
Хмельник С. И.

Электромагнитная волна в сферическом конденсаторе и природа Земного магнетизма

Аннотация

Предлагается решение уравнений Максвелла для электромагнитной волны в сферическом конденсаторе, который включен в цепь переменного или постоянного тока. На основе этого решения предлагается гипотеза о природе Земного магнетизма.

Оглавление

1. Введение
 2. Уравнения Максвелла в сферических координатах
 3. Решение уравнений Максвелла для вакуума
 4. Электрические и магнитные напряженности
 5. Электромагнитная волна в заряженном сферическом конденсаторе
 6. Магнитное и электрическое поле Земли
- Приложение 1. Решение уравнений Максвелла для среды
Приложение 2. Решение уравнений Максвелла для электропроводного диэлектрика
- Литература

1. Введение

В [1, 2] рассмотрена электромагнитная волна в конденсаторе, который включен в цепь переменного или постоянного тока. Ниже рассматривается сферический конденсатор в цепи синусоидального тока или постоянного тока. Обкладками такого конденсатора являются две сферы с общим центром и радиусами $R_2 > R_1$. На основе этого решения предлагается гипотеза о природе Земного магнетизма. Ранее в [3] аналогичным образом была обоснована модель шаровой молнии.

2. Уравнения Максвелла в сферических координатах

Вначале рассмотрим сферический конденсатор в цепи синусоидального тока. На рис. 1 показана система сферических координат (ρ, θ, φ) . В табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора \mathbf{E} в этих координатах [4]. Здесь и далее

E - напряженность электрического поля,

H - напряженность магнитного поля,

μ - абсолютная магнитная проницаемость,

ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

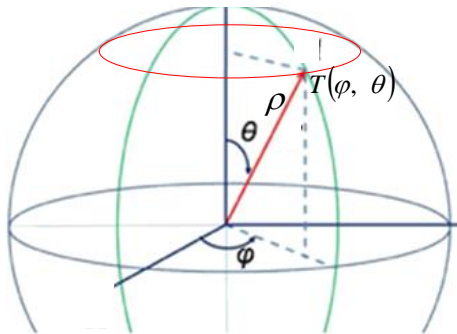


Рис. 1 (Sfera155.vsd).

Таблица 1.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$\frac{\partial E_\rho}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\rho \partial \varphi}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\theta}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$

Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов между обкладками сферического конденсатора имеют вид, приведенный в табл. 2.

Таблица 2.

1	2
1.	$\operatorname{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$
2.	$\operatorname{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$
3.	$\operatorname{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$
4.	$\operatorname{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$
5.	$\operatorname{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$
6.	$\operatorname{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$
7.	$\operatorname{div}(E) = 0$
8.	$\operatorname{div}(H) = 0$

Далее мы будем искать решение в виде функций E , H , представленных в табл. 3, где функции вида $E_{\varphi\rho}(\rho)$ предстоит вычислить. Здесь важно отметить, что

- эти функции не зависят от аргумента φ ;
- при $E(\theta) = \sin(\theta)$ выражение

$$\frac{E}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial E}{\partial \theta} = 2 \cos(\theta). \quad (11)$$

Таблица 3.

1	2
	$E_\rho = E_{\rho\rho}(\rho) \cos(\theta) \sin(\omega t)$
	$E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho) \sin(\theta) \sin(\omega t)$
	$E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho) \sin(\theta) \sin(\omega t)$
	$H_\rho = H_{\rho\rho}(\rho) \cos(\theta) \cos(\omega t)$
	$H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho) \sin(\theta) \cos(\omega t)$
	$H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho) \sin(\theta) \cos(\omega t)$

Подставим функции E , H из табл. 3 в табл. 1 и учтем (11). Тогда получим табл. 4.

Таблица 4.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{2E_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\theta) \sin(\omega t)$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\left(\frac{E_\varphi}{\rho} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}\right) \sin(\theta) \sin(\omega t)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\left(\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}\right) \sin(\theta) \sin(\omega t)$
4	$\text{div}(E)$	$\left(\left(\frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho}\right) + \frac{2E_{\theta\rho}}{\rho}\right) \cos(\theta) \sin(\omega t)$

Выражения для ротора и дивергенции функции H отличаются от показанных в табл. 4 только тем, что вместо множителей $\sin(\omega t)$ стоят множители $\cos(\omega t)$. Подставляя выражения для роторов и дивергенций в уравнения Максвелла (см. табл. 2), дифференцируя по времени и сокращая общие множители, получаем новую форму уравнений Максвелла – см. табл. 5.

Таблица 5.

