://vixra.org/abs/1603.0020>
  17. Хмельник С.И. Эксперимент, подтверждающий существование четвертой электромагнитной индукции, ViXra, <http://vixra.org/abs/1601.0215>
  18. Хмельник С.И. Сила Хмельника, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0075>
  19. Хмельник С.И. Четвертая электромагнитная индукция, «Доклады независимых авторов», DNA-31, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1412.0214>
  20. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Рельсотрон>
  21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.
  22. Тамм И.Е. Основы теории электричества, Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003, стр. 547.
  23. Хмельник С.И. Униполярный двигатель Фарадея и закон сохранения импульса, DNA-23, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1404.0428>
  24. Хмельник С.И. К вопросу о внутриядерных силах DNA-27, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1405.0296>
  25. Хмельник С.И. Силы Лоренца, Ампера и закон сохранения импульса. Количественный анализ и следствия, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0065>
  26. Хмельник С.И. Принцип обратимости в униполярных машинах Фарадея, DNA-30, а также Vixra - <http://vixra.org/abs/1407.0145>
  27. Хмельник С.И. Эксперимент для доказательства

- нарушения третьего закона Ньютона в униполярном двигателе, Vixra - <http://vixra.org/abs/1501.0061>
28. Стребков Д.С. Передача электрической энергии без металлических проводов, <http://www.electrolibrary.info/tesla/peredachaenergii.htm>
  29. Ротхаммель К. Антенны, изд. "Энергия", 1967, [http://www.radiouniverse.ru/book/antenny/2-1-antenna-v-  
vide-dlinnogo-provoda](http://www.radiouniverse.ru/book/antenny/2-1-antenna-v-vide-dlinnogo-provoda)
  30. Заев Н.Е. Сверхпроводники инженера Авраменко. "Техника - молодежи", №1, М., 1991.
  31. Изобретатель и рационализатор, 1992, №5, 6, 1-32
  32. Кулигин В.А., Корнева М.В., Кулигина Г.А., Большаков Г.П. Безинерциальные заряды и токи, [http://www.n-  
t.ru/ac/iga/](http://www.n-t.ru/ac/iga/)
  33. M. Lobo, G. Shipov, Tawatchai Laosirihongthong, Supakit Chotigo. Экспериментальное обнаружение скалярного электромагнитного поля. King Mongkut's University of Technology, Thonburi, Bangkok, 10140, Thailand, [http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/1032-  
MonopolE.pdf](http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/1032-MonopolE.pdf)
  34. Заев Н.Е., Авраменко С.В., Лисин В.Н. Измерение тока проводимости, возбуждаемого поляризационным током. <http://rusphysics.ru/dissertation/269/>
  35. Косинов Н.В. Эксперименты по беспроводной передаче энергии: подтверждение революционных идей Н. Тесла, <http://kosinov.314159.ru/kosinov31.htm>
  36. Википедия, Уравнения Максвелла, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения\\_Максвелла](https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла)
  37. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в диэлектрической и магнитной цепи, Vixra - <http://vixra.org/abs/1604.0019>
  38. Leedskalnin "Perpetual Motion Holder" (ПМН) Bond Effect [http://peswiki.com/index.php/Directory:Leedskalnin\\_%22P  
erpetual\\_Motion\\_Holder%22\\_\(ПМН\)\\_Bond\\_Effect](http://peswiki.com/index.php/Directory:Leedskalnin_%22Perpetual_Motion_Holder%22_(ПМН)_Bond_Effect)
  39. Хмельник С.И. К теории хранителя вечного движения, DNA-23, ID 13514159, 2013; Vixra, <http://vixra.org/abs/1404.0086>
  40. Закон Кулона, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон\\_Кулона](https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Кулона)
  41. Капица П.А. О природе шаровой молнии. ДАН СССР 1955. Том 1.
  42. <http://www.wikiznanie.ru/ru->

