La teoría de Einstein-Infeld-Hoffmann
Einstein-Infeld-Hoffmann's theory

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. El carácter no lineal de la Relatividad General permite que de sus ecuaciones de campo se pueda deducir la ecuación de movimiento de una partícula. El método fue desarrollado en el año 1938 por Einstein, Infeld y Hoffmann. En este artículo presentamos esta teoría aclarando todos los cálculos y demostrando los teoremas implicados

Abstract. The General Relativity is a nonlinear theory, this allows the equation of motion of a particle can be deduced from the field equations. The method was developed in 1938 by Einstein, Infeld and Hoffmann. We present this theory clarifying all calculations and demonstrating the theorems involved.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría de Einstein-Infeld-Hoffmann» fue publicada
el día 1 de mayo de 2016

La teoría de Einstein-Infeld-Hoffmann

Einstein and the field equations unified asymmetric

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Introducción

En la concepción newtoniana de la Naturaleza hay una nítida separación entre materia, fuerza, espacio y tiempo. Por tanto existe una ley para determinar la fuerza (por ejemplo, la ley de gravitación universal) y por separado una ley para determinar el movimiento de una partícula material (la segunda ley de la dinámica newtoniana).

El desarrollo de la teoría electromagnética durante la segunda mitad del siglo XIX va a cambiar (con poco éxito) la representación newtoniana. Surge el concepto de campo que se va a elevar al concepto primario de la Física, hasta el extremo de pretender expresar todas las demás fuerzas e incluso la materia en función de magnitudes de campo electromagnético.

Sin embargo la teoría electromagnética maxwelliana alcanzó un éxito parcial, en particular tuvo que mantener la ecuación de movimiento (la ley Lorentz) como complemento a las ecuaciones de campo.

La teoría de la Relatividad en su intento de interpretar la Naturaleza desde un punto geométrico, va a tener éxito en formar una teoría de campo gravitatorio, que interpreta la fuerza de la gravedad como fruto de la alteración de la geometría del espacio-tiempo.

Un importante rasgo diferenciador existe entre la teoría electromagnética y la teoría general de la Relatividad, mientras que la primera es una teoría lineal la segunda no lo es. Este circunstancia va a determinar que se pueda deducir de la Relatividad General la ecuación de movimiento de una partícula.

En el año 1938 Einstein, Infeld y Hoffmann presentaron una larga y engorrosa investigación por la que determinan a partir de las ecuaciones de campo la ecuación de movimiento de una partícula material, entendida como una singularidad puntual. El método se basa en aproximaciones, consiguiendo obtener la ecuación de movimiento en primera aproximación (la newtoniana) y en segunda aproximación. En un posterior trabajo, Einstein e Infeld, simplificaronn la teoría. Advertidos los autores de que la técnica desarrollada sólo es de aplicación hasta el segundo orden, vuelven una vez más a exponer la teoría que ya es de aplicación a cualquier aproximación.

El trabajo que presentamos no es más que la exposición del método de Einstein-Infeld-Hoffmann de obtención de las ecuaciones de movimiento de una partícula singular a partir de las ecuaciones de campo gravitatorio en el vacío, lo especial de la exposición que sigue es que al contrario del trabajo original, hemos expuesto todos los desarrollos explícitamente, aclarando los cálculos y teoremas implícitos en la demostración

1. El tensor $\gamma_{\iota\kappa}$

Adoptamos la convención de que los índices griegos van de 1 a 3 y los latinos de 0 a 3, correspondiendo el 0 a la coordenada temporal. Las comas en los subíndices representan derivación respecto a las coordenadas espacio-temporales.

El tensor métrico siempre se puede descomponer según

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$$

donde η_{ik} es el tensor métrico de Minkowski, es decir el tensor métrico en ausencia de campo gravitatorio. Por tanto h_{ik} representa la parte correspondiente a la gravedad, sino existiera gravedad h_{ik} sería nulo. Las cantidades h_{ik} no tienen que ser pequeñas.

En asuencia de campo gravitatorio el espacio es impropiamente euclidiano de traza -2 y por tanto es posible elegir un sistema de coordenadas tal que el tensor métrico de Minkowski tome los valores

$$\eta_{00} = 1; \quad \eta_{0\alpha} = 0; \quad \eta_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \tag{1}$$

a estas coordenadas la llamamos cartesianas (o si se prefiere pseudo cartesianas). Naturalmente, respecto a otro sistema de coordenadas, por ejemplo coordenadas esféricas, las componentes de η_{ik} serán diferentes de las antes dadas. Como en los cálculos subsiguientes supondremos (1) quiere decir que las coordenadas que vamos a utilizar son las cartesianas mientras no se diga lo contrario.

Se define el tensor h^{ik} en función de h_{ik} a partir de la relación

$$g_{ir} g^{rk} = \delta_i^k$$

es decir, que los índices no se suben (o bajan) con el tensor de Minkowski, sino con el tensor métrico g_{ik}, dado que no estamos considerando pequeñas las componentes del tensor h_{ik}. Indicar que tanto g_{ik} como h_{ik} son smétricos.

Los cálculos resultan más simples si se introduce el tensor

$$\gamma_{ik} = h_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\eta^{rs} h_{rs}, \tag{2}$$

donde η^{ik} se define por la relación

$$\eta_{ik}\eta^{kr} = \delta_i^r$$

por tanto η^{ik} tiene también las componentes dadas en (1) siempre y cuando se usen coordenadas cartesianas. Notemos que $\eta^{rs} h_{rs}$ no es la contracción del tensor h_{ik}. De (2) encontramos que

$$\gamma_{00} = h_{00} - \frac{1}{2}\left(h_{00} - h_{\alpha\alpha}\right) = \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{\alpha\alpha}$$

mientras que no se diga lo contrario se suma respecto a los índices repetidos. Las restantes ecuaciones son

$$\begin{aligned} \gamma_{0\alpha} &= h_{0\alpha} \\ \gamma_{\alpha\beta} &= h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{00} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{\gamma\gamma}. \end{aligned}$$

Como caso especial tenemos

$$\gamma_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2}h_{00} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{\gamma\gamma}.$$

donde se entiende que hay suma respecto a α.

Multiplicando ambos miembros de (2) por η^{ik}

$$\eta^{ik}\gamma_{ik} = -\eta^{ik} h_{ik}$$

entonces podemos invertir (2)

$$h_{ik} = \gamma_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}\eta^{rs}\gamma_{rs}.$$

Separando el subíndice temporal de los espaciales tenemos

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{1}{2}\gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{\gamma\gamma} \\ h_{0\alpha} &= \gamma_{0\alpha} \\ h_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{00} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\gamma}. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Teoremas integrales

Consideremos una función $F_{\alpha\beta}$ dependiente al menos de dos subíndices α y β y que no tiene que tener carácter tensorial. Suponemos que tiene la propiedad antisimétrica

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}.$$

Consideremos la operación

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$$

donde no distinguimos entre componentes covariantes y contravariantes, de tal forma que x_β representan las coordenadas cartesianas de un punto del espacio tridimensional y suponemos suma respcto a β. Desarrollando la expresión anterior para $\alpha = 1$ encontramos

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3}, \tag{4}$$

por la propiedad antisimétrica $F_{11} = 0$, $F_{22} = 0$ y $F_{33} = 0$. Para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} &= \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} &= \frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Vemos que la función $F_{\alpha\beta}$ tiene solamente tres componentes independientes F_{12}, F_{31}, F_{23}. Si hacemos la asignación

$$A_x = F_{23}; \quad A_y = F_{31}; \quad A_z = F_{12}$$

entonces (4) y (5) se pueden poner como

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

que son las componentes del vector $\nabla \wedge \mathbf{A}$.

Segun el teorema de Stokes

$$\iint_\Sigma \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

donde Σ es una superficie, Γ es la línea que la contornea, $d\mathbf{S}$ es el vector elemento de superficie y $d\mathbf{l}$ es el vector elemental tangencial a la curva Γ. En el caso de que la superficie Σ sea cerrada, entonces la línea perimetral Γ es nula, lo mismo que la integral de línea, por tanto el teorema de Stokes queda

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Expresando este resultado en función de las componentes queda

$$\oint\!\!\oint_\Sigma F_{\alpha\beta,\beta}\, dS_\alpha = 0$$

que es el primero de los teoremas integrales que utilizaremos más adelante.

Por el teorema integral de Gauss tenemos

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \mathbf{B}\, dV$$

donde la superficie Σ es cerrada y contiene un volumen V. En general, si tenemos dos superficies distintas Σ_1 y Σ_2

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \neq \oint\!\!\oint_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

es decir la integral dependerá de la superficie elegida para hacer la integración. Sea V' un volumen que se encuentra tanto en el interior de V_1 como de V_2, los cuales son los volúmenes encerrados en las superficies Σ_1 y Σ_2. Supongamos que $\nabla \mathbf{B}$ es cero en todo punto interior a V_1 y V_2 excepción de V', entonces

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V_1} \nabla \mathbf{B}\, dV = \iiint_{V'} \nabla \mathbf{B}\, dV + \iiint_{V_1 - V'} \nabla \mathbf{B}\, dV = \iiint_{V'} \nabla \mathbf{B}\, dV$$

y lo mismo para la integral alrededor de Σ_2

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{V_2} \nabla \mathbf{B}\, dV = \iiint_{V'} \nabla \mathbf{B}\, dV + \iiint_{V_2 - V'} \nabla \mathbf{B}\, dV = \iiint_{V'} \nabla \mathbf{B}\, dV$$

entonces

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint\!\!\oint_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

por tanto bajo las condiciones consideradas, la integral no depende de la superficie de integración.

Si hacemos la identificación

$$B_{\alpha} = F_{\alpha\beta,\beta}$$

por la propiedad de antisimetría de $F_{\alpha\beta}$ se tiene la propiedad

$$B_{\alpha,\alpha} = F_{\alpha\beta,\beta\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla\mathbf{B} = 0$$

por tanto a la función $F_{\alpha\beta,\beta}$ sería de aplicación el segundo de los teoremas integrales, es decir

$$\oiint_{\Sigma} F_{\alpha\beta,\beta}\, dS_{\alpha}$$

es independiente de la superficie de integración.

3. La parte lineal del tensor de Ricci

Las ecuaciones de campo gravitatorio que vamos a considerar son las del caso exterior, es decir que no aparece en las ecuaciones el tensor de energía-momento de las fuentes externas del campo, o sea

$$R_{ik} = 0$$

donde el tensor de Ricci viene definido por

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ k}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\ k}}{\partial x^{k}} + \Gamma_{ik}^{\ r}\Gamma_{jr}^{\ k} - \Gamma_{ij}^{\ k}\Gamma_{kr}^{\ r},$$

que puede dividirse en parte lineal respecto al tensor métrico y en parte no lineal. Los términos lineales se deducen de los dos primeros sumandos y en ellos centraremos el siguiente cálculo.