1	2
1	$\frac{2E_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} = 0$
2	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial \rho}\right) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} = 0$
3	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial \rho}\right) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} = 0$
4	$\left(\left(\frac{E_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho\rho}}{\partial \rho}\right) + \frac{2E_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$
5	$\frac{2H_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\varphi\rho} = 0$

6	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\theta\rho} = 0$
7	$\left(\frac{H_{\theta\rho} + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\varphi\rho} = 0$
8	$\left(\left(\frac{H_{\varphi\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2H_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$

3. Решение уравнений Максвелла для вакуума

Вначале рассмотрим эти уравнения для вакуума, где в системе СГС

$$\varepsilon = \mu = 1. \quad (12)$$

Тогда уравнения Максвелла становятся полностью симметричными относительно напряженностей E и H . Сложим попарно уравнения (1-4) и (5-8). Тогда получим:

$$\frac{2W_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega}{c} W_{\varphi\rho} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{W_{\varphi\rho} + \frac{\partial W_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{\omega}{c} W_{\theta\rho} = 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{W_{\theta\rho} + \frac{\partial W_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega}{c} W_{\varphi\rho} = 0, \quad (15)$$

$$\left(\left(\frac{W_{\varphi\rho} + \frac{\partial W_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2W_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0, \quad (16)$$

где

$$W = E + H. \quad (17)$$

Система 4-х уравнений (13-16) определяет 3 неизвестных функции – эта система является переопределенной. Мы покажем, что существует решение, удовлетворяющее всем 4-м уравнениям.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнения (14, 15) имеют следующее решение:

$$W_{\theta\rho} = A \cdot \frac{-i}{\rho} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho - R) + \beta\right), \quad (18)$$

$$W_{\varphi\rho} = -A \cdot \frac{1}{\rho} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho - R) + \beta\right), \quad (19)$$

где A, R, ω, β, c – константы. Из (13, 18) находим:

$$W_{\rho\rho} = \frac{2W_{\varphi\rho}}{\rho} \frac{c}{\omega} = -\frac{2Ac}{\omega\rho^2} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial W_{\rho\rho}}{\partial \rho} = A\left(\frac{2ci}{\omega\rho^3} - \frac{2}{\rho^2}\right) \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right). \quad (21)$$

Подставляя (19-21) в (16) убеждаемся, что уравнение (16) превращается в тождество $0=0$. Следовательно, три функции (18-20) удовлетворяют 4-м уравнениям (13-16), что и требовалось показать.

Решение не измениться, если вместо (17) будет использовано условие

$$W = (E + H) \frac{2}{(1+i)}. \quad (22)$$

Далее будем искать решение, при котором

$$E = iH. \quad (23)$$

Из (76, 77) находим:

$$W = (1+i)H \frac{2}{(1+i)} = 2H \quad (24)$$

или

$$H = W/2. \quad (25)$$

Из (77, 79) находим:

$$E = Wi/2. \quad (26)$$

Из (18-20, 79, 80) находим:

$$H_{\theta\rho} = \frac{-Ai}{2\rho} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (27)$$

$$H_{\varphi\rho} = \frac{-A}{2\rho} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (28)$$

$$H_{\rho\rho} = \frac{-Ac}{\omega\rho^2} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (29)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{A}{2\rho} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (30)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{-Ai}{2\rho} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (31)$$

$$E_{\rho\rho} = \frac{-Aci}{\omega\rho^2} \exp\left(\frac{i\omega}{c}(\rho-R)+\beta\right), \quad (32)$$

Найденное решение является комплексным. Известно, что реальная часть комплексного решения также является решением. Следовательно, в качестве решения вместо функций (27-32) можно принять их реальные части:

$$H_{\theta\rho} = \frac{A}{2\rho} \sin(q(\rho - R) + \beta), \quad (33)$$

$$H_{\varphi\rho} = \frac{-A}{2\rho} \cos(q(\rho - R) + \beta), \quad (34)$$

$$H_{\rho\rho} = \frac{-A}{q\rho^2} \cos(q(\rho - R) + \beta), \quad (35)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{A}{2\rho} \cos(q(\rho - R) + \beta), \quad (36)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{A}{2\rho} \sin(q(\rho - R) + \beta), \quad (37)$$

$$E_{\rho\rho} = \frac{A}{q\rho^2} \sin(q(\rho - R) + \beta), \quad (38)$$

где

$$q = \frac{\omega}{c}, \quad (38a)$$

Для проверки этого решения можно подставить эти функции в уравнения табл. 5 и убедиться, что они превращаются в тождества.