- [wz/index.php/Шаровая молния](http://wz/index.php/Шаровая_молния)
43. Хмельник С. И. К вопросу о внутриядерных силах. «Доклады независимых авторов», DNA-27, 2014, ID 14739921; *а также* <http://vixra.org/abs/1405.0296>
  44. Анатолий Мякеляйнен (Финляндия), Валерий Буераков (Украина). Полет на шаровой молнии, [https://drive.google.com/file/d/0B4rZDrYTBG\\_pMFZ1RFNOd2hSTDA/edit](https://drive.google.com/file/d/0B4rZDrYTBG_pMFZ1RFNOd2hSTDA/edit)
  45. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by “MiC”, printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
  46. <https://www.youtube.com/watch?v=zQYFMJSKiu8>
  47. Реально работающий вечный двигатель на магнитах, часть 2, <http://x-faq.ru/index.php?topic=4144.msg119758;topicseen#msg119758>
  48. <http://x-faq.ru/index.php?topic=4144.new#new>, сообщение 1271, 25.10.2016.
  49. Магнитное поле внутри конденсатора, <https://www.youtube.com/watch?v=RNkYd1mueYk>
  50. Компас внутри конденсатора, <https://www.youtube.com/watch?v=A4vO2rLvtug>
  51. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Том 3. Электричество.
  52. Магнитное поле Земли, Википедия, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнитное поле Земли](https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнитное_поле_Земли)
  53. Земные токи, Википедия, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Земные токи](https://ru.wikipedia.org/wiki/Земные_токи)
  54. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в сферическом конденсаторе и природа Земного магнетизма, Vixra, <http://vixra.org/abs/1604.0355>, 2016-04-26.
  55. Хмельник С.И. Математическая модель шаровой молнии, DNA-33, 2015 - см. [здесь](#); *а также*: Vixra Funding, <http://vixra.org/abs/1503.0076>, 2015-03-11; *а также*: Vixra Funding, Mathematical Model of Ball Lightning, <http://vixra.org/abs/1503.0065>, 2015-03-09.
  56. Хмельник С. И. Вторая математическая модель шаровой молнии, <http://vixra.org/abs/1605.0280>, 2016-05-28.
  57. Wen Y. K. Dynamic tornado wind loads on tall buildings / Wen Y. K. // Journ. Of Struct. Div., Proc. ASCE, 1975, ST1, p.169.

58. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа, Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1938, Т. 8 (3),  
[http://ufn.ru/ufn67/ufn67\\_11/Russian/r6711f.pdf](http://ufn.ru/ufn67/ufn67_11/Russian/r6711f.pdf),  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение\\_Власова](https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение_Власова)
59. Руткевич П.Б., Руткевич П.П. Аксиально-симметричная модель неустойчивости типа торнадо,  
[http://d33.infospace.ru/d33\\_conf/2011v8n4/76-82.pdf](http://d33.infospace.ru/d33_conf/2011v8n4/76-82.pdf)
60. Смерчи и торнадо,  
[http://www.krugosvet.ru/enc/ nauka\\_i\\_tehnika/fizika/smerchi\\_i\\_tornado.html?page=0,3](http://www.krugosvet.ru/enc/ nauka_i_tehnika/fizika/smerchi_i_tornado.html?page=0,3)
61. Моделирование «глаз» циклонов, торнадо-смерчей, течений мирового океана,  
[http://old.msun.ru/vector/Konuhov\\_ATR/Glaz\\_ciklona.htm](http://old.msun.ru/vector/Konuhov_ATR/Glaz_ciklona.htm)
62. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979.
63. Иванов В.К. Курс общей физики.  
[http://lms.physics.spbstu.ru/pluginfile.php/2134/mod\\_resource/content/1/opt\\_1\\_03.pdf](http://lms.physics.spbstu.ru/pluginfile.php/2134/mod_resource/content/1/opt_1_03.pdf)
64. Игорь Иванов. Закрученный свет и закрученные электроны: обзор последних результатов,  
[http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya\\_biblioteka/432009/Zakruchennyy\\_svet\\_i\\_zakruchennyye\\_elektrony\\_obzor\\_poslednikh\\_rezultatov](http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/432009/Zakruchennyy_svet_i_zakruchennyye_elektrony_obzor_poslednikh_rezultatov)
65. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. Издание второе, переработанное и дополненное. Изд. "Советское радио", Москва, 1971. – 665 с.
66. Заряд конденсатора вилкой Авраменко от нуля, форум  
<http://x-faq.ru/index.php?topic=4203.0>
67. R.A. MILROY, Hydrodynamic Gyroscope,  
<http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1398258>, а также  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/MilroyFromMilroy.pdf>, а также перевод на русский:  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/MilroyFromMilroyR.pdf>
68. Игорь Белецкий, Двигатель из подшипника,  
<https://www.youtube.com/watch?v=dQUkWFwCxrE&list=TLn9vNCag6KRUXMjA2MjAxNg>

