UNA FORMULACIÓN RELACIONAL DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

A. Blato

(2016) Buenos Aires
Argentina

Este artículo presenta una formulación relacional de la relatividad especial cuyas magnitudes cinemáticas y dinámicas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales. Además, una nueva fuerza universal es presentada.

Introducción

A partir de una partícula masiva auxiliar (denominada punto-auxiliar) es posible obtener magnitudes cinemáticas (denominadas relacionales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales.

Un punto-auxiliar es una partícula masiva arbitraria libre de fuerzas externas (o que la fuerza neta actuando sobre ésta es cero)

El tiempo relacional ($\bar{t}$), la posición relacional ($\bar{\mathbf{r}}$), la velocidad relacional ($\bar{\mathbf{v}}$) y la aceleración relacional ($\bar{\mathbf{a}}$) de una partícula (masiva o no masiva) respecto a un sistema de referencia inercial S están dados por:

$$\bar{t} \doteq \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi}}{c^2} \right)$$

$$\bar{\mathbf{r}} \doteq \left[\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{\psi}}{c^2} - \gamma\, \boldsymbol{\psi}\, t \right]$$

$$\bar{\mathbf{v}} \doteq \left[\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{\psi}}{c^2} - \gamma\, \boldsymbol{\psi} \right] \frac{1}{\gamma\, (1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}}{c^2})}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \doteq \left[\mathbf{a} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\psi})\, \boldsymbol{\psi}}{c^2} + \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \times \boldsymbol{\psi}}{c^2} \right] \frac{1}{\gamma^2\, (1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}}{c^2})^3}$$

donde (t, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$) son el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula respecto al sistema de referencia inercial S, ($\boldsymbol{\psi}$) es la velocidad del punto-auxiliar respecto al sistema de referencia inercial S y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. ($\boldsymbol{\psi}$) es una constante. $\gamma = (1 - \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}/c^2)^{-1/2}$

La frecuencia relacional ($\bar{\nu}$) de una partícula no masiva respecto a un sistema de referencia inercial S está dada por:

$$\bar{\nu} \doteq \nu \; \frac{\left(1 - \dfrac{\mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\psi}}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\psi}}{c^2}}}$$

donde (ν) es la frecuencia de la partícula no masiva respecto al sistema de referencia inercial S, ($\mathbf{c}$) es la velocidad de la partícula no masiva respecto al sistema de referencia inercial S, ($\boldsymbol{\psi}$) es la velocidad del punto-auxiliar respecto al sistema de referencia inercial S y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa relacional (m) de una partícula masiva está dada por:

$$m \doteq \frac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}{c^2}}}$$

donde (m_o) es la masa en reposo de la partícula masiva, ($\bar{\mathbf{v}}$) es la velocidad relacional de la partícula masiva y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

La masa relacional (m) de una partícula no masiva está dada por:

$$m \doteq \frac{h\,\bar{\nu}}{c^2}$$

donde (h) es la constante de Planck, ($\bar{\nu}$) es la frecuencia relacional de la partícula no masiva y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Observaciones

§ En los sistemas de referencia inerciales no coincidentes ($\bar{t}_\alpha \neq \tau_\alpha$ y/o $\bar{\mathbf{r}}_\alpha \neq 0$) (α = punto-auxiliar) una constante debe ser sumada en la definición de tiempo relacional tal que el tiempo relacional y el tiempo propio del punto-auxiliar sean iguales ($\bar{t}_\alpha = \tau_\alpha$) y otra constante debe ser sumada en la definición de posición relacional tal que la posición relacional del punto-auxiliar sea cero ($\bar{\mathbf{r}}_\alpha = 0$)

§ En el estudio de un sistema aislado de partículas (masivas y/o no masivas) los observadores inerciales deberían preferentemente usar un punto-auxiliar tal que el momento lineal del sistema aislado de partículas sea cero ($\sum_z m_z \bar{\mathbf{v}}_z = 0$)

Dinámica Relacional

Sea una partícula (masiva o no masiva) con masa relacional m entonces el momento lineal $\mathbf{P}$ de la partícula, el momento angular $\mathbf{L}$ de la partícula, la fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula, el trabajo W realizado por la fuerza neta que actúa sobre la partícula y la energía cinética K de la partícula, para un sistema de referencia inercial, están dados por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\bar{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{L} \doteq \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{r}} = m\,\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\bar{t}} = m\,\bar{\mathbf{a}} + \frac{dm}{d\bar{t}}\,\bar{\mathbf{v}}$$