Para calcular la parte lineal del tensor de Ricci necesitamos calcular la parte lineal de los símbolos de Christoffel. Comencemos con $\Gamma_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}}$ (donde la raya sobre los índices significa que no se suman), partimos de su definición

$$\Gamma_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} g^{\bar{\alpha}s}\left(g_{\bar{\alpha}s,0} + g_{os,\bar{\alpha}} - g_{0\bar{\alpha},s}\right)$$

como sólo vamos a considerar los términos lineales en el tensor métrico tenemos

$$\overline{\Gamma}_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \eta^{\bar{\alpha}s}\left(h_{\bar{\alpha}s,0} + h_{os,\bar{\alpha}} - h_{0\bar{\alpha},s}\right)$$

donde la barra en $\overline{\Gamma}_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}}$ significa que sólo contemplamos los términos lineales; nótese que hemos elegido coordenadas cartesianas y entonces las componentes del tensor métrico de Minkowski son constantes y sus derivadas nulas. Simplificando

$$\overline{\Gamma}_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \eta^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}\left(h_{\bar{\alpha}\bar{\alpha},0} + h_{0\bar{\alpha},\bar{\alpha}} - h_{0\bar{\alpha},\bar{\alpha}}\right) = -\frac{1}{2} h_{\bar{\alpha}\bar{\alpha},0}$$

donde volvemos a indicar que no estamos suponiendo sumas sobre índices repetidos si estos índices tienen una barra sobre ellos.

El procedimiento seguido anteriormente es el mismo que hay que utilizar para calcular las restantes partes lineales de las componentes de los símbolos de Christoffel, obteniéndose los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}} &= -\frac{1}{2} h_{\bar{\alpha}\bar{\alpha},0} \\
\overline{\Gamma}_{00}^{\ \alpha} &= -h_{0\alpha,0} + \frac{1}{2} h_{00,\alpha} \\
\overline{\Gamma}_{00}^{\ 0} &= \frac{1}{2} h_{00,0} \\
\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\ 0} &= \frac{1}{2} h_{00,\alpha} \\
\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\ \beta} &= -\frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0} - \frac{1}{2} h_{0\beta,\alpha} - \frac{1}{2} h_{0\alpha,\beta} \quad (\alpha = \beta \ \text{ o } \ \alpha \neq \beta) \\
\overline{\Gamma}_{\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\beta}} &= -\frac{1}{2} h_{\bar{\beta}\bar{\beta},\alpha} \quad (\alpha = \beta \ \text{ o } \ \alpha \neq \beta) \\
\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ 0} &= \frac{1}{2} h_{0\beta,\alpha} + \frac{1}{2} h_{0\alpha,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,0} \quad (\alpha = \beta \ \text{ o } \ \alpha \neq \beta) \\
\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} &= -\frac{1}{2} h_{\beta\gamma,\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha\gamma,\beta} + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\gamma} \quad (\forall \alpha,\beta,\gamma).
\end{aligned} \tag{6}$$

Con los anteriores valores se puede calcular la parte lineal del tensor de Ricci $\overline{R}_{ij}$, así para la componente 0,0

$$\overline{R}_{00}=\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0k}^{\;k}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{00}^{\;k}}{\partial x^{k}}=\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\;\alpha}}{\partial x^{0}}+\frac{\partial\overline{\Gamma}_{00}^{\;0}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{00}^{\;\alpha}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{00}^{\;0}}{\partial x^{0}}=\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\;\alpha}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{00}^{\;\alpha}}{\partial x^{\alpha}},$$

utilizando (6) encontramos

$$\overline{R}_{00}=-\frac{1}{2}h_{\alpha\alpha,00}+h_{0\alpha,0\alpha}-\frac{1}{2}h_{00,\alpha\alpha}. \tag{7}$$

Para la componente $0,\alpha$ tenemos

$$\overline{R}_{0\alpha}=\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0k}^{\;k}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\;k}}{\partial x^{k}}=\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0\beta}^{\;\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial\overline{\Gamma}_{00}^{\;0}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\;\beta}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\overline{\Gamma}_{0\alpha}^{\;0}}{\partial x^{0}}$$

utilizando (6) se encuentra

$$\overline{R}_{0\alpha}=-\frac{1}{2}h_{\beta\beta,0\alpha}+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,0\beta}+\frac{1}{2}h_{0\beta,\alpha\beta}-\frac{1}{2}h_{0\alpha,\beta\beta}, \tag{8}$$

finalmente para las componentes α,β obtenemos

$$\overline{R}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}h_{00,\alpha\beta}-\frac{1}{2}h_{\gamma\gamma,\alpha\beta}+\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\beta\gamma}-\frac{1}{2}h_{0\beta,0\alpha}-\frac{1}{2}h_{0\alpha,0\beta}+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,00}+\frac{1}{2}h_{\beta\gamma,\alpha\gamma}-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\gamma\gamma}. \tag{9}$$

De (9) deducimos

$$\overline{R}_{\alpha\alpha}=\frac{1}{2}h_{00,\alpha\alpha}-h_{\alpha\alpha,\gamma\gamma}+h_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}-h_{0\alpha,0\alpha}+\frac{1}{2}h_{\alpha\alpha,00} \tag{10}$$

donde suponemos que tanto en el primero como el segundo miembro se suma respecto a α.

Si las partes no lineales del tensor de Ricci las representamos por

$$\Lambda'_{00},\quad \Lambda'_{0\alpha},\quad \Lambda'_{\alpha\beta}$$

entonces las componentes del tensor de Ricci (7), (8) y (9) son

$$\begin{aligned}
R_{00}&=-\frac{1}{2}h_{\alpha\alpha,00}+h_{0\alpha,0\alpha}-\frac{1}{2}h_{00,\alpha\alpha}+\Lambda'_{00}\\
R_{0\alpha}&=-\frac{1}{2}h_{\beta\beta,0\alpha}+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,0\beta}+\frac{1}{2}h_{0\beta,\alpha\beta}-\frac{1}{2}h_{0\alpha,\beta\beta}+\Lambda'_{0\alpha}\\
R_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2}h_{00,\alpha\beta}-\frac{1}{2}h_{\gamma\gamma,\alpha\beta}+\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\beta\gamma}-\frac{1}{2}h_{0\beta,0\alpha}-\frac{1}{2}h_{0\alpha,0\beta}+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,00}+\frac{1}{2}h_{\beta\gamma,\alpha\gamma}-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+\Lambda'_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{11}$$

4. Las ecuaciones de campo

Teniendo en cuenta que sólo son distintas de cero las componentes diagonales del tensor métrico de Minkowski y que utilizamos coordenadas cartesianas tenemos

$$\eta^{rs}R_{rs}=\eta^{00}R_{00}+\eta^{\alpha\alpha}R_{\alpha\alpha}=R_{00}-R_{\alpha\alpha}$$

donde entendemos que se suma respecto a todos los posibles valores de α. De (11) encontramos que

$$\eta^{rs}R_{rs}=-h_{\alpha\alpha,00}+2h_{0\alpha,0\alpha}-h_{00,\alpha\alpha}+h_{\alpha\alpha,\gamma\gamma}-h_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}+\left(\Lambda'_{00}-\Lambda'_{\alpha\alpha}\right), \tag{12}$$

en los primeros términos hemos agrupado la parte lineal y entreparéntesis se encuentra la parte no lineal respecto a h_{ik}.

La ecuación de campo gravitatorio en el vacío es

$$R_{ik}=0\quad\Rightarrow\quad\eta^{ik}R_{ik}=0\quad\Rightarrow\quad R_{ik}-\frac{1}{2}\eta_{ik}\eta^{rs}R_{rs}=0. \tag{13}$$

Vamos a calcular las componentes del último de los tensores anteriores. Empezamos por la componente 0,0 para lo cual usamos la primera ecuación (12) y la (13) encontrándose después de la simplificación

$$R_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}\eta^{rs}R_{rs}=-\frac{1}{2}h_{\alpha\alpha,\gamma\gamma}+\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}+\Lambda'_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}\eta^{rs}\Lambda'_{rs}=-\frac{1}{2}h_{\alpha\alpha,\gamma\gamma}+\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}+\Lambda''_{00}$$

donde todos los términos no lineales han sido agrupados en Λ''_{00}. Usando (3) expresamos la anterior ecuación en función del tensor γ_{ik}

$$2\left(R_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}\eta^{rs}R_{rs}\right)=-\gamma_{00,\gamma\gamma}+\gamma_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}+2\Lambda''_{00}=0. \tag{14}$$

Para las componentes $0,\alpha$ se encuentra de (11)

$$R_{0\alpha}-\frac{1}{2}\eta_{0\alpha}\eta^{rs}R_{rs}=R_{0\alpha}=-\frac{1}{2}h_{\gamma\gamma,0\alpha}+\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,0\gamma}+\frac{1}{2}h_{0\gamma,\alpha\gamma}-\frac{1}{2}h_{0\alpha,\gamma\gamma}+2\Lambda''_{0\alpha},$$

que puesto en función de γ_{ik} resulta

$$2\left(R_{0\alpha}-\frac{1}{2}\eta_{0\alpha}\eta^{rs}R_{rs}\right)=-\gamma_{0\alpha,\gamma\gamma}+\gamma_{0\gamma,\alpha\gamma}+\gamma_{\alpha\gamma,0\gamma}-\gamma_{00,0\alpha}+2\Lambda''_{0\alpha}=0, \tag{15}$$

Finalmente para las componentes α,β

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}R_{rs}=\frac{1}{2}h_{00,\alpha\beta}-\frac{1}{2}h_{\gamma\gamma,\alpha\beta}+\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\beta\gamma}-\frac{1}{2}h_{0\beta,0\alpha}-\frac{1}{2}h_{0\alpha,0\beta}+\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,00}+\frac{1}{2}h_{\beta\gamma,\alpha\gamma}-$$
$$-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta,\gamma\gamma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{\gamma\gamma,00}+\delta_{\alpha\beta}h_{0\gamma,0\gamma}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{00,\gamma\gamma}+\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{\gamma\gamma,\delta\delta}-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}h_{\delta\gamma,\delta\gamma}+2\Lambda''_{\alpha\beta},$$

y en función de γ_{ik}

$$\begin{aligned}2\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}R_{rs}\right)&=\gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma}-\gamma_{0\beta,0\alpha}-\gamma_{0\alpha,0\beta}-\delta_{\alpha\beta}\gamma_{00,00}+\\&+\gamma_{\alpha\beta,00}+\gamma_{\beta\gamma,\alpha\gamma}-\gamma_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+2\delta_{\alpha\beta}\gamma_{0\gamma,0\gamma}-\delta_{\alpha\beta}\gamma_{\delta\gamma,\delta\gamma}+2\Lambda''_{\alpha\beta}=0,\end{aligned} \tag{16}$$

Las ecuaciones (14), (15) y (16) están divididas en una parte que es lineal respecto a γ_{ik} y otra que no lo es, pero es más conveniente hacer otra separación por razones que veremos más adelante, entonces

$$\begin{aligned}\Phi_{00}+2\Lambda_{00}&=0\\ \Phi_{0\alpha}+2\Lambda_{0\alpha}&=0\\ \Phi_{\alpha\beta}+2\Lambda_{\alpha\beta}&=0\end{aligned} \tag{17}$$

o sea

$$\Phi_{ik}+2\Lambda_{ik}=2\left(R_{ik}-\frac{1}{2}\eta_{ik}\eta^{rs}R_{rs}\right)=0,$$

donde hacemos las definiciones

$$\begin{aligned}\Phi_{00}&=-\gamma_{00,\gamma\gamma}\\ \Phi_{0\alpha}&=-\gamma_{0\alpha,\gamma\gamma}+\gamma_{0\gamma,\alpha\gamma}\\ \Phi_{\alpha\beta}&=-\gamma_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+\gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma}+\gamma_{\beta\gamma,\alpha\gamma}-\delta_{\alpha\beta}\gamma_{\delta\gamma,\delta\gamma}\\ 2\Lambda_{00}&=\gamma_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}+2\Lambda''_{00}\\ 2\Lambda_{0\alpha}&=\gamma_{\alpha\gamma,0\gamma}-\gamma_{00,0\alpha}+2\Lambda''_{0\alpha}\\ 2\Lambda_{\alpha\beta}&=-\gamma_{0\beta,0\alpha}-\gamma_{0\alpha,0\beta}-\delta_{\alpha\beta}\gamma_{00,00}+\gamma_{\alpha\beta,00}+2\delta_{\alpha\beta}\gamma_{0\gamma,0\gamma}+2\Lambda''_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{18}$$

5. El fundamente del método de Einstein-Infeld-Hofmann

Los dos elementos que fundamenta el método de Einstein-Infeld-Hofmann para obtener las ecuaciones de movimiento a partir las ecuaciones de campo son las ecuaciones (18) y los dos teoremas integrales expuestos en el epígrafe 2.