Итак, решение уравнений Максвелла для сферического конденсатора в вакууме имеет вид уравнений (33-38).

Для нахождения этих функций достаточно знать значения констант A , R , ω , β , c . Полученное решение означает, что **в сферическом конденсаторе, который включен в цепь синусоидального тока, существует электромагнитная волна.**

Решение уравнений Максвелла для случая, когда диэлектрик не является вакуумом, дано в Приложении 1, а для случая, когда диэлектрик имеет некоторую электропроводность – в Приложении 2.

4. Электрические и магнитные напряженности

Рассмотрим на сфере радиуса ρ точку T с координатами φ , θ . Векторы \vec{H}_φ и \vec{H}_θ , исходящие из этой точки, лежат в плоскости P , касательной к этой сфере в этой точке $T(\varphi, \theta)$ - см.

рис. 2. Эти векторы перпендикулярны друг другу. Следовательно, в каждой точке (φ, θ) суммарный вектор

$$\vec{H}_{\varphi\theta} = \vec{H}_{\varphi} + \vec{H}_{\theta} \quad (39)$$

лежит в плоскости P и направлен под углом ψ к линии параллели. Как следует из (33, 34) и табл. 3, модуль этого вектора и угол ψ определяются следующими формулами:

$$|\vec{H}_{\varphi\theta}| = \frac{A}{2\rho} \quad (40)$$

$$\cos(\psi) = \frac{H_{\theta\rho}}{|\vec{H}_{\varphi\theta}|} = \sin\left(\frac{\omega}{c}(\rho - R) + \beta\right)$$

или

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{c}(\rho - R) - \beta. \quad (41)$$

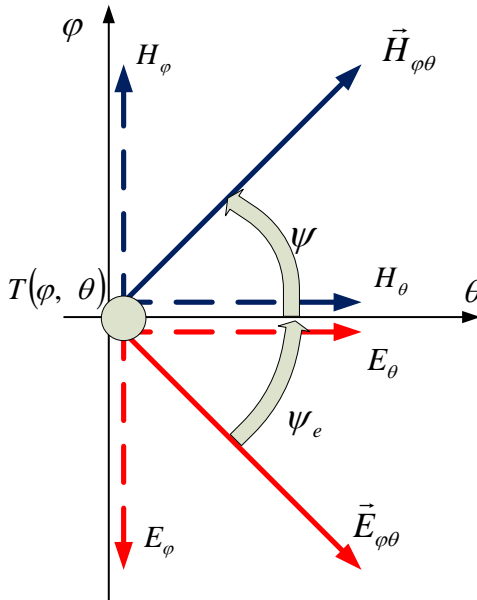


Рис. 2 (Sfera110.vsd).

Подобные соотношения существуют и для векторов \vec{E}_{φ} и \vec{E}_{θ} . В каждой точке (φ, θ) суммарный вектор

$$\vec{E}_{\varphi\theta} = \vec{E}_{\varphi} + \vec{E}_{\theta} \quad (42)$$

лежит в плоскости P и направлен под углом ψ_e к линии параллели. Как следует из (36, 37) и табл. 3, модуль этого вектора и угол ψ_e определяются следующими формулами:

$$|\vec{E}_{\varphi\theta}| = \frac{A}{2\rho} \quad (43)$$

$$\cos(\psi_e) = \frac{E_{\theta\rho}}{|\vec{E}_{\varphi\theta}|} = \cos\left(\frac{\omega}{c}(\rho - R) + \beta\right)$$

или

$$\psi_e = \frac{\omega}{c}(\rho - R) - \beta \quad (44)$$

или

$$\psi_e = \frac{\pi}{2} - \psi. \quad (45)$$

Угол между векторами $\vec{H}_{\varphi\theta}$ и $\vec{E}_{\varphi\theta}$ в плоскости P является прямым.

Следовательно, в сферическом конденсаторе можно рассматривать только один вектор электрической напряженности $\vec{E}_{\varphi\theta}$ и только один вектор магнитной напряженности $\vec{H}_{\varphi\theta}$. Поскольку эти векторы лежат на сфере, будем называть их сферическими.

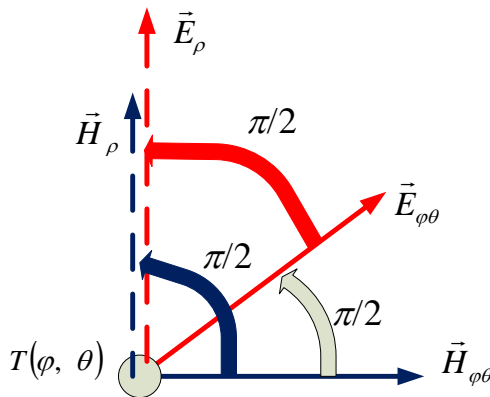


Рис. 3 (Sfera.3a.vsd).