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \int_1^2 \frac{d\mathbf{P}}{d\bar{t}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} = \Delta\,\mathrm{K}$$

$$\mathrm{K} \doteq m\,c^2$$

donde $(\,\bar{t},\ \bar{\mathbf{r}},\ \bar{\mathbf{v}},\ \bar{\mathbf{a}}\,)$ son el tiempo relacional, la posición relacional, la velocidad relacional y la aceleración relacional de la partícula con respecto al sistema de referencia inercial y $(\,c\,)$ es la velocidad de la luz en el vacío. La energía cinética $(\,\mathrm{K}_o\,)$ de una partícula masiva en reposo es $(\,m_o\,c^2\,)$

Las fuerzas y los campos deben ser expresados sólo con magnitudes relacionales (la fuerza de Lorentz debe ser expresada con la velocidad relacional $\bar{\mathbf{v}}$, el campo eléctrico debe ser expresado con la posición relacional $\bar{\mathbf{r}}$, etc.)

Conclusiones

§ En este artículo, las magnitudes $(\bar{t}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\nu}, m, \mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{F}, \mathrm{W}, \mathrm{K})$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales.

§ Sin embargo, este artículo considera (1) que sería también posible obtener magnitudes cinemáticas y dinámicas $(\bar{t}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\nu}, m, \mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{F}, \mathrm{W}, \mathrm{K})$ que serían invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y (2) que las magnitudes dinámicas $(m, \mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{F}, \mathrm{W}, \mathrm{K})$ estarían dadas también por las ecuaciones de este artículo.

Fuerza Cinética

En un sistema aislado de partículas (masivas y/o no masivas) la fuerza cinética $\mathbf{K}_{ij}$ ejercida sobre una partícula i con masa relacional m_i por otra partícula j con masa relacional m_j está dada por:

$$\mathbf{K}_{ij} \;=\; - \,\frac{d}{d\bar{t}_i} \left[\, \frac{m_i \, m_j}{\mathrm{M}} \, (\, \bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j \,) \right]$$

donde $\bar{t}_i$ es el tiempo relacional de la partícula i, $\bar{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad relacional de la partícula i, $\bar{\mathbf{v}}_j$ es la velocidad relacional de la partícula j y M ($= \sum_z m_z$) es la masa relacional del sistema aislado de partículas.

De la ecuación anterior se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ ($= \sum_z \mathbf{K}_{iz}$) que actúa sobre la partícula i está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; - \,\frac{d}{d\bar{t}_i} \left[\, m_i \, \bar{\mathbf{v}}_i \, \right]$$

donde $\bar{t}_i$ es el tiempo relacional de la partícula i, m_i es la masa relacional de la partícula i y $\bar{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad relacional de la partícula i.

Ahora, reemplazando ($\mathbf{F}_i = d(m_i \, \bar{\mathbf{v}}_i)/d\bar{t}_i$) y reordenando, se obtiene:

$$\mathbf{T}_i \;\doteq\; \mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i \;=\; 0$$

Por lo tanto, en un sistema aislado de partículas (masivas y/o no masivas) la fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una partícula i es siempre cero.

Los observadores inerciales deben usar un punto-auxiliar tal que el momento lineal del sistema aislado de partículas sea cero ($\sum_z m_z \, \bar{\mathbf{v}}_z = 0$)

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

C. Møller, La Teoría de Relatividad.

A. French, Relatividad Especial.

Apéndice I

Transformaciones Generalizadas de Lorentz

El tiempo (t'), la posición ($\mathbf{r}'$), la velocidad ($\mathbf{v}'$) y la aceleración ($\mathbf{a}'$) de una partícula (masiva o no masiva) respecto a un sistema de referencia inercial S' están dados por:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right)$$

$$\mathbf{r}' = \left[\mathbf{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\,\mathbf{V}}{c^2} - \gamma\,\mathbf{V}\,t \right]$$

$$\mathbf{v}' = \left[\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})\,\mathbf{V}}{c^2} - \gamma\,\mathbf{V} \right] \frac{1}{\gamma\,(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}}{c^2})}$$

$$\mathbf{a}' = \left[\mathbf{a} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{V})\,\mathbf{V}}{c^2} + \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{V}}{c^2} \right] \frac{1}{\gamma^2\,(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}}{c^2})^3}$$

donde (t, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$) son el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula respecto a un sistema de referencia inercial S, ($\mathbf{V}$) es la velocidad del sistema de referencia inercial S' respecto al sistema de referencia inercial S y (c) es la velocidad de la luz en el vacío. ($\mathbf{V}$) es una constante. $\gamma = (1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}/c^2)^{-1/2}$