Partimos de que la materia está formada por singularidades puntuales en donde no es de aplicación las ecuaciones de campo de la Relatividad General. Fuera de estas singularidades sólo existe espacio vacío donde es válida la ecuación $R_{ik}=0$.

Vamos a considerar las funciones $\Phi_{i\beta}$ definidas en (18); notamos que la componente $0,\beta$ se puede poner como

$$\Phi_{0\beta}=-\gamma_{0\beta,\gamma\gamma}+\gamma_{0\gamma,\beta\gamma}=\left(-\gamma_{0\beta,\gamma}+\gamma_{0\gamma,\beta}\right)_{,\gamma}=F_{0\beta\gamma,\gamma}$$

la función $F_{0\beta\gamma}$ tiene la propiedad de antisimetría respecto a los índice β y γ

$$F_{0\beta\gamma}=-F_{0\gamma\beta}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\gamma_{\beta\gamma,\alpha\gamma}=\gamma_{\beta\delta,\alpha\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta,\delta\gamma}$$

las componentes $\Phi_{\alpha\beta}$ de la tercera ecuación (18) se expresa

$$\Phi_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta,\gamma\gamma} + \gamma_{\alpha\gamma,\beta\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta,\delta\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\gamma_{\delta\gamma,\delta\gamma} = \left(-\gamma_{\alpha\beta,\gamma} + \gamma_{\alpha\gamma,\beta} + \delta_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta,\delta} - \delta_{\alpha\beta}\gamma_{\delta\gamma,\delta}\right)_{,\gamma} = F_{\alpha\beta\gamma,\gamma}$$

notamos que la función $F_{\alpha\beta\gamma}$ es antisimétrica respecto a los índices β y γ. Reuniendo los dos resultados anteriores encontramos que

$$\Phi_{i\beta} + 2\Lambda_{i\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{i\beta\gamma,\gamma} + 2\Lambda_{i\beta} = 0 \tag{19}$$

siendo $F_{i\beta\gamma}$ una función antisimétrica respecto a los índices β y γ.

Suponemos que existen N singularidades cuyas coordenadas espaciales ξ_s^α dependen de la coordenada temporal x^0

$$\xi_s^\alpha = \xi_s^\alpha\left(x^0\right) \tag{20}$$

donde el índice s indica que se trata de las coordenadas de la partícula s y el índice α distingue entre las tres coordenadas espaciales. Nuestro objetivo es obtener las N ecuaciones (20) que son las ecuaciones de movimiento de la singularidad s.

Consideremos una superficie cerrada Σ_s donde no hay ninguna singularidad y que engloba a la singularidad s y sólo a ella. En el interior de esa superfice es de aplicación las ecuaciones de campo (19), excepción hecha de la misma singularidad. Hacemos la integral

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_s} \left(F_{i\beta\gamma,\gamma} + 2\Lambda_{i\beta}\right) dS_\beta = \oint\!\!\oint_{\Sigma_s} F_{i\beta\gamma,\gamma}\, dS_\beta + \oint\!\!\oint_{\Sigma_s} 2\Lambda_{i\beta}\, dS_\beta = 0 \tag{21}$$

que es nula por la ecuación de campo (19). Teniendo presente que la función $F_{i\beta\gamma}$ es antisimétrica respecto a los índice β y γ se cumplen los requisitos del primer teorema integral deducido en 2 y por tanto

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma^p} F_{i\beta\gamma,\gamma}\, dS_\beta = 0$$

entonces de (21) concluimos que

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_s} \Lambda_{i\beta}\, dS_\beta = 0,$$

ahora bien de la ecuación de campo (19) y dada la antisimetria de $F_{i\beta\gamma}$ tenemos

$$F_{i\beta\gamma,\gamma\beta} + 2\Lambda_{i\beta,\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{i\beta,\beta} = 0$$

entonces se cumplirán las condiciones del segundo de los teoremas integrales de 2 y por tanto se cumple que la integral

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_s} \Lambda_{i\beta}\, dS_\beta = 0 \tag{22}$$

debe ser independiente de la forma de la superficie Σ^p que engloba a la singularidad s, con tal que por la superficie no pase por ninguna singularidad.

Si la integral (22) no depende de la forma de la superficie tampoco puede depender de los potenciales de campo porque estos dependerían de las coordenadas de la superficie, que como hemos dicho es arbitraria; por tanto (22) sólo puede depender de las coordenadas de la singularidad s y de sus derivadas temporales. O dicho de otra forma, (22) son las ecuaciones de movimiento de la partícula s.

6. Desarrollo en serie de γ_{ik}

Para aplicar la integral (22) y obtener las ecuaciones de movimiento de las singularidades es necesario previamente resolver las ecuaciones de campo. Esto lo haremos mediante el método de aproximaciones sucesivas.

Vamos a suponer que los potenciales de campo gravitatorio varían lentamente con respecto al tiempo, una situación que llamaremos cuasi-estacionaria. Si $\varphi(x^\alpha, x^0)$ es una función de las coordenadas, entonces la derivada

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

es de orden 1 respecto a la inversa de c, que va a ser la magnitud respecto a la cual haremos los posteriores desarrollos en serie. Entonces para que quede más evidente esta dependencia respecto a c, vamos a introducir una nueva variable temporal

$$x'^0 = \frac{1}{c}x^0\ ; \quad x'^\alpha = x^\alpha \tag{23}$$

por tanto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}=\varphi_{,0}=\frac{\partial\varphi}{\partial x'^0}\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\varphi_{|0}\,.$$

Para resolver las ecuaciones de campo vamos a utilizar el método de aproximación desarrollando las componentes de tensor métrico. Por otra parte sabemos que las ecuaciones de campo no determinan completamente al tensor métrico, en efecto si g_{ik} es una solución de campo, el tensor métrico g'_{ik} que resulta de una transformación de coordenadas también debe ser solución de las ecuaciones de campo. Como hay cuatro ecuaciones de transformación de coordenadas, debe de haber cuatro condiciones que se pueden imponer a las ecuaciones de campo. Es decir, podemos establecer cuatro condiciones arbitrarias a las transformaciones de coordenadas (condiciones que no pueden ser covariantes) y así obtenemos una definida solución del tensor métrico.

Las cuatro condiciones coordenadas que vamos a establecer, elegidas para simplificar los cálculos, son

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^0}-\frac{\partial\gamma_{0\alpha}}{\partial x^\alpha}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x'^0}-\frac{\partial\gamma_{0\alpha}}{\partial x^\alpha}=0\\&\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=0.\end{aligned}\qquad(24)$$

Vamos a desarrollar γ_{ik} en serie de potencias inversas de c. Pero la constante de la que dependen los potenciales gravitatorios es la inversa del cuadrado de c, es decir que realmente el desarrollo en serie es respecto a c^2. Por esta razón el orden de los términos del desarrollo en serie se diferenciarán entre ellos de dos en dos órdenes; por ejemplo, si suponemos que el primer término en el desarrollo de γ_{00} es l tenemos

$$\gamma_{00}=\overset{(l)}{\gamma}_{00}+\overset{(l+2)}{\gamma}_{00}+\overset{(l+4)}{\gamma}_{00}+$$

donde el número entre paréntesis sobre cada término del desarrollo significa el exponente negativo al que está elevada la c que forma parte de la expresión de dicho término y que define su orden de pequeñez.

Las condiciones (24) establecen ciertas limitaciones sobre el desarrollo en serie de γ_{ik}. Supongamos que el primer término en el desarrollo de γ_{00} sea de orden l, entonces de la primera ecuación (24) se deduce que $\gamma_{0\alpha}$ debe tener como primer término de su desarrollo en serie el de orden $l+1$, en efecto

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\overset{(l)}{\gamma}_{00}}{\partial x'^0}=\frac{\partial\overset{(l+1)}{\gamma}_{0\alpha}}{\partial x^\alpha}.$$

De la segunda ecuación (24) se deduce que si el primer término del desarrollo en serie de $\gamma_{\bar\alpha\bar\alpha}$ es de orden l entonces igual será para $\gamma_{\alpha\beta}$ donde $\alpha\neq\beta$.

Para hallar las características del desarrollo en serie nos puede servir de guía el elemento de línea en la aproximación lineal de la Relatividad General

$$ds^2=\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)c^2dt^2+2g_{0\alpha}cdtdx^\alpha-\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

donde ϕ es el potencial gravitatorio newtoniano. Entonces

$$h_{00}=\overset{(2)}{h}_{00}=\frac{2\phi}{c^2}$$
$$h_{\bar\alpha\bar\alpha}=\overset{(2)}{h}_{\bar\alpha\bar\alpha}=\frac{2\phi}{c^2}$$
$$h_{\alpha\beta}=\overset{(2)}{h}_{\alpha\beta}=0$$

de donde deducimos que

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00}=\overset{(2)}{h}_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}\eta^{rs}\overset{(2)}{h}_{rs}=\overset{(2)}{h}_{00}-\frac{1}{2}\left(\overset{(2)}{h}_{00}-\sum_\gamma\overset{(2)}{h}_{\gamma\gamma}\right)=\overset{(2)}{h}_{00}-\frac{1}{2}\left(\overset{(2)}{h}_{00}-3\overset{(2)}{h}_{00}\right)=2\overset{(2)}{h}_{00}$$
$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha}=\overset{(3)}{h}_{0\alpha}$$
$$\overset{(2)}{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}=\overset{(2)}{h}_{\bar\alpha\bar\alpha}-\frac{1}{2}\eta_{\bar\alpha\bar\alpha}\eta^{rs}\overset{(2)}{h}_{rs}=\overset{(2)}{h}_{\bar\alpha\bar\alpha}-\overset{(2)}{h}_{00}=0$$

$$\overset{(2)}{\gamma}_{\alpha\beta}\left(\alpha\neq\beta\right)=0$$

recordamos que la barra sobre el índice significa que no se suma respecto a ese índice aunque se encuentre repetido. Hemos tenido en cuenta que el desarrollo en serie de $\gamma_{0\alpha}$ es un orden mayor que el de γ_{00}. Por tanto el desarrollo en serie de γ_{ik} es

$$\begin{aligned}
\gamma_{00} &= \overset{(2)}{\gamma}_{00}+\overset{(4)}{\gamma}_{00}+\overset{(6)}{\gamma}_{00}+\cdots\\
\gamma_{0\alpha} &= \overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha}+\overset{(5)}{\gamma}_{0\alpha}+\overset{(7)}{\gamma}_{0\alpha}+\cdots\\
\gamma_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} &= \overset{(4)}{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}+\overset{(6)}{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}+\overset{(8)}{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}+\cdots\\
\gamma_{\alpha\beta}\left(\alpha\neq\beta\right) &= \overset{(4)}{\gamma}_{\alpha\beta}+\overset{(6)}{\gamma}_{\alpha\beta}+\overset{(8)}{\gamma}_{\alpha\beta}+\cdots
\end{aligned} \tag{25}$$

