Естественные негёделевы определения неполноты

Ватолин Дм.

Даны определения «полноты» и «неполноты» для математических теорий, отличные от гёделевых. Исключены противоречия гёделевых доводов. Найдены теоремы, расставляющие всё на свои места.

Пусть «Дφ» означает «доказуема формула φ». Для произвольной формулы φ формулу «φ⇔¬Дφ» назовём «гёделевым отношением».

Заметим, если α и β – формулы, то «¬(α ⇔ β)» и «α⇔¬β» равносильны.

Когда S – теория, «требованием гёделевой полноты» теории S назовём следующее естественное требование: «истинность каждой формулы ∈S равносильна доказуемости такой формулы», т.е. «∀φ∈S (φ⇔Дφ)». Принадлежность формулы к теории предполагается определимой подходящим способом. Отрицание «требования гёделевой полноты» назовём «требованием гёделевой неполноты». По замечанию, последнее требование эквивалентно формуле «∃φ∈S (φ⇔¬Дφ)». Т.е. «гёделева неполнота» теории равносильна существованию в теории «гёделевой формулы».

Определение именно гёделевым способом формулы ϕ, для которой верно гёделево отношение, влечёт противоречие, т.к. тогда формула «ϕ⇔¬Дϕ» выводима в «геделевой арифметике», в которой можно говорить о доказуемости формул. В гёделевых доводах недопустимо смешаны метатеория и «теория арифметики», см. [1]. В каких обстоятельствах в «гёделевой арифметике» выводима доказуемость или недоказуемость формул? Пропущен ли для простых смертных «гёделев довод», влекущий невозможность вывода гёделевой формулы «средствами гёделевой арифметики»?

Пусть ϒ(m,n) – гёделев номер формулы α, полученной подстановкой натурального числа m вместо свободной переменной формулы β, когда β зависит от одной свободной переменной и имеет гёделев номер n. «Гёделев номер формулы φ» для произвольной φ∈S обозначим «Γ(φ)». Если функция ϒ – элемент теории S, то функция Γ должна быть элементом S, поскольку ϒ говорит о гёделевых номерах. Подстановки, использованные для построения формулы ϕ и вывода формулы «ϕ⇔¬Дϕ», тогда проводимы в теории S. Действительно, пусть «Д(m)» означает «доказуема формула с гёделевым номером m». Тогда «Д(Γ(φ))» равносильно «Д(φ)». Определим

$$\phi \Leftrightarrow \neg Д(\Upsilon(L,L)),\ \text{где } L = \Gamma(\neg Д(\Upsilon(t,t))).$$

Тогда,

$$\Gamma(\neg Д(\Upsilon(L,L))) = \Upsilon(L,L) = \Gamma(\phi).$$

Отсюда верно «ϕ⇔¬Дϕ», т.к. ¬ϕ ⇔ Д(ϒ(L,L)) ⇔ Дϕ. Но теорема «если доказано, то верно» и формула «ϕ⇔¬Дϕ» противоречат друг другу, когда обе доказуемы в S. Нелепо *предполагать, что отмеченная теорема неверна в S. Чтобы формула «$\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$» была не выводимой в S и выводимой вне S, необходимо исключить Υ и Г из элементов ∈S. Тогда, переменное значение Υ(t,t) подставлено вместо переменной m в формулу «¬Д(m)» средствами метатеории, но не средствами S. И если повторить приведённый вывод, формуле «¬Д(Υ(t,t))» снова приписана принадлежность к S. Допустим, подстановкой, не входящей в средства ∈S, получаема формула, которой по неявному допущению Гёделя приписана принадлежность к S. На каком основании даётся предписание? Для примера, можно найти такую функцию f∉S, что если ψ – формула ∈S от одной свободной переменной, то формула ψ(f(t)) не принадлежит S, т.к. истинностные значения ψ(f(t)) при конкретных t не совпадут с истинностными значениями какой бы то ни было формулы χ(t)∈S, выстраиваемой по обычным логическим правилам. Но для вывода ψ(f(t))∉S уже достаточно того, что ψ(f(t)) получена не по правилам построения формул в S – не через подстановки теории S, не через другие средства ∈S. В итоге, правильного вывода формулы «$\phi \Leftrightarrow \neg D\phi$» средствами метатеории у Гёделя нет.*