Transformación de Frecuencia

La frecuencia (ν') de una partícula no masiva respecto a un sistema de referencia inercial S' está dada por:

$$\nu' = \nu \, \frac{\left(1 - \dfrac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{c^2}}}$$

donde (ν) es la frecuencia de la partícula no masiva respecto a un sistema de referencia inercial S, ($\mathbf{c}$) es la velocidad de la partícula no masiva respecto al sistema de referencia inercial S, ($\mathbf{V}$) es la velocidad del sistema de referencia inercial S' respecto al sistema de referencia inercial S y (c) es la velocidad de la luz en el vacío.

Apéndice II

Sistema de Ecuaciones

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{[1]} \arrow[d, "d\bar{t}"] & \\
\boxed{[4]} \arrow[d, "d\bar{t}"] & \boxed{[2]} \arrow[l, "\times\, \bar{\mathbf{r}}"'] \arrow[d, "d\bar{t}"] & \\
\boxed{[5]} & \boxed{[3]} \arrow[l, "\times\, \bar{\mathbf{r}}"'] \arrow[r, "\int d\bar{\mathbf{r}}"] & \boxed{[6]}
\end{tikzcd}$$

$$[\,1\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\int \mathbf{P}\, d\bar{t} \;-\; \int\!\!\int \mathbf{F}\, d\bar{t}\, d\bar{t}\right] = 0$$

$$[\,2\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{P} \;-\; \int \mathbf{F}\, d\bar{t}\right] = 0$$

$$[\,3\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\frac{d\mathbf{P}}{d\bar{t}} \;-\; \mathbf{F}\right] = 0$$

$$[\,4\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{P} \;-\; \int \mathbf{F}\, d\bar{t}\right] \times \bar{\mathbf{r}} \;=\; 0$$

$$[\,5\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\frac{d\mathbf{P}}{d\bar{t}} \;-\; \mathbf{F}\right] \times \bar{\mathbf{r}} \;=\; 0$$

$$[\,6\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\int \frac{d\mathbf{P}}{d\bar{t}} \cdot d\bar{\mathbf{r}} \;-\; \int \mathbf{F} \cdot d\bar{\mathbf{r}}\right] = 0$$

$[\,\mu\,]$ es una constante (universal) arbitraria con dimensión de masa.

Apéndice III

Sistema de Ecuaciones

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{[1]} \arrow[d, "d\bar{t}"] & \\
\boxed{[4]} \arrow[d, "d\bar{t}"] & \boxed{[2]} \arrow[l, "\times\, \bar{\mathbf{r}}"'] \arrow[d, "d\bar{t}"] & \\
\boxed{[5]} & \boxed{[3]} \arrow[l, "\times\, \bar{\mathbf{r}}"'] \arrow[r, "\int d\bar{\mathbf{r}}"] & \boxed{[6]}
\end{tikzcd}
$$

$$[\,1\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[\int m\,\bar{\mathbf{v}}\;d\bar{t}\;-\iint \mathbf{F}\;d\bar{t}\,d\bar{t}\right] =\; 0$$

$$[\,2\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[m\,\bar{\mathbf{v}}\;-\int \mathbf{F}\;d\bar{t}\right] =\; 0$$

$$[\,3\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[m\,\bar{\mathbf{a}}\;+\frac{dm}{d\bar{t}}\,\bar{\mathbf{v}}\;-\;\mathbf{F}\right] =\; 0$$

$$[\,4\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[m\,\bar{\mathbf{v}}\;-\int \mathbf{F}\;d\bar{t}\right]\times\bar{\mathbf{r}}\;=\; 0$$

$$[\,5\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[m\,\bar{\mathbf{a}}\;+\frac{dm}{d\bar{t}}\,\bar{\mathbf{v}}\;-\;\mathbf{F}\right]\times\bar{\mathbf{r}}\;=\; 0$$

$$[\,6\,] \qquad \frac{1}{\mu}\left[m\,c^2\;-\int \mathbf{F}\cdot d\bar{\mathbf{r}}\right] =\; 0$$

$[\,\mu\,]$ es una constante (universal) arbitraria con dimensión de masa.