7. Método de resolución de las ecuaciones de campo por aproximaciones sucesivas

Vamos a exponer el mecanismo para resolver las ecuaciones de campo (18) por el método de aproximaciones sucesivas. En las ecuaciones de campo

$$\Phi_{ik}+2\Lambda_{ik}=0$$

están reunidas en Φ_{ik} los términos que hay que determinar, mientras que en Λ_{ik} se encuentran los términos que necesitamos conocer para resolver la ecuación. Los primeros términos del desarrollo en serie (25) que hay que calcular son

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00},\quad \overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha},\quad \overset{(4)}{\gamma}_{\alpha\beta},$$

por la primera ecuación de campo encontramos

$$\overset{(2)}{\Phi}_{00}+2\overset{(2)}{\Lambda}_{00}=0$$

entonces para calcular $\overset{(2)}{\gamma}_{00}$ es necesario conocer por (18)

$$2\overset{(2)}{\Lambda}_{00}=\overset{(2)}{\gamma}_{\alpha\gamma,\alpha\gamma}+2\overset{(2)}{\Lambda''}_{00}$$

pero $\overset{(2)}{\gamma}_{\alpha\gamma}$ es cero por (25) y $\overset{(2)}{\Lambda''}_{00}$ también es nulo puesto que aquí están reunidos los términos no lineales en γ_{ik}, por (25) el primer término de su desarrollo en serie es el 4 (o sea, el producto de los dos primeros términos del desarrollo de γ_{00}), por tanto de la primera ecuación (25) queda

$$\nabla^2\overset{(2)}{\gamma}_{00}=0 \tag{26}$$

ecuación diferencial que podemos resolver.

De la segunda ecuación de campo podemos calcular el primer término en el desarrollo en serie de $\gamma_{0\alpha}$. Para ello será necesario conocer por (18)

$$2\overset{(3)}{\Lambda}_{0\alpha}=\frac{1}{c}\overset{(2)}{\gamma}_{\alpha\gamma|0\gamma0}-\frac{1}{c}\overset{(2)}{\gamma}_{00|0\alpha}+2\overset{(3)}{\Lambda''}_{0\alpha} \tag{27}$$

en la anterior expresión hemos pasado de derivar con x^0 a hacer la derivación respecto a x'^0 lo que significa que al hacer esta última derivación aumenta en uno el orden del desarrollo de la cantidad derivada. El primer sumando del segundo miembro de (27) es nulo porque el desarrollo de $\gamma_{\alpha\gamma}$ comienza con el orden 4. El segundo sumando es conocido porque ha sido determinado en el paso anterior y finalmente el último sumando es cero porque, como ya indicamos, el primer término de su desarrollo es el 4. Entonces de la segunda ecuación de campo (18) encontramos

$$-\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha,\gamma\gamma}+\overset{(3)}{\gamma}_{0\gamma,\alpha\gamma}=-2\overset{(3)}{\Lambda}_{0\alpha}$$

que se puede resolver y determinar $\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha}$.

De la tercera ecuación de campo se calcula el primer término del desarrollo de $\gamma_{\alpha\beta}$. Para lo cual es necesario conocer

$$2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\beta|0\alpha}-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|0\beta}-\frac{1}{c^2}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\gamma}_{00|00}+\frac{1}{c^2}\overset{(2)}{\gamma}_{\alpha\beta|00}+\frac{1}{c}2\delta_{\alpha\beta}\overset{(3)}{\gamma}_{0\gamma|0\gamma}+2\overset{(4)}{\Lambda''}_{\alpha\beta}$$

todos los sumandos del segundo miembro o son nulos o son conocidos por haberse calculado con anterioridad, por tanto la tercera ecuación de campo queda

$$-\overset{(4)}{\gamma}_{\alpha\beta,\gamma\gamma}+\overset{(4)}{\gamma}_{\alpha\gamma,\beta\gamma}+\overset{(4)}{\gamma}_{\beta\gamma,\alpha\gamma}-\delta_{\alpha\beta}\overset{(4)}{\gamma}_{\delta\gamma,\delta\gamma}=-2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}$$

de donde obtenemos el término de cuarto orden de $\gamma_{\alpha\beta}$, que es el primero distinto de cero de su desarrollo.

Resumiendo, podemos decir que en la ecuación de campo

$$\overset{(l)}{\Phi}_{ik}+2\overset{(l)}{\Lambda}_{ik}=0$$

que nos sirve para determinar las funciones del desarrollo en serie de los potenciales, las funciones a determinar se encuentran en el primer sumando y en el segundo sumando se encuentran funciones que ya han sido determinadas en pasos anteriores.

El anterior razonamiento se puede extender para los restantes términos del desarrollo en serie con lo cual podemos formular el siguiente teorema. Si son conocidos los términos

$$\overset{(2l)}{\gamma}_{00};\quad \overset{(2l+1)}{\gamma}_{0\alpha};\quad \overset{(2l+2)}{\gamma}_{\alpha\beta}$$

donde l es un número entero, empezando por $l=1$, entonces por las ecuaciones de campo (25) se pueden encontrar los términos

$$\overset{(2l+2)}{\gamma}_{00};\quad \overset{(2l+3)}{\gamma}_{0\alpha};\quad \overset{(2l+4)}{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

8. Cálculo del primer término del desarrollo en serie de γ_{00}

En (26) hemos encontrado la ecuación diferencial para obtener el primer término en el desarrollo de γ_{00}, conocida esta función se van calculando todos los demás términos de los tres desarrollos en serie de las ecuaciones de campo (17). Por tanto, el primer paso en la resolución de las ecuaciones de campo debe ser la resolución de (26) y de ella dependerá todo el cálculo posterior. Como suponemos que las partículas son singularidades puntuales, la solución de (26) para una singularidad dada debe ser el potencial gravitatorio newtoniano

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00}=\frac{4}{c^2}\phi=-\frac{4G}{c^2}\frac{m}{r}\ (28)$$

donde r es definido por

$$r=\sqrt{\sum_{\alpha}\left(x^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right)^2}$$

siendo x^{α} las coordenadas espaciales cartesianas de un punto del campo y ξ^{α} las coordendas espaciales, también cartesianas, del punto donde se encuentra la singularidad. Si consideramos que hay un conjunto de N singularidades, entonces tendremos

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00}=\sum_{s=1}^{N}\frac{2}{c^2}\phi_s=\sum_{s=1}^{N}-\frac{4G}{c^2}\frac{m_s}{r_s}$$

donde el subíndice s nos identifica cada una de las partículas del sistema y

$$r_s=\sqrt{\sum_{\alpha}\left(x^{\alpha}-\xi_s^{\alpha}\right)^2}$$

Pero (28) no es la única solución de (26), matemáticamente existen las soluciones que llamaremos dipolares, que son del estilo

$$\frac{x}{r^3};\quad \frac{y}{r^3};\quad \frac{z}{r^3}$$

pues como se comprueba directamente

$$\nabla^2\frac{x}{r^3}=0;\quad \nabla^2\frac{y}{r^3}=0;\quad \nabla^2\frac{z}{r^3}=0.$$

Entonces una solución general de (26) para una determinada partícula es dada en sus primeros términos por

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00}=a\frac{1}{r}+b\frac{x}{r^3}+c\frac{y}{r^3}+d\frac{z}{r^3}+\ldots \tag{29}$$

donde a, b, c y d son números que tienen la estructura

$$a=a_1+a_2(t);\quad b=b_1+b_2(t);\quad c=c_1+c_2(t);\quad d=d_1+d_2(t)$$

siendo a_1, b_1, c_1 y d_1 constantes numéricas y t es el tiempo. Indicar que además de las soluciones dipolares de (26) existe también las multipolares de orden superior.

Pero físicamente sólo tiene sentido la solución polar, es decir el primer sumando de (29) puesto que la experiencia nos muestra que una partícula puntual no da soluciones de tipo multipolar, además las soluciones dipolares están ausentes en la teoría gravitatoria.

9. La masa *m* debe ser independiente del tiempo

Como hemos encontrado en (29) la soluciones de tipo polar tienen, en general, el coeficiente m que aparece en (28) dependiente del tiempo. Vamos a comprobar a continuación que esta posibilidad no existe para un caso físicamente real.

De las ecuaciones de campo (18) se encuentra que para el segundo grupo de ecuaciones de campo a orden 3 tenemos

$$-\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha,\gamma\gamma}+\overset{(3)}{\gamma}_{0\gamma,\alpha\gamma}=\overset{(2)}{\gamma}_{00|0\alpha} \qquad (30)$$

el primer sumando es antisimétrico respecto a los índices α y γ por lo tanto tiene una integral de superficie nula según se deduce del primer teorema integral, entonces la integral de superficie del segundo miembro de (30) debe ser nulo

$$\oiint \overset{(2)}{\gamma}_{00,0\alpha}dS_\alpha=0. \qquad (31)$$

Vamos a calcular el integrando de (31)

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00|0}=-\frac{4G}{c^3}\left(\frac{m}{r}\right)_{|0}=-\frac{4G}{c^3}\frac{\dot m}{r}-\frac{4G}{c^3}m\left(\frac{1}{r}\right)_{|0}=-\frac{4G}{c^3}\frac{\dot m}{r}+\frac{4G}{c^3}\frac{\dot r}{r^2}=-\frac{4G}{c^3}\frac{\dot m}{r}+\frac{4G}{c^3}\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \xi^\alpha}\dot\xi^\alpha$$

el punto significa derivación respecto a la coordenada temporal x'^0. Derivando ahora respecto a x^α

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00|0\alpha}=-\frac{4G}{c^3}\left(\frac{\dot m}{r}\right)_{,\alpha}+\frac{4G}{c^3}\dot\xi^\alpha\left(\frac{1}{r^2}\right)_{,\alpha}\cdot (32)$$

Vamos a comprobar que las únicas integrales de superficie que son distintas de cero son aquellas cuyo integrando depende de la inversa del cuadrado de r. Como la forma de la superficie de integración no afecta a su resultado (como se muestra en nuestro segundo teorema integral), vamos a considerar una esfera de radio arbitrario r y centrada en la singularidad cuyo potencial gravitatorio estamos calculando. Entonces la integral de superficie vendrá dada en general por

$$\oiint f(r)g_\alpha(\theta,\varphi)dS_\alpha=\oiint f(r)g_\alpha(\theta,\varphi)\frac{x^\alpha}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (33)$$

o bien sumas de integrales como la anterior, donde utilizamos coordenadas esféricas que se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante las expresiones

$$\begin{aligned}x&=r\sin\theta\cos\varphi\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi \quad (34)\\ z&=r\cos\theta\end{aligned}$$

y hemos tenido en cuenta que el elemento de superficie de componentes dS_α se dirige en la dirección normal a la superficie esférica, entonces sus componentes son

$$dS_\alpha=dS\cos\gamma_\alpha=\frac{x^\alpha}{r}dS$$

donde γ_α son los tres cosenos directores del vector **r** (que va del centro de la esfera al punto de la superficie) y también, en nuestro caso de la superficie esférica, son los cosenos directores del vector elemento de superficie $d\mathbf{S}$ que tiene de módulo dS.