69. A strange electric motor,  
<https://www.youtube.com/watch?v=i7LOF1GZpdo>
70. Timur Khodzhiev. Двигатель Мильроя, ver. 3.2,  
<https://www.youtube.com/watch?v=XuLqsdHqoPI>
71. Крутится и никто и ни где не объясняет почему ОНО крутится, <https://www.youtube.com/watch?v=zuGDnWEQE94>
72. Необычный двигатель (часть 2),  
<https://www.youtube.com/watch?v=k04Ifn2SVj4>
73. Самовращение или эффект Губера,  
<https://www.youtube.com/watch?v=lgaOsnOyMxY>
74. Сильвестров А.Н., Зименков Д.К. О природе момента в двигателе Косырева-Мильроя. Национальный технический университет Украины (НТУУ “КПИ”),  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Silvestrow.pdf>
75. Кузьмин В.В., д.т.н., проф., Шпатенко В.С. О ПРИРОДЕ ПОЯВЛЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕГО МОМЕНТА В ДВИГАТЕЛЕ КОСЫРЕВА – МИЛЬРОЯ,  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Kuzmin.pdf>
76. Андрус В.Ф. Объяснение эффекта Губера с позиции нейтронных наук,  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Andrus.pdf>
77. Н.Н. Синельников. Об эффект Губера,  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Sinelnikow.pdf>
78. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, Vixra,  
<http://vixra.org/abs/1510.0396>, 2015-10-26, а также Khmelnik S.I. Electromagnetic Energy Flow in the Wire and Milroy Engine, Vixra, <http://vixra.org/abs/1511.0130>
79. <https://www.youtube.com/watch?v=BM9waVSfc4s>
80. Николаев Г.В. Современная электродинамика и причины ее парадоксальности. – Томск: Твердыня, 2003 – 149 с.
81. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. - Одесса: Типография Ульриха и Шульце, 1874. - 56 с.  
<http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Umow.pdf>
82. В.В. Косырев, В.Д. Рабко, Н.И. Вельман. Электрический двигатель. Изобретение СССР, №155216, 1963.

83. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Индуктивность>
84. Хмельник С.И. Объяснение эффекта Губера, <http://vixra.org/abs/1407.0142>, 2014-07-19
85. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводе и двигатель Мильроя, <http://vixra.org/abs/1510.0396>, 2015-10-26
86. А. Эйхенвальд. Электричество, М.Л. 1933, п. 282.
87. В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. Пылевая плазма, УФН, 2004, май, <http://ufn.ru/ru/articles/2004/5/b/>
88. Пылевая плазма, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Пылевая\\_плазма](https://ru.wikipedia.org/wiki/Пылевая_плазма)
89. Эксперимент с плазмой в космосе, <https://www.youtube.com/watch?v=SI406HKLYkM>
90. V.N. Tsytovich, G.E. Morfill, V.E. Fortov, N.G. Gusein-Zade, B.A. Klumov and S.V. Vladimirov. From plasma crystals and helical structures towards inorganic living matter. New Journal of Physics, Volume 9, August 2007, <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/9/8/263/meta>
91. Пылевая плазма намекает на молекулу жизни, <http://www.membrana.ru/particle/693>.
92. <http://akb-darom.ru/vse-o-akb/Вес-аккумулятора.html>
93. <http://www.magntech.ru/aging.htm>
94. Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Фазовая скорость, групповая скорость и скорость переноса энергии, Воронежский университет, депонировано в ВИНТИ 24.07.90, <http://www.efir.com.ua/tmp/velrus.pdf>, <http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/velrus.pdf>
95. G.M. Graham, D.G. Lahoz. Observation of static electromagnetic angular momentum in vacua, Nature, 285, 154, 1980.
96. А. Стасенко. Зачем быть конденсатору в магнитном поле? КВАНТ, 1998, №5, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/CondVrasch.pdf>
97. Иванов Г.П. Электродинамическое эфиропорное (эфирореактивное) движение, <http://www.tts.lt/~nara/>