Заметим другой факт, из которого видна бессмысленность «гёделева доказательства»: В арифметике, «построенной канонически», отсутствуют утверждения о доказуемости формул. Если S, наряду с обычными арифметическими формулами, содержит утверждение χ о недоказуемости своей формулы, то χ заведомо не входит в каноническую арифметику. Тогда, недоказуемость средствами S формулы χ не влечёт неполноту канонической арифметики, даже если χ построена удачно.

Неужели в произвольной теории S, где можно утверждать или отрицать доказуемость формул, нельзя непротиворечиво доказывать недоказуемость утверждений S? «Гёделев парадокс» будто бы «доказывает» неустранимость противоречий. На самом деле, противоречия исчезают при правильном понимании порядка доказывания формул.

По идее «конструктивистов», «истинные» суждения тождественны доказуемым суждениям, «ложные» – отрицаниям доказуемых суждений. Суждение не «истинно» и не «ложно», если ни оно, ни его отрицание не доказуемы. Нет заведомых критериев, кроме средств теории S, по которым суждению У∈S приписывается «истинность». Можно при помощи средств другой теории T уточнить смысл утверждений из теории S так, что недоказуемое в S утверждение У станет доказуемым в T, но нет гарантии, что не найдётся другое уточнение, где доказуемо ¬У. Подобное имеет место в физике. Если не определен способ измерения, по которому выносится суждение, то оно не может быть «истинным» или «ложным». Суждение о предмете может быть истинно при одном способе измерения над предметом и ложно при другом (зависит от субъекта). Так истинность суждения об «одновременности событий» зависит от способа измерения.

В конструктивной трактовке D(α∨β) означает, что суждение α∨β «истинно», но каждое из суждений α и β может быть ни «истинным», ни «ложным», т.е. могут *отсутствовать доказательства для формул α и β (Сравните с суждениями квантовой механики о пролёте частицы через щель α или β).*

Если требование «∀φ∈S (Dφ⇒φ)» верно для теории S (доказуемое средствами S, или средствами более сильной, чем S, теории), то S назовём «непатологичной». Если непатологичность теории S доказуема в самой S, то S назовём «последовательной».

«Требованием тривиальной полноты» назовём условие: «∀φ∈S (φ⇒Dφ)», т.е. «∀φ∈S (¬φ∨Dφ)». Отрицание требования тривиальной полноты – формулу «∃φ∈S (φ∧¬Dφ)» – назовём «требованием тривиальной неполноты». Т.е. последнее означает, что «в теории найдётся истинная и недоказуемая формула». Доказать в последовательной и непротиворечивой теории в отношении конкретной формулы φ теории требование «φ∧¬Dφ» невозможно, так как предположение о доказуемости формулы «φ∧¬Dφ», т.е. о верности «D(φ∧¬Dφ)», немедленно ведёт к противоречию.

Пусть мы надеемся средствами последовательной теории S доказать гёделеву неполноту S через предъявление подходящей формулы. Т.е. надеемся каким-нибудь способом, входящим в средства S, определить формулу ∈S, удовлетворяющую гёделеву отношению. Если бы такой способ нашёлся, из него также можно было бы извлечь противоречие. Действительно, требование гёделевой полноты для S эквивалентно формуле «∀φ∈S ((Dφ⇒φ)∧(φ⇒Dφ))». Гёделева полнота S, поэтому, эквивалентна «тривиальной полноте и непатологичности S». Тогда, гёделева неполнота S эквивалентна «тривиальной неполноте или патологичности S». Решительно не будем пользоваться патологичными теориями. Если S непатологична, её гёделева неполнота эквивалентна тривиальной неполноте. Для конкретной формулы φ∈S формула «φ∧¬Dφ» тогда эквивалентна гёделеву отношению. В итоге, получаем полезную теорему «о неполноте»:

Средствами какой бы то ни было последовательной и непротиворечивой теории S, через построение подходящей формулы невозможно доказать «гёделеву неполноту» S, т.е. ни для какой формулы ∈S невозможно доказать средствами S гёделево отношение.