На рис. 3 показаны векторы $\vec{H}_{\varphi\theta}$ и $\vec{E}_{\varphi\theta}$, лежащие на плоскости P , и векторы \vec{H}_ρ и \vec{E}_ρ , лежащие на радиусе.

Заметим, что существует множество решений, отличающихся значением числа β . Этот факт отражает произвол в выборе математических осей координат.

Угол ψ (30) является постоянным для всех векторов $\vec{H}_{\varphi\theta}$ при данном радиусе ρ . Это означает, что на сфере с радиусом ρ направления всех векторов $\vec{H}_{\varphi\theta}$ составляют со всеми параллелями один и тот же угол ψ . Это означает, в свою очередь, что существует магнитная экваториальная плоскость, наклоненная к математической экваториальной плоскости на угол ψ , магнитная ось, магнитные полюса и магнитные меридианы, по которым направлены векторы $\vec{H}_{\varphi\theta}$ - см. рис. 4, где тонкими линиями обозначена математическая меридиональная сетка, толстыми линиями – магнитная меридиональная сетка, показаны математическая mm , магнитная aa и электрическая bb оси. Важно отметить, что магнитная aa и электрическая bb оси и, вообще, векторы $\vec{E}_{\varphi\theta}$ и $\vec{H}_{\varphi\theta}$ перпендикулярны.

При $\frac{\omega}{c} \approx 0$ и $\beta = 0$ магнитная ось совпадает с математической.

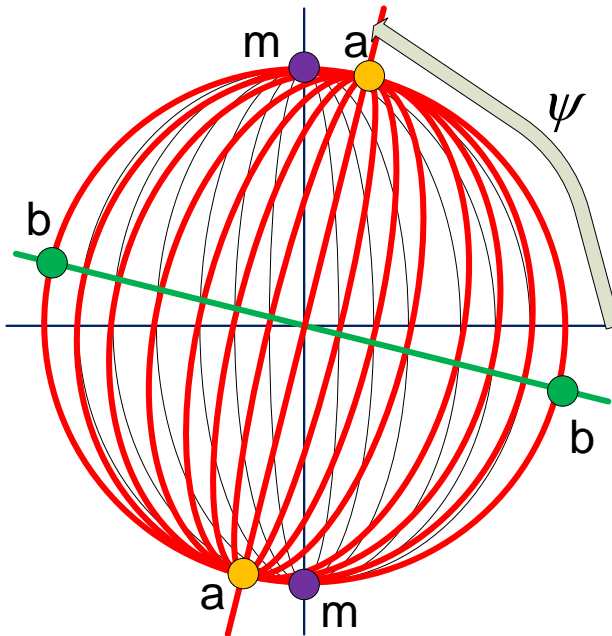


Рис. 4 (Sfera133.vsd).

Сферические векторы зависят от $\sin(\theta)$. Радиальные векторы зависят от $\cos(\theta)$ - см. табл. 3. Поэтому в точках, где сферические напряженности равны нулю, существуют только радиальные напряженности.

5. Электромагнитная волна в заряженном сферическом конденсаторе

Решение уравнений Максвелла для заряжаемого плоского конденсатора [2] является следствием решения этих уравнений для плоского конденсатора в цепи синусоидального тока [1]. Здесь мы воспользуемся методом, изложенным в [1], при решении уравнений Максвелла для заряжаемого сферического конденсатора.

Таблица 6.

1	2
	$E_\rho = E_{\rho\rho}(\rho)\cos(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho)\sin(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho)\sin(\theta)(1 - \exp(\omega t))$
	$H_\rho = H_{\rho\rho}(\rho)\cos(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$
	$H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho)\sin(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$
	$H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho)\sin(\theta)(\exp(\omega t) - 1)$

Рассмотрим напряженности в виде функций, представленных в табл. 6. Эти функции отличаются от приведенных в табл. 3 только видом зависимости от времени: в табл. 3 эти зависимости у функций E , H имеет вид функций $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ соответственно, а в табл. 6 эти зависимости у функций E , H имеет вид функций $(1 - \exp(\omega t))$, $(\exp(\omega t) - 1)$ соответственно. Несмотря на указанную замену, при этом решение уравнений Максвелла остается неизменным.

