

FLORENTIN SMARANDACHE
Coefficients K -Nomiaux

In Florentin Smarandache: "Généralisations et Généralités". Fès (Maroc):
Édition Nouvelle, 1984.

COEFFICIENTS K-NOMIAUX

Dans cet article on élargit les notions de "coefficients binomiaux" et de "coefficients trinomiaux" à la notion de "coefficients k-nomiaux", et on obtient quelques propriétés générales de ceux-ci. Comme application, on généralisera le "triangle de Pascal".

On considère un nombre naturel $k > 2$; soit $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$ le polynôme formé de k monômes de ce type : on l'appellera "k-nôme".

On appelle coefficients k-nomiaux les coefficients des puissances de x de $(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n$, pour n entier positif. On les notera Ck_n^h avec $h \in \{0, 1, 2, \dots, 2pn\}$.

Par la suite on va construire par récurrence un triangle de nombres qui va être appelé "triangle des nombres d'ordre k".

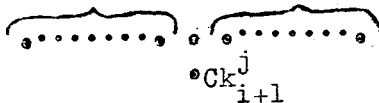
CAS 1 : $k = 2p + 1$.

Sur la première ligne du triangle on écrit 1 et on l'appelle "ligne 0".

(1) On convient que toutes les cases qui se trouvent à gauche et à droite du premier (respectivement du dernier) nombre de chaque ligne seront considérées comme contenant 0. Les lignes suivantes sont appelées "ligne 1", "ligne 2", etc... Chaque ligne contiendra $2P$ nombres de plus que la précédente : p nombres à gauche du premier nombre, p nombres à droite du dernier nombre de la ligne précédente. Les nombres de la ligne $i+1$ s'obtiennent à partir de ceux de la ligne i de la façon suivante :

Ck_{i+1}^j est égal à l'addition des p nombres situés à sa gauche sur la ligne i et des p nombres situés à sa droite sur la ligne i , au nombre situé au-dessus de lui (voir fig.1). On va tenir compte de la convention 1.

Fig.1 : ligne i
ligne $i+1$



Exemple pour $k=5$:

				1												
				1	1	1	1	1								
			1	2	3	4	5	4	3	2	1					
	1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1			
1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	52	35	20	10	4	1
.....																

Le nombre $C5_1^0 = 0+0+0+0+1 = 1$; $C5_1^3 = 0+1+0+0+0 = 1$,
 $C5_2^3 = 0+1+1+1+1 = 4$; $C5_3^7 = 4+5+4+3+2 = 18$, etc...

Propriétés du triangle de nombres d'ordre k :

1) La ligne i a $2pi+1$ éléments.

2) $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{2p} Ck_{n-1}^{h-i}$ où par convention $Ck_n^t = 0$ pour $\begin{cases} t < 0 \text{ et} \\ t > 2pr \end{cases}$.

Ceci est évident d'après la construction du triangle.

3) Chaque ligne est symétrique par rapport à l'élément central.

4) Les premiers éléments de la ligne i sont 1 et i .

5) La ligne i du triangle de nombres d'ordre k représente les coef-

ficients k -nomiaux de $(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^i$.

La démonstration se fait par récurrence sur i de \mathbb{N}^* :

a) Pour $i=1$ c'est évident; (on fait la propriété serait encore vraie pour $i=0$).

b) Supposons la propriété vraie pour n . Alors

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^{n+1} &= (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n \\ &= (1+x+x^2+\dots+x^{2p}) \cdot \sum_{j=0}^{2pn} Ck_n^j \cdot x^j = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \sum_{\substack{i+j=t \\ 0 \leq j \leq 2p \\ 0 \leq i \leq 2pn}} Ck_n^i \cdot x^i \cdot x^j \\ &= \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \left(\sum_{j=0}^{2p} Ck_n^{t-j} \right) x^t = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} Ck_{n+1}^t \cdot x^t \end{aligned}$$

6) La somme des éléments situés sur la ligne n est égale à k^n . La première méthode de démonstration utilise le raisonnement par récurrence. Pour $n=1$ l'assertion est évidente. On suppose la propriété vraie pour n , c'est-à-dire que la somme des éléments situés

sur la ligne n est égale à k^n . La ligne $n+1$ se calcule à partir des éléments de la ligne n . Chaque élément de la ligne n fait partie de la somme qui calcule chacun des p éléments situés à sa gauche sur la ligne $n+1$, chacun des p éléments situés à sa droite sur la ligne $n+1$ et celui qui est situé en dessous : donc il est utilisé pour calculer k nombres de la ligne $n+1$.

Donc la somme des éléments de la ligne $n+1$ est k fois plus grande que la somme de ceux de la ligne n ,

donc elle vaut k^{n+1} .

7) La différence entre la somme des coefficients k -nomiaux de rang pair et la somme des coefficients k -nomiaux de rang impair situés sur la même ligne $(Ck_n^0 - Ck_n^1 + Ck_n^2 - Ck_n^3 + \dots)$ est égale à 1.

On l'obtient si dans $(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n$ on prend $x = -1$.

8) $Ck_n^0 \cdot Ck_m^h + Ck_n^1 \cdot Ck_m^{h-1} + \dots + Ck_n^h \cdot Ck_m^0 = Ck_{n+m}^h$

Ceci résulte de ce que, dans l'identité

$$(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n \cdot (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^m = (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^{n+m}$$

le coefficient de x^h dans le membre de gauche est $\sum_{i=0}^h Ck_n^i \cdot Ck_m^{h-i}$
 et celui de x^h à droite est Ck_{n+m}^h .

- 9) La somme des carrés des coefficients k-nomiaux situés sur la ligne n est égale au coefficient k-nomial situé au milieu de la ligne 2n.
 Pour la preuve on prend $n=m=h$ dans la propriété 8.

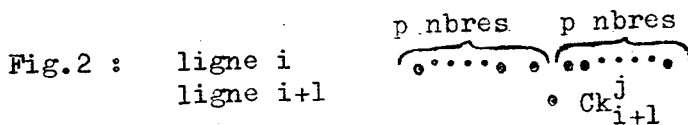
On peut trouver beaucoup de propriétés et applications de ces coefficients k-nomiaux parce qu'ils élargissent les coefficients binomiaux dont les applications sont connues.

CAS 2 : $k = 2p$.

La construction du triangle de nombres d'ordre k est analogue : Sur la première ligne on écrit 1 ; on l'appelle ligne 0. Les lignes suivantes sont appelées ligne 1, ligne 2, etc... Chaque ligne aura $2p-1$ éléments de plus que la précédente ; comme $2p-1$ est un nombre impair, les éléments de chaque ligne seront placés entre les éléments de la ligne précédente (à la différence du cas 1 où ils se plaçaient en-dessous).

Les éléments situés sur la ligne $i+1$ s'obtiennent en utilisant ceux de la ligne i de la façon suivante :

Ck_{i+1}^j est égal à l'addition des p éléments situés à sa gauche sur la ligne i aux p éléments situés à sa droite sur la ligne i . (Fig.2).



Exemple pour $k=4$:

				1															
				1	1			1	1										
			1	2	3			4	3	2			1						
1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1							

D'où la propriété 1' : $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{2p-1} Ck_{n-1}^{h-i}$.

En réunissant les propriétés 1 et 1' : $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{k-1} Ck_{n-1}^{h-i}$.

Les autres propriétés du Cas 1 se conservent dans le cas 2, avec des preuves analogues. Cependant dans la propriété 7, on voit que la différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et celle des coefficients k-nomiaux de rang impair situés sur la même ligne est égale à 0.