Relatividad Especial con Partículas Masivas y no Masivas

A. Blato

(2016) Buenos Aires
Argentina

En relatividad especial, este artículo presenta una dinámica de partículas masivas y no masivas que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial.

Introducción

En relatividad especial, la posición total ($\bar{\mathbf{r}}$) de una partícula (masiva o no masiva) es siempre cero.

$$\bar{\mathbf{r}} \;=\; 0$$

La posición total ($\bar{\mathbf{r}}$) de una partícula (masiva o no masiva) está definida por la posición cinética ($\hat{\mathbf{r}}$) y la posición dinámica ($\check{\mathbf{r}}$) tal como sigue:

$$\hat{\mathbf{r}} - \check{\mathbf{r}} \;=\; 0$$

La posición cinética ($\hat{\mathbf{r}}$) de una partícula (masiva o no masiva) está dada por:

$$\hat{\mathbf{r}} \;\doteq\; \frac{1}{\mu} \int m\, \mathbf{v}\, dt$$

donde (μ) es una constante (universal) arbitraria, (m) es la masa relativista de la partícula, ($\mathbf{v}$) es la velocidad de la partícula y (t) es el tiempo.

La posición dinámica ($\check{\mathbf{r}}$) de una partícula (masiva o no masiva) está dada por:

$$\check{\mathbf{r}} \;\doteq\; \frac{1}{\mu} \iint \mathbf{F}\; dt\, dt$$

donde (μ) es la constante (universal) arbitraria, ($\mathbf{F}$) es la fuerza neta que actúa sobre la partícula y (t) es el tiempo.

La masa relativista $(\, m \,)$ de una partícula masiva está dada por:

$$m \; \doteq \; \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde $(\, m_o \,)$ es la masa en reposo de la partícula masiva, $(\, v \,)$ es la velocidad de la partícula masiva y $(\, c \,)$ es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa relativista $(\, m \,)$ de una partícula no masiva está dada por:

$$m \; \doteq \; \frac{h \, \nu}{c^2}$$

donde $(\, h \,)$ es la constante de Planck, $(\, \nu \,)$ es la frecuencia de la partícula no masiva y $(\, c \,)$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Ahora, la posición total $(\, \bar{\mathbf{r}} \,)$ de una partícula (masiva o no masiva) puede ser también expresada como sigue:

$$\frac{1}{\mu} \left[\; \int m \, \mathbf{v} \, dt \; - \iint \mathbf{F} \; dt \, dt \; \right] = \; 0$$

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{1}{\mu} \left[\; m \, \mathbf{v} \; - \int \mathbf{F} \; dt \; \right] = \; 0$$

Derivando nuevamente con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{1}{\mu} \left[\; m \, \mathbf{a} + \frac{dm}{dt} \, \mathbf{v} \; - \; \mathbf{F} \; \right] = \; 0$$

Multiplicando por $(\, \mu \,)$ y reordenando, finalmente se tiene:

$$\mathbf{F} \; = \; m \, \mathbf{a} + \frac{dm}{dt} \, \mathbf{v}$$

Esta ecuación (similar a la segunda ley de Newton cuando $v \ll c$) será usada en la próxima sección de este artículo.

Dinámica Relativista

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa relativista m entonces el momento lineal $\mathbf{P}$ de la partícula, el momento angular $\mathbf{L}$ de la partícula, la fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula, el trabajo W realizado por la fuerza neta que actúa sobre la partícula y la energía cinética K de la partícula, para un sistema de referencia inercial, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{P} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m\,\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\,\mathbf{v}$$

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \Delta\,\mathrm{K}$$

$$\mathrm{K} \doteq m\,c^2$$

donde $(\,\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ \mathbf{a}\,)$ son la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula respecto al sistema de referencia inercial y $(\,c\,)$ es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética $(\,\mathrm{K}_o\,)$ de una partícula masiva en reposo es $(\,m_o\,c^2\,)$

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

B. Russell, ABC de la Relatividad.

A. French, Relatividad Especial.

Apéndice

Sistema de Ecuaciones

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{[1]} \arrow[d, "dt"] & \\
\boxed{[4]} \arrow[d, "dt"] & \boxed{[2]} \arrow[l, "\times \mathbf{r}"'] \arrow[d, "dt"] & \\
\boxed{[5]} & \boxed{[3]} \arrow[l, "\times \mathbf{r}"'] \arrow[r, "\int d\mathbf{r}"] & \boxed{[6]}
\end{tikzcd}
$$

$$[1] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\int \mathbf{P}\,dt - \int\!\!\int \mathbf{F}\,dt\,dt\right] = 0$$

$$[2] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{P} - \int \mathbf{F}\,dt\right] = 0$$

$$[3] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\frac{d\mathbf{P}}{dt} - \mathbf{F}\right] = 0$$

$$[4] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{P} - \int \mathbf{F}\,dt\right] \times \mathbf{r} = 0$$

$$[5] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\frac{d\mathbf{P}}{dt} - \mathbf{F}\right] \times \mathbf{r} = 0$$

$$[6] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\int \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\right] = 0$$