Ток смещения

$$J_\rho = \frac{d}{dt} E_\rho = -\omega E_{\rho\rho}(\rho)\cos(\theta)\exp(\omega t) \quad (31)$$

На рис. 6 показаны напряженности и их производные по времени, а также ток смещения, как функции времени, при

$\omega = -300$: H_ρ - сплошные линии, E_ρ - пунктирные линии, J_ρ - точечная линия. Можно убедиться, что амплитуды всех напряженностей при $t \Rightarrow \infty$ одновременно стремятся к постоянному значению, а амплитуда тока стремится к нулю. Это соответствует заряду конденсатора через постоянное сопротивление.

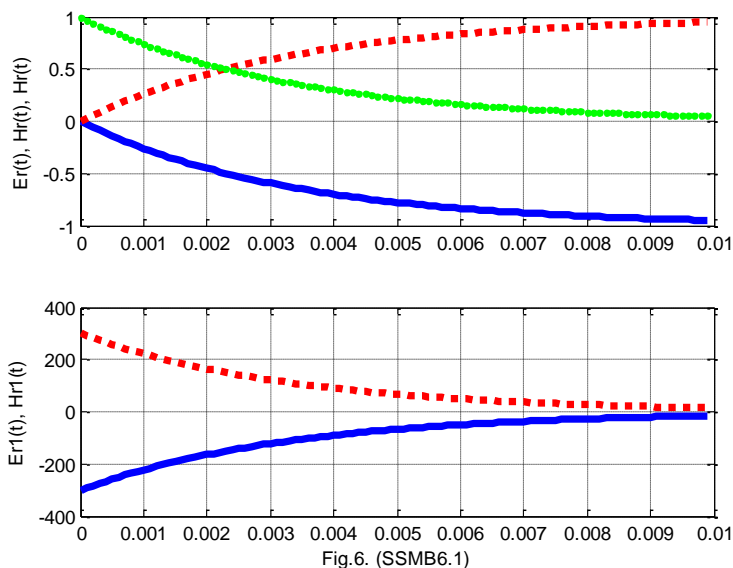


Fig.6. (SSMB6.1)

После заряда конденсатора ток прекращается. Однако, как показывается в [2], стационарный поток электромагнитной энергии сохраняется.

Таким образом, решение уравнений Максвелла для заряжаемого конденсатора и для конденсатора в цепи синусоидального тока отличаются только тем, что в первом случае присутствуют экспоненциальные функции времени, а во втором - синусоидальные.

Структура электромагнитной волны остается прежней – см. раздел 3. Как показано там, в сферическом конденсаторе существует электромагнитная волна, у которой существуют только сферические $\vec{E}_{\phi\theta}$, $\vec{H}_{\phi\theta}$ и радиальные \vec{E}_ρ , \vec{H}_ρ векторы.

Таким образом, можно говорить, что сферический конденсатор представляет собой устройство, эквивалентное магниту и, одновременно, электрету, оси которых перпендикулярны.

6. Магнитное и электрическое поле Земли

Известно, что электрическое поле Земли можно рассматривать, как поле "между обкладками сферического конденсатора" [5]. Этими обкладками являются поверхность Земли заряженная отрицательно, и ионосфера, заряженная положительно. Заряд этих оболочек поддерживается постоянным грозовой деятельностью атмосферы

Известно также о существовании магнитного поля Земли. Однако в этом случае отсутствует общепринятое объяснение источника этого поля. "Проблема происхождения и сохранения поля не решена по сей день" [6].

Из вышеизложенного следует, что **магнитное поле Земли является следствием существования электрического поля Земли.**

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

На рис. 8 показано векторное поле $\vec{H}_{\varphi\theta}$ в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом $|\vec{H}_{\varphi\theta}| = 0.7$; $\rho = 1$. На рис. 9 показано векторное поле \vec{H}_{ρ} в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом $|\vec{H}_{\rho}| = 0.4$; $\rho = 1$. Наконец, на рис. 10 показано векторное поле $\vec{H} = \vec{H}_{\varphi\theta} + \vec{H}_{\rho}$ в диаметральной плоскости, проходящей через магнитную ось. При этом $|\vec{H}_{\varphi\theta}| = 0.3$; $|\vec{H}_{\rho}| = 0.2$; $\rho = 1$.