Volviendo a la integral (33) y teniendo presente (34) llegamos a

$$\oiint f(r)g_\alpha(\theta,\varphi)dS_\alpha=r^2f(r)\oiint g'_\alpha(\theta,\varphi)d\theta d\varphi=Kr^2f(r)$$

K es un factor numérico resultado de la integración de las variables angulares. Pero como la integral no puede depender de la forma (y por tanto tampoco del tamaño) de la superficie de integración debe ocurrir que

$$r^2 f(r) = cte \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{cte}{r^2}$$

y en caso contrario K tiene que ser cero. Por tanto demostramos que las únicas integrales de superficie que no son nulas son aquellas en cuyo argumento aparece $1/r^2$.

Retomamos nuestra argumentación volviendo a la integral (31). Por el teorema que acabamos de demostrar la integral de superficie del segundo sumando del segundo miembro es nulo pues el integrando depende de $1/r^3$, mientras que la integral de superficie del primer sumando depdende de $1/r^2$ y por tanto no tiene que ser nula. No obstante, esta integral debe ser cero como antes hemos dicho, y esto sólo puede ocurrir si

$$\dot{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = cte$$

tal como queríamos demostrar.

10. Las ecuaciones de campo bajo la condición coordenada

Al imponer la condición coordenada (24) las ecuaciones de campo (18) quedan

$$\begin{aligned} &\gamma_{00|\gamma\gamma} = 2\Lambda''_{00} \\ &\gamma_{0\alpha|\gamma\gamma} = 2\Lambda''_{0\alpha} \\ &\gamma_{\alpha\beta|\gamma\gamma} = -\frac{1}{c}\gamma_{0\beta|0\alpha} - \frac{1}{c}\gamma_{0\alpha|0\beta} + \frac{1}{c^2}\delta_{\alpha\beta}\gamma_{00|00} + \frac{1}{c^2}\gamma_{\alpha\beta|00} + 2\Lambda''_{\alpha\beta} = 2\Lambda_{\alpha\beta}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Para poder aplicar nuestro teorema integral vamos a hacer una transformación que conduzca a que en el primer miembro de las dos últimas ecuaciones haya una expresión antisimétrica, de tal forma que su integral de superficie se anule. Si en la segunda ecuación restamos a los dos miembros $\gamma_{0\gamma|\alpha\gamma}$ entonces

$$\gamma_{0\alpha|\gamma\gamma} - \gamma_{0\gamma|\alpha\gamma} = 2\Lambda''_{0\alpha} - \gamma_{0\gamma|\alpha\gamma} = 2\Lambda''_{0\alpha} - \frac{1}{c}\gamma_{00|0\alpha}$$

habiendo aplicado en el segundo miembro la primera ecuación de la condición coordenada (24) y encontramos que el primer miembro es antisimétrico respecto a los índices α y γ.

En la tercera ecuación (34) restamos en ambos miembros $\gamma_{\alpha\gamma|\beta\gamma}$

$$\gamma_{\alpha\beta|\gamma\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma|\beta\gamma} = 2\Lambda_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\gamma|\beta\gamma} = 2\Lambda_{\alpha\beta}$$

donde hemos utilizado la segunda de las condiciones coordenadas (24).

Entonces las dos ecuaciones de campo que nos interesan para hallar las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} &\gamma_{0\alpha|\gamma\gamma} - \gamma_{0\gamma|\alpha\gamma} = 2\Lambda''_{0\alpha} - \frac{1}{c}\gamma_{00|0\alpha} \\ &\gamma_{\alpha\beta|\gamma\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma|\beta\gamma} = 2\Lambda_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{(35)}$$

que tienen la propiedad de que la integral de superficie del primer miembro es idénticamente nula y por tanto las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} &\oiint \left(2\Lambda''_{0\alpha} - \frac{1}{c}\gamma_{00|0\alpha}\right) dS_\alpha = 0 \\ &\oiint 2\Lambda_{\alpha\beta}\, dS_\beta = 0\,. \end{aligned} \tag{36}$$

11. Solución de las ecuaciones de campo en primera aproximación

Al más bajo orden de aproximación las ecuaciones de campo (34) son

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00|\gamma\gamma} = 0$$
$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|\gamma\gamma} = 0$$
$$\overset{(4)}{\gamma}_{\alpha\beta|\gamma\gamma} = 2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}\,,$$

si suponemos que el sistema está formado por N singularidades la solución de la primera ecuación es

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00} = \sum_{s=1}^{N} -\frac{4G}{c^2}\frac{m_s}{r_s}$$

donde r_s es la «distancia» de la singularidad s a un punto genérico del espacio y m_s es la masa gravitatoria de la singularidad s.

De la primera de las condiciones coordenadas (24) se deduce

$$\frac{\partial \overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{1}{c}\frac{\partial \overset{(2)}{\gamma}_{00}}{\partial x'^{0}}=\sum_{s=1}^{N}-\frac{4G}{c^{3}}m_{s}\left(\frac{1}{r_{s}}\right)_{,\alpha}\dot{\xi}^{\alpha},$$

integrando entre r_s y ∞ y teniendo en cuenta que en el infinito se anulan las γ_{ik} se encuentra

$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha}=\sum_{s=1}^{N}\frac{4G}{c^{3}}\frac{m_{s}}{r_{s}}\dot{\xi}^{\alpha},$$

que son las dos componentes de γ_{ik} que nos interesan para calcular las ecuaciones de movimiento en primera aproximación.

12. Ecuaciones de movimiento en primera aproximación: cálculo de $\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}$

Para obtener las ecuaciones de movimiento en primera aproximación (la correspondiente a la ecuación newtoniana) hay que calcular la segunda integral de (36) a cuarto orden, es decir

$$\oiint 2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}dS_{\alpha}=0,$$

por la última de las ecuaciones (18) encontramos

$$2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\beta|0\alpha}-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|0\beta}-\frac{1}{c^{2}}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\gamma}_{00|00}+\frac{1}{c}2\delta_{\alpha\beta}\overset{(3)}{\gamma}_{0\gamma|0\gamma}+2\overset{(4)}{\Lambda''}_{\alpha\beta},$$

ahora al aplicar la primera de las condiciones coordenadas (24) queda

$$2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\beta|0\alpha}-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|0\beta}+\frac{1}{c^{2}}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\gamma}_{00|00}+2\overset{(4)}{\Lambda''}_{\alpha\beta}, \tag{37}$$

resta, por tanto, determinar los términos no lineales a orden (4). Para ello necesitamos calcular los correspondientes símbolos de Christoffell. Como estos símbolos se calculan en función de h_{ik} debemos establecer la relación entre los términos del desarrollo en serie de h_{ik} y de γ_{ik}. Los primeros términos de h_{ik} deducidos de (3) son

$$\overset{(2)}{h}_{00}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{\gamma}_{00}$$
$$\overset{(3)}{h}_{0\alpha}=\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha}$$
$$\overset{2}{h}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{\gamma}_{00}$$
$$\overset{(4)}{h}_{\alpha\beta}=\overset{(4)}{\gamma}_{\alpha\beta}\quad(\alpha\neq\beta).$$

ahora podemos calcular los primeros términos del desarrollo de h^{ik} que es definido por la relación

$$g^{ik}g_{kr}=\delta_{r}^{i}\quad\Rightarrow\quad\left(\eta^{ik}+h^{ik}\right)\left(\eta_{kr}+h_{kr}\right)=\delta_{r}^{i}$$

desarrollando encontramos

$$\eta^{ik}h_{kr}+\eta_{kr}h^{ik}+h^{ik}h_{kr}=0, \tag{38}$$

si suponemos $i=0$ y $k=0$ entonces

$$\eta^{0k}h_{k0}+\eta_{k0}h^{0k}=0\quad\Rightarrow\quad\overset{(2)}{h}{}^{00}=-\overset{(2)}{h}_{00}=-\frac{1}{2}\overset{(2)}{\gamma}_{00}=-\frac{2}{c^{2}}\phi,$$

donde el último sumando de (38) no lo tenemos en cuenta porque no genera términos de segundo orden. Si ahora suponemos $i=\alpha$ y $k=0$ en la ecuación (38)

$$\eta^{\alpha k}h_{k0}+\eta_{k0}h^{\alpha\beta}=0\quad\Rightarrow\quad\overset{(2)}{h}{}^{0\alpha}=\overset{(2)}{h}_{0\alpha}=\frac{1}{2}\overset{(2)}{\gamma}_{00}=\frac{2}{c^{2}}\phi,$$

tampoco en el último sumando de (38) hay términos de tercer orden y por tanto tampoco lo consideramos. Si suponemos $i=k=\alpha$ en (38)

$$\eta^{\bar{\alpha}k}h_{k\bar{\alpha}}+\eta_{k\bar{\alpha}}h^{\bar{\alpha}\beta}=0\quad\Rightarrow\quad\overset{(2)}{h}{}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}=-\overset{(2)}{h}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}=-\overset{(2)}{\gamma}_{00}\big/2=-2\phi\big/c^{2},$$

donde suponemos que no hay suma respecto a α. Finalmente si suponemos $i=\alpha$ y $k=\beta$ pero $\alpha \neq \beta$ entonces

$$\eta^{\alpha k} h_{k\beta} + \eta_{k\beta} h^{\alpha k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overset{(4)}{h}{}^{\alpha\beta} = -\overset{(4)}{h}{}_{\alpha\beta},$$

y tampoco hemos considerado el último sumando de (38) porque es de orden superior a cuatro.

El último sumando de (37) es

$$2\overset{(4)}{\Lambda''}_{\alpha\beta} = 2\left(\overset{(4)}{\Lambda'}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{rs}\overset{(4)}{\Lambda'}_{rs}\right) \tag{38}$$

para calcular las componentes del tensor de Ricci a cuarto orden necesitamos calcular los términos de cuarto orden de las componentes no lineales de los símbolos de Christoffel.

La parte no lineal de la componente $\Gamma_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}}$ es

$$\Gamma_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} h^{\bar{\alpha}s}\left(h_{0s,\bar{\alpha}} + h_{\bar{\alpha}s,0} - h_{0\bar{\alpha},s}\right)$$

el término de menor orden no lineal que podemos hallar es el quinto

$$\overset{(5)}{\Gamma}{}_{0\bar{\alpha}}^{\ \bar{\alpha}} = \frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}\left(\overset{(3)}{h}{}_{0s,\bar{\alpha}} + \frac{1}{c}\overset{(2)}{h}{}_{\bar{\alpha}s|0} - \overset{(3)}{h}{}_{0\bar{\alpha},s}\right)$$

donde no hay suma respecto a α; este término al ser de quinto orden no nos interesa en nuestro cálculo ya que para calcular (38) sólo necesitamos los de cuarto orden.