Заметим, во-первых, в нашем выводе φ – произвольная рядовая формула теории, т.е. не «гёделева формула», для которой требуется патологичное определение, гёделева нумерация и т.п. Во-вторых, именно средствами S доказуемо, что какова бы ни была φ∈S, формула «φ∧¬Dφ» недоказуема в S. В третьих, даже если метод, входящий в средства S, именуем «гёделевым», он не может построить конкретную истинную и недоказуемую формулу ϕ∈S. Найти же истинную и недоказуемую формулу ∈S даже средствами метатеории, так же трудно, как найти истинность гёделевого отношения для такой формулы. В четвёртых, наше утверждение верно для всех теорий, вне зависимости от того, включают ли они арифметику или нет. Подобное утверждение тем более верно для непатологичных теорий.

Ошибка автора в первоначальном варианте теоремы состояла в отсутствии различения «неконструктивного» (D∃φ…) и «конструктивного» (∃φD…) доказательств «гёделевой неполноты».

Вместе с тем, уже сам перевод мысли «об интуитивной неполноте» в конкретное изречение, может привести к тому, что «интуитивная неполнота» не совпадёт с «гёделевой». Чтобы обосновать последнее, потребуем «тривиальной конструктивной полноты» формулой «∀φ∈S (D¬φ∨Dφ)». Формулой «∀φ∈S (¬Dφ∨¬D¬φ)» требуем «тривиальной конструктивной непротиворечивости» теории. Тогда, формула «∀φ∈S (Dφ⇔¬D¬φ)» подобна требованию «гёделевой полноты» и равносильна формуле «S тривиально конструктивно полна и непротиворечива». Отрицание «тривиальной конструктивной полноты», формула «∃φ∈S (¬D¬φ∧¬Dφ)» – определяет «тривиальную конструктивную неполноту» S. Требование «∃φ∈S (Dφ⇔D¬φ)» подобно «требованию гёделевой неполноты» и равносильно формуле «S тривиально конструктивно неполна или противоречива». Формула «Dφ⇔D¬φ» влечёт недоказуемость формул φ и ¬φ в последовательной непротиворечивой теории.

Найденная теорема «о невозможности доказать гёделеву неполноту через предъявление конкретной формулы» уже не налагает «фатальных ограничений» на доказательства полноты или неполноты S средствами самой S. В самом деле, если в S найдено доказательство формулы «¬D¬χ∧¬Dχ» в отношении конкретной χ, и тем самым доказана «конструктивная неполнота» S, то прямое противоречие отсутствует, поскольку, остаются недоказанными формулы «χ∧¬Dχ» и «¬χ∧¬D¬χ» (остаётся верным найденный в S вывод о недоказуемости в S всякой такой формулы). Т.е. по-прежнему не известно, не доказуемо в S, для какой из двух формул χ или ¬χ оказывается верным гёделево отношение. Вместо самой формулы χ тогда доказана всего лишь недоказуемость χ и недоказуемость ¬χ.

Отметим, если в теории S доказуема «конструктивная неполнота» S, то всё же в S доказуема и «гёделева неполнота» S, но без нахождения формулы, подходящей под требование «быть истинной и недоказуемой». Поскольку по заключениям двузначной логики доказуемо, что одна из двух недоказуемых формул должна быть верна, но не известно какая.

Пусть гипотетическая теория S содержит все утверждения о доказуемости и недоказуемости собственных формул, и для произвольной формулы φ∈S выполнена аксиома (аналог закона исключённого третьего):

$$D\varphi \vee D\neg\varphi \vee (D\neg D\varphi \wedge D\neg D\neg\varphi)$$

Для такой теории усилим конструктивные критерии полноты-неполноты:

«требованием доказуемой неполноты»: $D(\exists\varphi\in S\ D(\neg D\neg\varphi\wedge\neg D\varphi))$

«требованием доказуемой полноты»: $D(\forall\varphi\in S\ (D\neg\varphi\vee D\varphi))$

В последовательной теории формула $D(D\alpha\vee D\beta)$ эквивалентна формуле $D\alpha\vee D\beta$, поскольку, если верна последняя, то найдётся доказательство либо для α, либо для β, а значит найдётся доказательство для формулы $D\alpha\vee D\beta$, т.е. формула $D\alpha\vee D\beta$ не может быть не доказуемой, если доказуема α или доказуема β. Подобное правило для квантора существования действует, когда такой интерпретируется как бесконечная дизъюнкция. Тем самым, в требованиях возможно снятие символа доказуемости перед квантором существования.