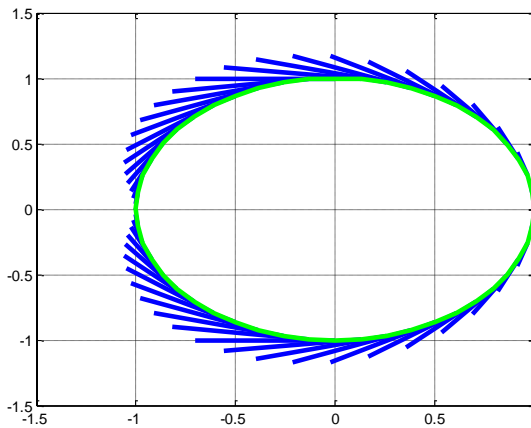


FIG. 8. (Sfera.88)

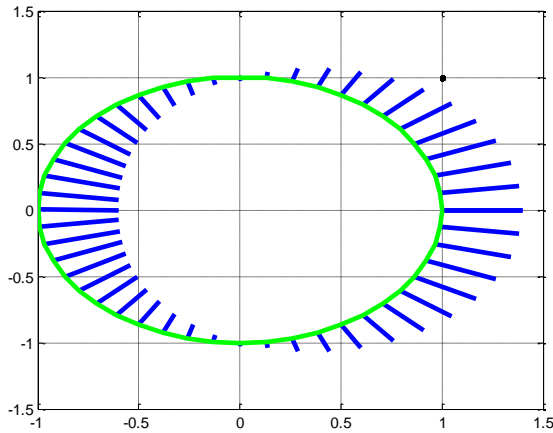


FIG. 9. (Sfera.88)

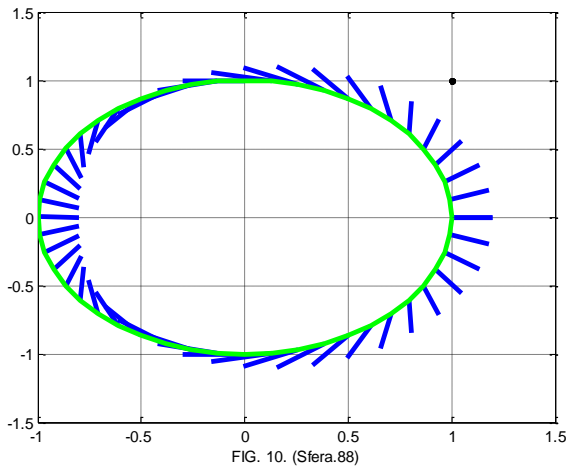


FIG. 10. (Sfera.88)

Приложение 1. Решение уравнений Максвелла для среды

Выше было рассмотрено решение уравнений для вакуума, где в системе СГС, $\varepsilon = \mu = 1$. Здесь мы рассмотрим более общий случай, где $\varepsilon \neq \mu$.

Рассмотрим снова табл. 5. Обозначим

$$E = E' \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (52)$$

Тогда табл. 5 примет вид табл. 7. Выполним простые преобразования в табл. 7 и получим табл. 8. В табл. 8 уравнения Максвелла становятся полностью симметричными относительно

напряженностей E' и H . Сложим попарно уравнения (1-4) и (5-8).

Тогда получим:

$$\frac{2W_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} W_{\rho\rho} = 0, \quad (53)$$

$$\left(\frac{W_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial W_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \right) + \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} W_{\theta\rho} = 0, \quad (54)$$

$$\left(\frac{W_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial W_{\theta\rho}}{\partial\rho} \right) - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} W_{\varphi\rho} = 0, \quad (55)$$

$$\left(\left(\frac{W_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial W_{\rho\rho}}{\partial\rho} \right) + \frac{2W_{\theta\rho}}{\rho} \right) = 0, \quad (56)$$

где

$$W = E' + H. \quad (57)$$

Уравнения (53-57) решаются совершенно также, как уравнения (13-17) в разделе 3. В результате определяются функции (33-38). Отличие состоит только в том, что вместо величины (38а) используется величина

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon}. \quad (58)$$

Далее по (52) определяются напряженности E .

Таблица 7.

1	2
1	$\frac{2E'_{\varphi\rho}}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\rho\rho} = 0$
2	$-\left(\frac{E'_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial E'_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} = 0$
3	$\left(\frac{E'_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial E'_{\theta\rho}}{\partial\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} = 0$
4	$\left(\left(\frac{E'_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial E'_{\rho\rho}}{\partial\rho} \right) + \frac{2E'_{\theta\rho}}{\rho} \right) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 0$
5	$\frac{2H_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega\varepsilon}{c} E'_{\rho\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 0$

6	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E'_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 0$
7	$\left(\frac{H_{\theta\rho} + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E'_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 0$
8	$\left(\left(\frac{H_{\rho\rho} + \frac{\partial H_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2H_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$

Таблица 8.