Haciendo un cálculo similar al anterior encontramos que las únicas componentes de los símbolos de Christoffel que hay de cuarto orden no lineales son

$$\begin{aligned}
&\overset{(4)}{\Gamma}{}_{00}^{\ \alpha} = -\frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}^{\alpha\alpha}\overset{(2)}{h}{}_{00,\alpha} = \frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}_{\alpha\alpha}\overset{(2)}{h}{}_{00,\alpha} = \frac{1}{8}\overset{(2)}{\gamma}{}_{00}\overset{(2)}{\gamma}{}_{00,\alpha} = \frac{2}{c^4}\phi\phi_{,\alpha} \\
&\overset{(4)}{\Gamma}{}_{0\alpha}^{\ 0} = -\frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}_{00}\overset{(2)}{h}{}_{00,\alpha} = -\frac{2}{c^4}\phi\phi_{,\alpha} \\
&\overset{(4)}{\Gamma}{}_{\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\beta}} = -\frac{1}{2}h_{\bar{\beta}\bar{\beta}}h_{\bar{\beta}\bar{\beta},\alpha} = -\frac{2}{c^4}\phi\phi_{,\alpha} \quad (\alpha=\beta \ \text{ o } \ \alpha\neq\beta) \\
&\overset{(4)}{\Gamma}{}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^{\ \beta} = \frac{1}{2}h_{\bar{\beta}\bar{\beta}}h_{\bar{\alpha}\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \frac{2}{c^4}\phi\phi_{,\beta} \quad (\alpha\neq\beta)
\end{aligned} \tag{39}$$

donde entendemos que no hay sumas respecto a α ni respecto a β, ya que estos índices son valores definidos.

En el tensor de Ricci

$$R_{ij} = \frac{\partial\Gamma_{ik}^{\ k}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_{ij}^{\ k}}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^{\ r}\Gamma_{jr}^{\ k} - \Gamma_{ij}^{\ k}\Gamma_{kr}^{\ r},$$

encontramos términos no lineales de cuarto orden tanto en los primeros dos sumandos como en los dos últimos, pero para obtener los términos de cuarto orden de estos dos últimos sumandos sólo necesitamos las componentes lineales de los símbolos de Chirstoffel a segundo orden tal como fueron calculadas en (6). Pero de estas componentes sólo podrán generar términos de cuarto orden no lineales las que sean de segundo orden, es decir

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Gamma}{}_{00}^{\ \alpha} = \frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}_{00,\alpha} = \frac{1}{c^2}\phi_{,\alpha} \\
&\overset{(2)}{\Gamma}{}_{0\alpha}^{\ 0} = \frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}_{00,\alpha} = \frac{1}{c^2}\phi_{,\alpha} \\
&\overset{(2)}{\Gamma}{}_{\alpha\bar{\beta}}^{\ \bar{\beta}} = -\frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}_{\bar{\beta}\bar{\beta},\alpha} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,\alpha} \quad (\alpha\neq\beta \ \text{ o } \ \alpha=\beta) \\
&\overset{(2)}{\Gamma}{}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^{\ \beta} = \frac{1}{2}\overset{(2)}{h}{}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha},\beta} = \frac{1}{c^2}\phi_{,\beta} \quad (\alpha\neq\beta)
\end{aligned} \tag{40}$$

donde α y β son números definidos, lo que significa que no hay suma respecto a los índices repetidos.

Calculamos a continuación las distintas componentes del tensor de Ricci a cuarto orden, empezando por la componente 0,0

$$R_{00}=\frac{\partial\Gamma^{k}_{0k}}{\partial x^{0}}-\frac{\partial\Gamma^{k}_{00}}{\partial x^{k}}+\Gamma^{r}_{0k}\Gamma^{k}_{0r}-\Gamma^{k}_{00}\Gamma^{r}_{kr}$$

considerando solamente los términos no nulos según son dados por (39) y (40) se encuentra

$$\overset{(4)}{\Lambda'}_{00}=-\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}}{\partial x^{\gamma}}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{0\gamma}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{0\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta},$$

notemos que hay otros términos de cuarto orden pero son lineales y por tanto no lo consideramos. Desarrollando el último sumando

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}=\sum_{\gamma}\left(\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{00}\sum_{\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}\right)=-\frac{3}{c^{4}}\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}=-\frac{3}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}$$

finalmente con los resultados de (39) y (40) encontramos

$$\overset{(4)}{\Lambda'}_{00}=\sum_{\gamma}\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\sum_{\gamma}\frac{2}{c^{4}}\phi\phi_{,\gamma\gamma}=\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{2}{c^{4}}\phi\phi_{,\gamma\gamma}\tag{41}$$

Vamos seguidamente a calcular las componentes de orden cuatro de las componentes α,α del tensor de Ricci.

$$R_{\bar\alpha\bar\alpha}=\frac{\partial\Gamma^{k}_{\bar\alpha k}}{\partial x^{\bar\alpha}}-\frac{\partial\Gamma^{k}_{\bar\alpha\bar\alpha}}{\partial x^{k}}+\Gamma^{r}_{\bar\alpha k}\Gamma^{k}_{\bar\alpha r}-\Gamma^{k}_{\bar\alpha\bar\alpha}\Gamma^{r}_{kr},$$

considerando exclusivamente las componentes de los símbolos de Christoffel que no son nulos tenemos

$$\overset{(4)}{\Lambda'}_{\bar\alpha\bar\alpha}=\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{0}_{\bar\alpha0}}{\partial x^{\bar\alpha}}+\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\gamma}}{\partial x^{\bar\alpha}}-\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}}{\partial x^{\gamma}}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\bar\alpha0}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\bar\alpha0}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\bar\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\delta}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta},$$

si desarrollamos los sumandos que no han sido calculados con anterioridad

$$\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\gamma}}{\partial x^{\bar\alpha}}=\sum_{\gamma}\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\gamma}}{\partial x^{\bar\alpha}}=-\frac{6}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}-\frac{6}{c^{4}}\phi\phi_{,\bar\alpha\bar\alpha}$$

$$\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}}{\partial x^{\gamma}}=\sum_{\gamma}\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}}{\partial x^{\gamma}}=\frac{2}{c^{4}}\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}+\frac{2}{c^{4}}\sum_{\gamma}\phi\phi_{,\gamma\gamma}-\frac{4}{c^{4}}\phi\phi_{,\bar\alpha\bar\alpha}=$$
$$=\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}+\frac{2}{c^{4}}\phi\phi_{,\gamma\gamma}-\frac{4}{c^{4}}\phi\phi_{,\bar\alpha\bar\alpha}$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\bar\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\delta}=\sum_{\gamma,\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\bar\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\delta}=-\frac{2}{c^{4}}\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}+\frac{5}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}=-\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}+\frac{5}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}=\sum_{\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}=\frac{1}{c^{4}}\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}=\frac{1}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}=\sum_{\gamma,\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\alpha}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}=\frac{6}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}-\frac{3}{c^{4}}\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}=\frac{6}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}-\frac{3}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}$$

entonces en función del potencial newtoniano la componente α,α de la parte no lineal del tensor de Ricci a cuarto orden queda

$$\overset{(4)}{\Lambda'}_{\bar\alpha\bar\alpha}=-\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}-\frac{4}{c^{4}}\phi\phi_{,\bar\alpha\bar\alpha}-\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{2}{c^{4}}\phi\phi_{,\gamma\gamma}.\tag{42}$$

A continuación calculamos las componentes $\alpha,\beta\,(\alpha\neq\beta)$ no lineales de cuarto orden del tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta}=\frac{\partial\Gamma^{k}_{\alpha k}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\Gamma^{k}_{\alpha\beta}}{\partial x^{k}}+\Gamma^{r}_{\alpha k}\Gamma^{k}_{\beta r}-\Gamma^{k}_{\alpha\beta}\Gamma^{r}_{kr},$$

tomando exclusivamente los términos de orden cuatro no lineales se obtiene

$$\overset{(4)}{\Lambda'}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha0}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\bar\beta}_{\alpha\bar\beta}}{\partial x^{\bar\beta}}-\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\bar\alpha}_{\bar\alpha\beta}}{\partial x^{\bar\alpha}}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha0}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\beta0}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha0}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\beta\gamma}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta0}+$$

$$+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\delta}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{00}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{0\gamma}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta},$$

tras eleminar los términos que son nulos queda

$$\overset{(4)}{\Lambda'}_{\alpha\beta}=\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha0}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\bar\beta}_{\alpha\bar\beta}}{\partial x^{\bar\beta}}-\frac{\partial\overset{(4)}{\Gamma}{}^{\bar\alpha}_{\bar\alpha\beta}}{\partial x^{\bar\alpha}}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha0}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\beta0}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\delta}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}-\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta},$$

calculando por separado los tres últimos sumandos obtenemos

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\delta}=\sum_{\gamma,\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\delta}=\frac{5}{c^{4}}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}=\sum_{\gamma}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\gamma0}=\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\alpha0}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\beta}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{0}_{\beta0}=-\frac{2}{c^{4}}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}$$

$$\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}=\sum_{\gamma,\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}=\sum_{\gamma}\left(\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\sum_{\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\gamma\delta}\right)=\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\beta}\sum_{\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\alpha\delta}+\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\beta}_{\alpha\beta}\sum_{\delta}\overset{(2)}{\Gamma}{}^{\delta}_{\beta\delta}=\frac{6}{c^{4}}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta},$$

donde la primera ecuación ha sido obtenida desarrollando completamente el sumatorio. Con estos resultados se encuentra

$$2\overset{(4)}{\Lambda'}_{\alpha\beta}=-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}-\frac{8}{c^{4}}\phi\phi_{,\alpha\beta}\quad(\alpha\neq\beta). \tag{43}$$

De (41) y (42) se obtiene

$$\eta^{rs}\overset{(4)}{\Lambda'}_{rs}=\overset{(4)}{\Lambda'}_{00}-\overset{(4)}{\Lambda'}_{\gamma\gamma}=\frac{10}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}+\frac{8}{c^{4}}\phi\phi_{,\gamma\gamma}$$

por tanto

$$2\left[\overset{(4)}{\Lambda'}_{\bar\alpha\bar\alpha}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}\eta^{rs}\overset{(4)}{\Lambda'}_{rs}\right]=-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}+\frac{6}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{8}{c^{4}}\phi\phi_{,\bar\alpha\bar\alpha}+\frac{4}{c^{4}}\phi\phi_{,\gamma\gamma} \tag{44}$$

pero por definición de ϕ

$$\phi_{,\gamma\gamma}=\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma\gamma}=0,$$

por tanto (44) queda

$$2\left[\overset{(4)}{\Lambda'}_{\bar\alpha\bar\alpha}-\frac{1}{2}\eta^{\bar\alpha\bar\alpha}\eta^{rs}\overset{(4)}{\Lambda'}_{rs}\right]=-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\bar\alpha}\phi_{,\bar\alpha}+\frac{6}{c^{4}}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{8}{c^{4}}\phi\phi_{,\bar\alpha\bar\alpha} \tag{45}$$

finalmente reuniendo (43) y (45)

$$2\overset{(4)}{\Lambda''}_{\alpha\beta}=2\left[\overset{(4)}{\Lambda'}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta^{rs}\overset{(4)}{\Lambda'}_{rs}\right]=-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}+\frac{6}{c^{4}}\delta_{\alpha\beta}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{8}{c^{4}}\phi\phi_{,\alpha\beta}.$$

Y finalmente por (37) se encuentra

$$2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\beta|0\alpha}-\frac{1}{c}\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|0\beta}+\frac{1}{c^{2}}\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\gamma}_{00|00}-\frac{4}{c^{4}}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}+\frac{6}{c^{4}}\delta_{\alpha\beta}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}-\frac{8}{c^{4}}\phi\phi_{,\alpha\beta}. \tag{46}$$