- <http://www.tts.lt/~nara/strogijrus.htm>,  
<http://www.tts.lt/~nara/chast1.htm>
98. Грабовский Р.И. Курс физики. Учеб. пособие для с/х ин-тов. Изд. 4-е, перераб. и доп. М., «Высш. школа», 1974. - 552 с., [http://books.alnam.ru/book\\_phis.php](http://books.alnam.ru/book_phis.php), §83. Конденсатор. Энергия электрического поля, [http://books.alnam.ru/book\\_phis.php?id=84](http://books.alnam.ru/book_phis.php?id=84)
99. Иванов Г.П., Иванов Ю.Г. Способ получения тяги, патент RU-2172865, 1999, <http://www.tts.lt/~nara/patent/patent.html>
100. Electromagnetic Thruster, USA Patent 2014013724, [https://en.wikipedia.org/wiki/RF\\_resonant\\_cavity\\_thruster](https://en.wikipedia.org/wiki/RF_resonant_cavity_thruster).
101. Electrostatic motor, USA Patent 1974483, [http://en.wikipedia.org/wiki/Biefeld%E2%80%93Brown\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Biefeld%E2%80%93Brown_effect)
102. S.I. Khmelnik. A capacitor engine for an aircraft, Israel Patent 200435, 2009.
103. R. Shawyer. Superconducting microwave radiation thruster, 2016, <https://www.ipo.gov.uk/p-find-publication-getPDF.pdf?PatentNo=GB2537119&DocType=A&JournalNumber=6647>
104. NASA Team Claims ‘Impossible’ Space Engine Works—Get the Facts, <http://news.nationalgeographic.com/2016/11/nasa-impossible-emdrive-physics-peer-review-space-science/>
105. China Claims Its Made the Impossible EmDrive Possible, <https://futurism.com/china-claims-its-made-the-impossible-emdrive-possible/>
106. Хмельник С.И. Безопорное движение без нарушения физических законов, DNA-21, 2014, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers/21.45.pdf>
107. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.
108. Ближние и дальние зоны электромагнитные поля, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf>
109. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Д.П. Современная теория и практические применения антенн. Под ред. Неганова В.А. Изд. «Радиотехника», Москва, 2009, 720 стр.



- 
110. Antennas: Theory and Practice», Sergei A. Schelkunoff and Harald T. Friis, Bell Telephone Laboratories, New York: John Wiley & Sons, 1952. (Щелкунов С. А., Фриис Г.Т. Антенны. Теория и практика - Москва: Советское радио, 1955, 604 с.)
  111. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2001, 576 стр.
  112. Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перевод с английского Г. В. Воскресенского и Л. С. Соловьева. Под редакцией Э. Л. Бурштейна. Изд "Мир" Москва 1965. - 703 с.
  113. Хмельник С.И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических и электродинамических системах, пятая редакция. Publisher by "MiC", printed in USA, Lulu Inc., ID 1769875, ISBN 978-0-557-4837-3, 2014, 360 с.
  114. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнетосопротивление>,  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Magneto-resistance>
  115. Хмельник С.И. Решение уравнений Максвелла для конденсатора с переменным напряжением <http://vixra.org/abs/1710.0203>, 2017-10-15