1	2
1	$\frac{2E'_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} H_{\rho\rho} = 0$
2	$-\left(\frac{E'_{\varphi\rho} + \frac{\partial E'_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} H_{\theta\rho} = 0$
3	$\left(\frac{E'_{\theta\rho} + \frac{\partial E'_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} H_{\varphi\rho} = 0$
4	$\left(\left(\frac{E'_{\rho\rho} + \frac{\partial E'_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2E'_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$
5	$\frac{2H_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} E'_{\rho\rho} = 0$
6	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} E'_{\theta\rho} = 0$
7	$\left(\frac{H_{\theta\rho} + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon} E'_{\varphi\rho} = 0$
8	$\left(\left(\frac{H_{\rho\rho} + \frac{\partial H_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2H_{\theta\rho}}{\rho}\right) \sqrt{\mu\varepsilon} = 0$

Приложение 2. Решение уравнений Максвелла для электропроводного диэлектрика

В приложении 1 было рассмотрено решение уравнений для диэлектрика, у которого $\varepsilon \neq \mu$. Далее предположим еще, что

диэлектрик имеет некоторую электропроводность σ . В этом случае уравнение вида

$$\text{rot}H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (71)$$

заменяется на уравнение вида

$$\text{rot}H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma E = 0 \quad (72)$$

Вместо табл. 3 в этом случае будем использовать табл. 9, где ϕ - угол сдвига фаз между магнитной и электрической напряженностями - см. рис. 11.

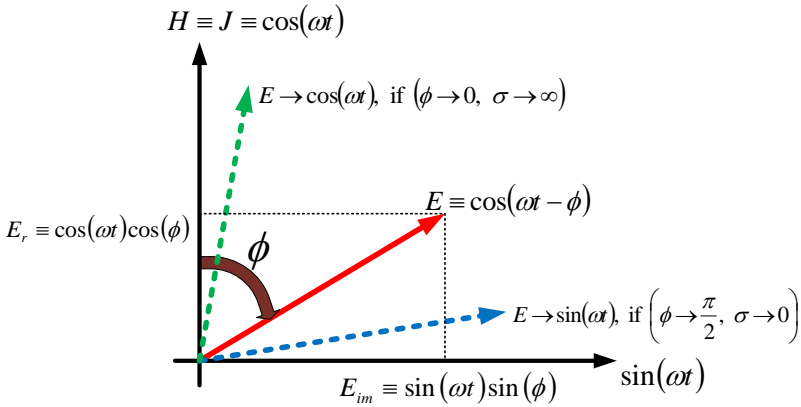


Рис. 11 (Shar1.vsd)

Таблица 9.

1	2
	$E_\rho = E_{\rho\rho}(\rho)\cos(\theta)(\sin(\phi)\sin(\omega t) + \sigma\cos(\phi)\cos(\omega t))$
	$E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho)\sin(\theta)(\sin(\phi)\sin(\omega t) + \sigma\cos(\phi)\cos(\omega t))$
	$E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho)\sin(\theta)(\sin(\phi)\sin(\omega t) + \sigma\cos(\phi)\cos(\omega t))$
	$H_\rho = H_{\rho\rho}(\rho)\cos(\theta)\cos(\omega t)$
	$H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho)\sin(\theta)\cos(\omega t)$
	$H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho)\sin(\theta)\cos(\omega t)$

При этом систему уравнений Максвелла можно заменить на две независимых системы уравнений: в первой из них используется слагаемое $\sin(\phi)\sin(\omega t)$ из табл. 9, а во второй - слагаемое

$\sigma \cos(\phi) \cos(\omega t)$ из табл. 9. После решения этих систем общее решение определяется как сумма найденных решений (в силу линейности систем). Решение первой системы приведено в приложении 1.

Табл. 5 для второй системы принимает вид табл. 10 (изменены формулы (5-7)). Далее будем рассуждать также, как и в приложении 1. Обозначим

$$E = gE'. \quad (73)$$

где

$$g = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}}. \quad (74)$$

Тогда табл. 10 примет вид табл. 11. Выполним простые преобразования в табл. 11 и получим табл. 12. В табл. 12 уравнения Максвелла становятся полностью симметричными относительно напряженностей E' и H . Сложим попарно уравнения (1-4) и (5-8).