13. Ecuaciones de movimiento en primera aproximación:las integrales de superficie

El siguiente paso para obtener las ecuaciones de movimiento es calcular las integrales de superficie que se derivan de la segunda ecuación (36), es decir

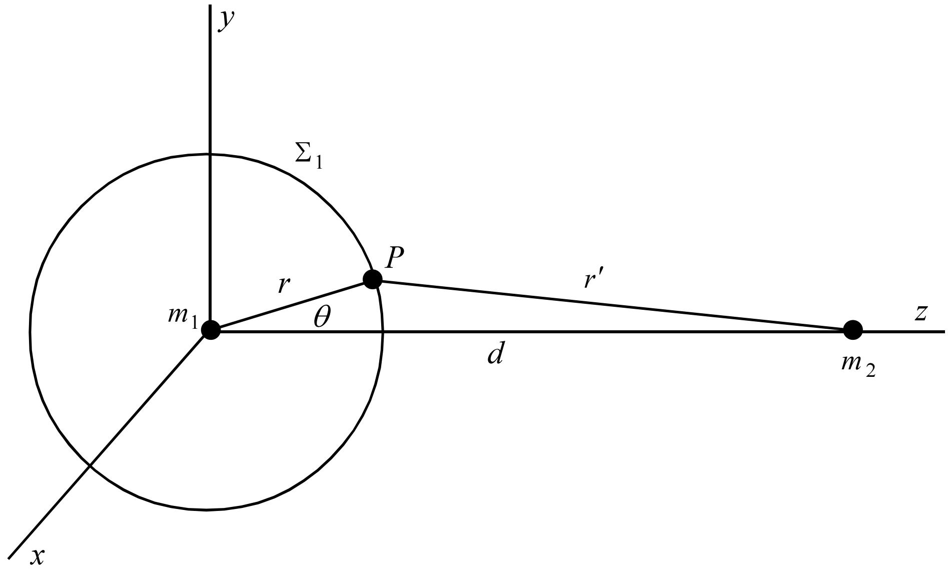
$$\oiint 2\Lambda_{\alpha\beta}dS_{\beta}=0,(47)$$

para lo cual hay que hacer las seis integrales de superficie de los sumandos del segundo término de (46).

Para simplificar estas integraciones vamos a suponer que hay sólo dos singularidades de masas m_1 y m_2 También vamos a suponer que la partícula 1 se encuentra en el momento considerado en el origen del sistema de coordenadas y la partícula 2 se encuentra en un punto del eje *z*, de tal forma que sus coordenadas serán

$$1 \to (0,0,0) \equiv \eta^\alpha \qquad 2 \to (0,0,\xi) \equiv \xi^\alpha .$$

notemos que $\dot{\eta}^\alpha$ y $\ddot{\eta}^\alpha$ son diferentes de cero, o sea la partícula 1 se está moviendo pero la consideramos en el origen de coordenadas momentáneamente.



Sea Σ_1 una superficie esférica de centro en el origen de coordenadas y que por tanto encierra a la partícula 1 donde *r* y r' son

$$r = \sqrt{\sum_\alpha \left(x^\alpha - \eta^\alpha\right)^2}; \quad r' = \sqrt{\sum_\alpha \left(x^\alpha - \xi^\alpha\right)^2},$$

x^α son las coordenadas espaciales de un punto genérico del campo *P*. El ángulo θ es el formado por el vector **r** que va de m_1 a *P* y el eje *z* y por tanto es una de las coordenadas esféricas del punto *P*.

Como la integral (47) no depende de la forma de la superficie de integración, vamos a elegir una esfera de un radio infinitamente pequeño en comparación con *d* (distancia entre m_1 y m_2). Utilizando el teorema de coseno

$$r' = d\sqrt{1 + (r/d)^2 - 2r/d\cos\theta}$$

cuya inversa podemos desarrollar en series de potencias

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{d} + \frac{r}{d^2}\cos\theta + ... = \frac{1}{d} + \frac{z}{d^2} = \frac{1}{d} + \frac{z\xi}{d^3} = \frac{1}{d} + \frac{x^\gamma \xi^\gamma}{d^2} + ...$$

hemos tenido en cuenta que $\xi = d$. El último sumando engloba a términos ïnfinitesimales dependientes de *r*. Advertimos que estamos utilizando la geometría espacial euclídea, puesto que estamos interesados en reproducir la ecuación de Newton la cual es de aplicación sólo en campos gravitatorios débiles.

Como final de este preámbulo al cálculo de las integrales de superficie recordar el teorema demostrado en el epígrafe 8.2, por el cual sólo son distintas de cero las integrales de superficie cuyo integrando tenga la dependencia $1/r^2$.

Como suponemos que existen sólo dos partículas el potencial gravitator en cada punto es la suma de los potenciales producido por cada una de las partículas

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los potenciales gravitatorios newtonianos de las partículas 1 y 2 respectivamente y cuyos valores en el punto *P* son

$$\phi_1 = -G\frac{m_1}{r}; \quad \phi_2 = -G\frac{m_2}{r'}$$

nótese que de nuevo hemos tenido en cuenta que el campo gravitatorio es débil, por esa razón hemos supuesto que el potencial es aditivo.

* *Cálculo de* I_1
Para calcular la integral de superficie del primer sumando de (46) partimos de la expresión derivada en el epígrafe 10.2

$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|0} = \frac{4G}{c^3}\frac{m_1}{r}\dot{\eta}^\alpha + \frac{4G}{c^3}\frac{m_2}{r'}\dot{\xi}^\alpha = -\frac{4}{c^3}\phi_1\dot{\eta}^\alpha - \frac{4}{c^3}\phi_2\dot{\xi}^\alpha$$

antes hemos supuesto que momentáneamente $\eta^\alpha = (0,0,0)$ pero η^α varía con el tiempo, lo que significa que la partícula 1 se está moviendo. Su derivada respecto al tiempo es

$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|00} = -\frac{4}{c^3}\phi_1\ddot{\eta}^\alpha + \frac{4}{c^3}\phi_{1,\gamma}\dot{\eta}^\gamma\dot{\eta}^\alpha - \frac{4}{c^3}\phi_2\ddot{\xi}^\alpha + \frac{4}{c^3}\phi_{2,\gamma}\dot{\xi}^\gamma\dot{\xi}^\alpha$$

y la derivada espacial es

$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\alpha|0\beta} = -\frac{4}{c^3}\phi_{1,\beta}\ddot{\eta}^\alpha + \frac{4}{c^3}\phi_{1,\gamma\beta}\dot{\eta}^\gamma\dot{\eta}^\alpha - \frac{4}{c^3}\phi_{2,\beta}\ddot{\xi}^\alpha + \frac{4}{c^3}\phi_{2,\gamma\beta}\dot{\xi}^\gamma\dot{\xi}^\alpha .$$

La única integral de superficie de los sumandos anteriores distinta de cero es la primera, ya que da un integrando que depende de $1/r^2$

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} -\frac{4}{c^3}\phi_{1,\beta}\ddot{\eta}^\alpha\, dS_\beta = -\frac{4}{c^3}Gm_1\ddot{\eta}^\alpha \oint\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^3}x^\beta\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{16\pi}{c^3}Gm_1\ddot{\eta}^\alpha .$$

* *Cálculo de* I_2
Para el cálculo de la integral de superficie del segundo sumando de (46) previamente hacemos el cálculo de $\gamma_{0\beta|0\alpha}$ que resulta ser idéntico a $\gamma_{0\alpha|0\beta}$ salvo el orden de los índices

$$\overset{(3)}{\gamma}_{0\beta|0\alpha} = -\frac{4}{c^3}\phi_{1,\alpha}\ddot{\eta}^\beta + \frac{4}{c^3}\phi_{1,\gamma\alpha}\dot{\eta}^\gamma\dot{\eta}^\beta - \frac{4}{c^3}\phi_{2,\alpha}\ddot{\xi}^\beta + \frac{4}{c^3}\phi_{2,\gamma\alpha}\dot{\xi}^\gamma\dot{\xi}^\beta ,$$

a igual que antes sólo el primer sumando da integrales de superficie no nulas

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma_1} -\frac{4}{c^3}\phi_{1,\alpha}\ddot{\eta}^\beta\, dS_\beta = -\frac{4}{c^3}Gm_1\ddot{\eta}^\beta \oint\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^3}x^\alpha\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{16\pi}{3c^3}Gm_1\ddot{\eta}^\alpha ,$$

la integral anterior es distinta de cero siempre y cuando $\alpha = \beta$.

* *Cálculo de* I_3
Como

$$\overset{(2)}{\gamma}_{00} = -\frac{4G}{c^2}\frac{m_1}{r} - \frac{4G}{c^2}\frac{m_2}{r'},$$

hallando su primera derivada respecto a la coordenada temporal queda

$$\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\gamma}_{00|0} = -\frac{4G}{c^2}\frac{m_1}{c^2}\left(x^\gamma - \eta^\gamma\right)\dot{\eta}^\gamma - \frac{4G}{c^2}\frac{m_1}{c^2}\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)\dot{\xi}^\gamma ,$$

y la segunda derivada temporal es

$$\delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{\gamma}_{00|00} = -\frac{4G}{c^2}m_1\frac{-\dot{\eta}^\gamma\dot{\eta}^\gamma + x^\gamma\ddot{\eta}^\gamma}{r^3} - \frac{12G}{c^2}m_1\frac{3x^\delta x^\gamma\dot{\eta}^\delta\dot{\eta}^\gamma}{r^5} -$$
$$-\frac{4G}{c^2}m_2\frac{-\dot{\xi}^\gamma\dot{\xi}^\gamma - \left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)\ddot{\xi}^\gamma}{r'^3} - \frac{12G}{c^2}m_2\frac{3\left(x^\delta - \xi^\delta\right)\left(x^\gamma - \xi^\gamma\right)\dot{\xi}^\delta\dot{\xi}^\gamma}{r'^5},$$

donde hemos puesto $\eta^\alpha = 0$ de acuerdo con nuestra suposición de que en el instante considerado la partícula 1 se encuentra en el origen del sistema de coordenadas. Al hacer la integración el único término cuya integral de superficie es distinta de cero es

$$I_3 = \oint\!\!\oint_{\Sigma_1} -\delta_{\alpha\beta}\frac{4G}{c^2}m_1\frac{x^\gamma\ddot{\eta}^\gamma}{r^3}dS_\beta = -\frac{4G}{c^2}m_1\ddot{\eta}^\gamma\oint\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x^\gamma}{r^3}\frac{x^\alpha}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi,$$

para que la integral anterior sea distinta de cero es necesario que $\alpha=\gamma$ dando el mismo resultado con independencia del valor de α, resultando

$$I_3=-\frac{4G}{c^2}m_1\ddot{\eta}^{\bar{\alpha}}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x^{\bar{\alpha}}}{r^3}\frac{x^{\bar{\alpha}}}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{16\pi}{3c^2}Gm_1\ddot{\eta}^{\alpha},$$

* *Cálculo de* I_4.