Из-за определений, отличных от гёделевых, можно снова поставить гильбертов вопрос: Найдётся ли эффективный метод проверки наличия или отсутствия противоречия в теории, выводимой из конечного списка аксиом? Неужели нельзя проверить формулу, составленную из конечного множества знаков? Нахождение метода – достойная задача для смелых умов.

Интересные аргументы по этому поводу найдены Бессоновым, см. [2], и суть их такова: «Непротиворечивость» произвольной теории S определена Гёделем в формуле «существует недоказуемая формула $\in S$». Это гёделево определение обозначим η. Для каждой формулы $\lambda\in S$, для которой $\neg\lambda$ доказуема в S, в последовательной S, приведением противного к противоречию, выводимо, что «λ недоказуема». В ином случае, S нелепа. Получив же недоказуемость λ, мы находим формулу, требуемую гёделевым определением η, но не получаем ни грамма знания о настоящей непротиворечивости S. Т.е. гёделево определение и бесполезно, и по нему выводимо отрицание «второй теоремы о неполноте» – доказав в S недоказуемость заведомо ложной формулы λ, мы «докажем» в S «непротиворечивость» S. Допущение, что «η не может быть средством $\in S$», делает «гёделеву теорему» тривиальной, т.к. невозможно доказать формулу, отсутствующую в теории. Если приписывать формулам «доказуемость» только после проверки непротиворечивости теории (тогда, только средствами самой теории), то не собираемы в «доказательство» и «гёделевы доводы». Вместе с тем, «доказательство» Гёделем определено как простой вывод из аксиом.

Непротиворечивость теории всегда неявно предположена (но почти всегда не доказана), когда в рассуждении применено правило необходимого, но и неконструктивного перехода от «$D\varphi$» к «$\neg D\neg\varphi$». Формула «$\neg D\neg\varphi$» по-настоящему, безусловно (без предположений о непротиворечивости S) доказана только тогда, когда конструктивно, детально, безусловно проверено отсутствие цепочек вывода формулы $\neg\varphi$. Т.е. для заключения «$\neg D\neg\varphi$» не достаточно только вывода формулы φ.

Не менее интересен другой взгляд на конструктивистский постулат об отождествлении истинности и доказуемости. Получаем, что постулат можно выразить в точности формулой «$\forall\varphi\in S\ (\varphi\Leftrightarrow D\varphi)$», которая прежде означала «гёделеву полноту», но приобретает теперь иную трактовку. При каких условиях, какой ценой постулат «$\forall\varphi\in S\ (\varphi\Leftrightarrow D\varphi)$» может быть верен в неполной теории? По-видимому, только при отказе от двузначной логики.

Какие ещё формулы, о которых мы думаем, что они «в точности выражают нашу мысль», могут быть подвергнуты естественной трактовке так, что они отразят «другую мысль»? Могут ли быть разрешены трудные задачи и сняты парадоксы только потому, что формулы, отражающие наши прежние мысли, будут заменены на другие формулы? По-видимому, необходим не только вопрос «откуда взят вывод?», но и вопрос «что вывод значит?». Полезно смотреть на предмет исследования с разных точек зрения, добиваясь всестороннего взгляда.

Литература

1. *Gödel. K, «Über formal unentscheidbare Sätze der Principina Mathematica und verwandter Systeme», Monatsh für Math. U. Phys., XXXVIII (1931), 173-198.*

2. *Бессонов А.В. «О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте арифметики», журн. «Философия Науки», №4(63), 2014, 12-31.*