Тогда получим:

$$\frac{2W_{\varphi\rho}}{\rho} - qW_{\rho\rho} = 0, \quad (74)$$

$$\left(\frac{W_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial W_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \right) + qW_{\theta\rho} = 0, \quad (75)$$

$$\left(\frac{W_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial W_{\theta\rho}}{\partial \rho} \right) - qW_{\varphi\rho} = 0, \quad (76)$$

$$\left(\left(\frac{W_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial W_{\rho\rho}}{\partial \rho} \right) + \frac{2W_{\theta\rho}}{\rho} \right) = 0, \quad (77)$$

где

$$q = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}}, \quad (78)$$

$$W = E' + H. \quad (79)$$

Уравнения (74-77) решаются совершенно также, как уравнения (13-17) в разделе 3. В результате определяются функции (33-38). Отличие состоит только в том, что вместо величины (38а) используется величина (78). Далее по (63) определяются напряженности E . Объединяя это решение для второй системы с решением для первой системы окончательно получаем:

$$H_{\theta\rho} = \frac{A}{2\rho} (\sin(q_1(\rho - R) + \beta_1) + \sin(q_2(\rho - R) + \beta_2)), \quad (80)$$

$$H_{\varphi\rho} = \frac{-A}{2\rho} (\cos(q_1(\rho - R) + \beta_1) + \cos(q_2(\rho - R) + \beta_2)), \quad (81)$$

$$H_{\rho\rho} = \frac{-A}{\rho^2} \left(\frac{1}{q_1} \cos(q_1(\rho - R) + \beta_1) + \frac{1}{q_2} \cos(q_2(\rho - R) + \beta_2) \right), \quad (82)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{A}{2\rho} (\cos(q_1(\rho - R) + \beta_1) + \cos(q_2(\rho - R) + \beta_2)), \quad (83)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{A}{2\rho} (\sin(q_1(\rho - R) + \beta_1) + \sin(q_2(\rho - R) + \beta_2)), \quad (84)$$

$$E_{\rho\rho} = \frac{A}{\rho^2} \left(\frac{1}{q_1} \sin(q_1(\rho - R) + \beta_1) + \frac{1}{q_2} \sin(q_2(\rho - R) + \beta_2) \right), \quad (85)$$

где

$$q_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (86)$$

$$q_2 = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}}. \quad (87)$$

Таблица 10.

1	2
1	$\frac{2E_{\varphi\rho}}{\rho} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\rho\rho} = 0$
2	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} = 0$
3	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} = 0$
4	$\left(\left(\frac{E_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2E_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$
5	$\frac{2H_{\varphi\rho}}{\rho} - \sigma \cos(\phi) E_{\rho\rho} = 0$
6	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \sigma \cos(\phi) E_{\theta\rho} = 0$

7	$\left(\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \sigma \cos(\phi) E_{\varphi\rho} = 0$
8	$\left(\left(\frac{H_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2H_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$

Таблица 11.

1	2
1	$\frac{2E_{\varphi\rho}}{\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\rho\rho} = 0$
2	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} = 0$
3	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} = 0$
4	$\left(\left(\frac{E_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2E_{\theta\rho}}{\rho}\right) \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} = 0$
5	$\frac{2H_{\varphi\rho}}{\rho} - \sigma \cos(\phi) E_{\rho\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} = 0$
6	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \sigma \cos(\phi) E_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} = 0$
7	$\left(\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \sigma \cos(\phi) E_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu}{c \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}} = 0$
8	$\left(\left(\frac{H_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2H_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$

Таблица 12.

1	2
1	$\frac{2E_{\varphi\rho}}{\rho} - \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}} H_{\rho\rho} = 0$
2	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}} H_{\theta\rho} = 0$

3	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}} H_{\varphi\rho} = 0$
4	$\left(\left(\frac{E_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2E_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$
5	$\frac{2H_{\varphi\rho}}{\rho} - E_{\rho\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}} = 0$
6	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\right) - E_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}} = 0$
7	$\left(\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho}\right) - E_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \cos(\phi)}{c}} = 0$
8	$\left(\left(\frac{H_{\rho\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\rho\rho}}{\partial\rho}\right) + \frac{2H_{\theta\rho}}{\rho}\right) = 0$

Литература

1. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в диэлектрической и магнитной цепи переменного тока, Vixra Funding, <http://vixra.org/funding>, 2016-04-28, <http://vixra.org/abs/1604.0355>.
2. Хмельник С.И. Электромагнитная волна в заряженном конденсаторе, Vixra Funding, <http://vixra.org/funding>, 2016-04-05, <http://vixra.org/abs/1604.0061>.
3. Хмельник С.И. Математическая модель шаровой молнии, Vixra Funding, <http://vixra.org/funding>, 2015-03-11, <http://vixra.org/abs/1503.0076>; Доклады независимых авторов, ISSN 2225-6717, <http://dna.izdatelstwo.com/>, № 33, 2015 - см. [здесь](#).
4. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
5. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Том 3. Электричество.
6. Магнитное поле Земли, Википедия, https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнитное_поле_Земли