Hallando las derivadas espaciales del potencial tenemos

$$\phi_{,\alpha}=\phi_{1,\alpha}+\phi_{2,\alpha}=-Gm_1\left(\frac{1}{r}\right)_{,\alpha}-Gm_2\left(\frac{1}{r'}\right)_{,\alpha}=G\frac{m_1}{r^3}x^{\alpha}+G\frac{m_2}{r'^3}\left(x^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}&=\left[G\frac{m_1}{r^3}x^{\alpha}+G\frac{m_2}{r'^3}\left(x^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right)\right]\left[G\frac{m_1}{r^3}x^{\beta}+G\frac{m_2}{r'^3}\left(x^{\beta}-\xi^{\beta}\right)\right]=\\&=G^2\frac{m_1^2}{r^6}x^{\alpha}x^{\beta}+G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}x^{\alpha}\left(x^{\beta}-\xi^{\beta}\right)+G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}x^{\beta}\left(x^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right)+G^2\frac{m_2^2}{r'^6}\left(x^{\alpha}-\xi^{\alpha}\right)\left(x^{\beta}-\xi^{\beta}\right).\end{aligned}\qquad(48)$$

La integral I_4 la descomponemos a su vez en otras cuatro integrales de superficie correspondientes cada una de ellas a los cuatro sumandos de la expresión anterior. La primera de estas integrales es nula, puesto que el integrando no depende de $1/r^2$ sino de $1/r^4$, por tanto $I_{41}=0$. La segunda integral es la suma de dos integrales, la primera de ellas es nula por la misma razón anterior, pero la segunda de estas integrales admite un desarrollo en el que su primer término depende de r según $1/r^2$ y por tanto es distinta de cero, veámoslo

$$I_{42}=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}-G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}x^{\alpha}\xi^{\beta}dS_{\beta}=-G\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x^{\alpha}}{r^3}\frac{z}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=-G\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x^{\alpha}}{r^3}\frac{r\cos\theta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

donde hemos tenido en cuenta que la partícula 2 se encuentra en el eje *z*. En el desarrollo en serie de r' sólo hemos tenido en cuenta el primer término puesto que los demás términos del desarrollo dan integrales nulas pues sus integrandos no tienen la dependencia $1/r^2$. La anterior integral es nula para los casos en que $\alpha=1$ y $\alpha=2$ porque entonces aparece $\sin\varphi$ o $\cos\varphi$ y ambas generan integrales nulas puesto que

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=0\qquad\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=0,$$

por tanto α sólo puede valer 3 y la anterior integral queda

$$\begin{aligned}I_{42}&=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}-G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}x^{\alpha}\xi^{\beta}dS_{\beta}=-G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{4\pi}{3}G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi=\\&=\frac{4\pi}{3}G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\left(0-\xi\right)=\frac{4\pi G}{3}m_1\left[G\frac{m_2}{d^3}\left(0-\xi\right)\right]=\frac{4\pi G}{3}m_1\tilde{\phi}_{2,3}\end{aligned}\qquad(49)$$

donde $\tilde{\phi}_2$ significa que el potencial de la partícula 2 es calculado en el punto donde se encuentra la partícula 1.

La tercera de las integrales de (48) también está compuesta a su vez de dos integrales, siendo una de ellas distinta de cero, en efecto

$$\begin{aligned}I_{43}&=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}-G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}x^{\beta}\xi^{\alpha}dS_{\beta}=-G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x^{\beta}}{r^3}\frac{x^{\beta}}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=\\&=-G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\sin\theta d\theta d\varphi=-4\pi G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi=4\pi Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}.\end{aligned}$$

Finalmente el cuarto sumando de (48) da una integral nula porque no cumple con la adecuada dependencia respecto a *r*. Entonces nos queda

$$I_4=I_{42}+I_{43}=\frac{16\pi}{3}Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}.$$

* *Cálculo de* I_5

$$\delta_{\alpha\beta}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}=\delta_{\alpha\beta}\sum_{\gamma}\phi_{,\gamma}\phi_{,\gamma}=\delta_{\alpha\beta}\sum_{\gamma}\left[G\frac{m_1}{r^3}x^{\gamma}+G\frac{m_2}{r'^3}\left(x^{\gamma}-\xi^{\gamma}\right)\right]^2=$$

$$=\delta_{\alpha\beta}G^2\frac{m_1^{\,2}}{r^6}\sum_\gamma x^\gamma x^\gamma+2\delta_{\alpha\beta}G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}\sum_\gamma x^\gamma\left(x^\gamma-\xi^\gamma\right)+\delta_{\alpha\beta}G^2\frac{m_2^{\,2}}{r'^6}\sum_\gamma\left(x^\gamma-\xi^\gamma\right)\left(x^\gamma-\xi^\gamma\right)$$

sólo el segundo sumando es el único que da integral de superficie no nula porque de él surge un integrando que depende de $1/r^2$, en efecto

$$I_5=\oiint_{\Sigma_1}-2\delta_{\alpha\beta}G^2\frac{m_1m_2}{r^3r'^3}\sum_\gamma x^\gamma\xi^\gamma dS_\beta=-2G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oiint_{\Sigma_1}\frac{1}{r^3}z\frac{x^\alpha}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$=-2G^2\frac{m_1m_2}{d^3}\xi\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{8\pi}{3}Gm_1\left[G\frac{m_2}{d^3}\left(0-\xi\right)\right]=\frac{8\pi}{3}Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}$$

hemos tenido en cuenta que la única componente distinta de cero de ξ^γ es $\gamma=3$ y que sólo cuando $\alpha=1$ la integral es distinta de cero. Al igual que en casos anteriores los restantes términos del desarrollo de r' dan integrales de superficie nulas.

** Cálculo de I_6*

Calculamos previamente $\phi_{1,\alpha\beta}$

$$\phi_{1,\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(-G\frac{m_1}{r}\right)=G\frac{m_1}{r^3}x^\alpha\quad\Rightarrow\quad\phi_{1,\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(G\frac{m_1}{r^3}x^\alpha\right)=Gm_1\frac{\delta_{\alpha\beta}r^2-3x^\alpha x^\beta}{r^5},$$

y una expresión equivalente para $\phi_{2,\alpha\beta}$

$$\phi_{2,\alpha\beta}=Gm_2\frac{\delta_{\alpha\beta}r'^2-3\left(x^\alpha-\xi^\alpha\right)\left(x^\beta-\xi^\beta\right)}{r'^5}.$$

Al desarrollar el sexto sumando de (46) queda

$$\phi\phi_{,\alpha\beta}=\left(\phi_1+\phi_2\right)\left(\phi_{1,\alpha\beta}+\phi_{2,\alpha\beta}\right)=\phi_1\phi_{1,\alpha\beta}+\phi_2\phi_{1,\alpha\beta}+\phi_1\phi_{2,\alpha\beta}+\phi_2\phi_{2,\alpha\beta}$$

el único sumando que tiene integral de superficie no nula por tener tener la dependencia $1/r^2$ es el segundo. Para comprobar esta variación como $1/r^2$ desarrollamos ϕ_2 es serie de potencias para un punto cercano a donde se encuentra la partícula 1

$$\phi_2\left(x^\alpha\right)=\phi_2\left(x^\alpha=0\right)+\phi_{2,\alpha}\left(x^\alpha=0\right)x^\alpha+\ldots=\tilde{\phi}_2+\tilde{\phi}_{2,\alpha}x^\alpha+\ldots$$

donde hemos tenido en cuenta nuestra suposición de que la partícula 1 se encuentra en el origen de coordenadas. Tomando solamente el segundo término del desarrollo anterior por ser el único que interesa

$$\phi_2\phi_{1,\alpha\beta}=Gm_1\frac{\delta_{\alpha\beta}r^2-3x^\alpha x^\beta}{r^5}\tilde{\phi}_{2,\gamma}x^\gamma=Gm_1\tilde{\phi}_{2,\gamma}\frac{\delta_{\alpha\beta}x^\gamma}{r^3}-3Gm_1\tilde{\phi}_{2,\gamma}\frac{x^\alpha x^\beta x^\gamma}{r^5},$$

al calcular la integral de superficie sólo tomamos $\gamma=3$ y $\alpha=3$ puesto que para los otros valores la integral es nula

$$I_6=Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}\oiint_{\Sigma_1}\frac{z}{r^3}\frac{x^\alpha}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi-3Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}\oiint_{\Sigma_1}\frac{x^\alpha x^\beta z}{r^5}\frac{x^\beta}{r}r^2\sin\theta d\theta d\varphi=$$

$$=Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi-3Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}\oiint_{\Sigma_1}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi=-\frac{8\pi}{3}Gm_1\tilde{\phi}_{2,3}.$$

Ya estamos en condiciones de evaluar la integral

$$\oiint_{\Sigma_1}2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}dS_\beta=0$$

que nos da la ecuación de movimiento. Utilizando (46), los resultados de las integraciones anteriores tenemos para cuando $\alpha=3$

$$\oiint_{\Sigma_1}2\overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}dS_\beta=\frac{16\pi}{c^4}Gm_1\ddot{\eta}_z+\frac{16\pi}{c^4}Gm_1\tilde{\phi}_{2,z}=0\quad\Rightarrow\quad\ddot{\eta}_z=-\tilde{\phi}_{2,z},$$

y para las demás componentes

$$\ddot{\eta}_x=0,\quad\ddot{\eta}_y=0.$$

Estas ecuaciones son válidas en el sistema de coordenadas que hemos elegido en el cual la partícula 2 se encuentra momentáneamente en el eje *z*, o bien reuniendo los dos últimos resultados

$$\ddot{\eta}^{\alpha} = -\tilde{\phi}_{2,\alpha}, \tag{50}$$

puesto que como se comprueba directamente

$$\tilde{\phi}_{2,1} = \tilde{\phi}_{2,2}.$$

Como la ecuación (50) es una expresión vectorial será la misma con independencia del sistema de coordenadas elegido. Por tanto concluimos que (50) es la ecuación de movimiento de la singularidad 1 en el campo de la singularidad 2, y no es más que la ley newtoniana.

Para obtener la ecuación de movimiento de la partícula 2 hacemos la integral

$$\oiint_{\Sigma_2} 2 \overset{(4)}{\Lambda}_{\alpha\beta}\, dS_{\beta} = 0$$

donde Σ_2 es la superficie que engloba a la partícula 2. Utilizando los mismos resultados intermedios que antes y obtenemos la misma ecuación que (50)

$$\ddot{\xi}^{\alpha} = -\tilde{\phi}_{1,\alpha},$$

de nuevo reencontrado la ley newtoniana de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio.

Una observación final tenemos que hacer. (46) contiene tres términos lineales (los tres primeros) de cuya integraciones se derivan expresión que contienen la derivada temporal de las coordenadas de la singularidad. Los restantes tres términos de (46) son lineales y el resultado de su integración queda en función de la intensidad de campo gravitatorio $\nabla\phi$. Si la teoría gravitatoria fuera lineal, es decir no existieran los tres últimos sumandos de (46) entonces no se obtendría la ecuación de movimiento (50). O sea, se exige el carácter no lineal de la teoría de campo para poder deducir de sus ecuaciones la ecuación de movimiento de una singularidad.

14. Bibliografía

1.- Einstein, A.; Infeld, L.; Hoffmann, B.: «The Gravitational and the Problem of Motion», *Annals of Mathematics* **39-1** (1938) 65-100.

2.- Einstein, A.; Infeld, L.: «The Gravitational Equations and the Problem of Motion. II», *Annals of Mathematics* **41-2** (1939) 455-464.

3.- Einstein, A.; Infeld, L.: «On the motion of particles in general relativity theory», *Canadian Journal of Mathematics* **1** (1949) 209-241.