Structure Theorem for abelian groups
(general case, finite or infinite)

Eli Halylaurin

21 octobre 2016

Abstract

In this document, you will find an attempt to demonstrate a general structure theorem for abelian groups (finite or not). Such a theorem already exists in the finite case, but the infinite case does not seem to have been deeply study. This is what it is proposed to do in this document. To achieve this task, Zorn Lemma will be used. We will try to prove each abelian group can be written, modulo isomorphism, as included in a direct product of groups that we will called elementary, because they can be represented upon a circle or a line. Thus this work may be valuable for every mathematiciens who like to better understand the structure of groups.

This document is french written. Though my english is not bad, it lacks of perfection, and so I have prefered to write it in my french language. Nevertheless if you think this work meet enough interest, please let me know and I might rewrite it in english.

There were important mistakes in the first version of this document I have corrected with this version.

Partie 1: Les groupes élémentaires et les fractions de groupes

Définition 1

On appellera groupe élémentaire H tout groupe abélien tel qu'il existe un $a \in H$ tel que $\forall b \in H$,
$\exists n \in \mathbb{Z}^*$, $\exists m \in \mathbb{Z}$ avec $b.n = a.m$
(Dans tout ce document on notera les groupes additivement, et la multiplication par un entier représente l'élément additionné autant de fois que cet entier l'indique, en prenant l'opposé si l'entier est négatif).

Définition 2

Soit G un groupe.
Alors $\exists \overline{G}$ un groupe tel que $G \subset \overline{G}$ et
$\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\forall a \in \overline{G}$, $\exists b \in \overline{G}$ tel que $b.n = a$.
On appelera un tel groupe une cloture fractionnaire de G.

En effet

On munit les groupes de la relation d'inclusion.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des groupes plus grand que G tel que tout élément élevé à une certaine puissance redonne dans G.
Par le lemme de Zorn, on a un tel sous-groupe maximal pour l'inclusion, qu'on note $\overline{G}$.
Supposons par l'absurde qu'on ait l'existence de $a \in \overline{G}$ et d'un $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\nexists b \in \overline{G}$ avec $b.n = a$.

Dans ce cas on définit $G' = \{(g,n) \in \overline{G} \times \mathbb{Z}\}$,
qu'on muni de la loie: $(g_1,n_1) + (g_2,n_2) = (g_1 + g_2,n_1 + n_2)$
On note H le sous-groupe engendré par $(a, -n)$.
Le groupe quotient G'/H peut se voir comme contenant $\overline{G}$ (en identifiant la classe de $(g,0)$ à g).
De plus, la classe de $(0,1)$ se voit alors comme un nouvel élément qui ajouté à lui-même n fois est égal à a.

Ainsi on a trouvé G'/H qui est strictement plus grand pour l'inclusion que G,
et qui est toujours dans $\mathcal{E}$.
Cela contredit la maximalité de $\overline{G}$.
Donc le raisonnement par l'absurde a abouti et on conclut donc:
$\forall a \in \overline{G}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\exists b \in \overline{G}$ tel que $b.n = a$.
Et le théorème est ainsi prouvé.

Remarque 3
Le but est maintenant de prouver qu'un groupe qui est clos fractionnairement est isomorphe à un produit direct de groupes élémentaires.
Ainsi, tout groupe étant inclus dans une cloture fractionnaire, tout groupe pourra se voir comme inclus dans un produit direct de groupes élémentaires.

Partie 2: Le théorème de structure des groupes abéliens

Théorème 1
Soit G groupe abélien, et H sous-groupe monogène de G.
Alors il existe dans G un sous-groupe I élémentaire contenant H.
En effet
Comme H est monogène, il est engendré par $a \in G$.
Il suffit donc de définir $I = \{b \in G \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{Z}^*, \exists m \in \mathbb{Z} \text{ avec } b.n = a.m\}$

Définition 2
Ayant des sous-groupes H_i de G, on notera $\sum_{i \in I} H_i$ l'ensemble
des sommes d'un nombre fini d'éléments pris dans les H_i.
On notera aussi $\prod_{i \in I} H_i$ le produit directe des H_i.
Dans le cas où I infini, on définira le produit direct de sorte que les éléments de ce produit direct n'ont qu'un nombre fini de coordonnées différentes de 0.

Théorème 3
Soit G groupe abélien clos fractionnairement, et $H = \sum_{j \in J} H_j$ un sous-groupe formé de H_j
tous élémentaires.
Alors si $H \neq G$, il existe un sous-groupe I monogène non-réduit à $\{0\}$, tel que $I \cap H = \{0\}$.
En effet
On note $a \in G \setminus H$.
Prenons le cas où $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a.n \in H$.
On note alors n plus petit tel qu'on ait un tel $a \in G \setminus H$ avec $a.n \in H$.
(n est donc premier).
Ainsi on obtient $a.n = \sum_{k=1}^{m} h_k$, où chaque h_k dans un des H_j qu'on note H_k.
Pour chaque h_k, on a l'existence de $a_k.n = h_k$, où a_k est encore dans H_k.
Ainsi $a.n = \sum_{k=1}^{m} a_k.n$
On note $b = a - \sum_{k=1}^{m} a_k$.
Ainsi $b.n = 0$, et il s'ensuit que b engendre un groupe monogène d'intersection
$\{0\}$ avec H, et on a donc gagné.
Prenons maintenant le cas où $a.n$ n'est jamais dans H (pour $n > 0$).
Dans ce cas $< a >$ forme bien un groupe monogène d'intersection $\{0\}$ avec H.
Dans tous les cas, on a donc bien l'existence du nouveau groupe monogène recherché.

Théorème 4
Soit G un groupe abélien, et $\sum_{i \in I} H_i$ une somme de sous-groupes, où I est muni d'un ordre total,
tel que la somme est égal à G (i.e. l'ensemble des sommes finis parmis les éléments des H_i parcourt

tout G), tel que tout H_i est d'intersection réduites à $\{0\}$ avec la somme des H_j qui le précède dans l'ordre total sur I.
Alors G est isomorphe au produit direct des H_i.

En effet

On défini $\varphi : \prod_{i\in I} H_i \to G$ par $\varphi((h_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} h_i$
(où seul un nombre fini de h_i sont différents du neutre).
C'est évidemment un morphisme.
La condition $G = \sum_{i\in I} H_i$ assure la surjectivité et la condition des intersections réduites à $\{0\}$ assure l'injectivité.
C'est donc un morphisme bijectif, et c'est donc un isomorphisme.
Le théorème est donc bien vrai.

Théorème 5

Soit G groupe abélien (fini ou infini).
Sous cette seule hypothèse, G est produit $\sum_{i\in I} H_i$, où I est muni d'un ordre total, tel que tous les H_i sont élémentaires, et tel que chaque H_i est d'intersection réduite à $\{0\}$ avec le produit des H_j qui le précède dans l'ordre total sur I.

En effet

On munit les sommes $\sum_{i\in I} H_i$, où les I sont munis d'un ordre total, et où les H_i sont élémentaires dans G et d'intersection réduite à $\{0\}$ avec les H_j qui lui sont inférieur dans l'ordre sur I, de la relation d'ordre:

$\sum_{i\in I} H_i \leq \sum_{j\in J} R_j$ si et seulement si

($I \subset J$ avec J ne contenant que des éléments plus grands que ceux de I, et $\forall i \in I$, $H_i = R_i$).

(on définit une somme infini comme l'ensemble des sommes parmis un nombre fini d'éléments dans les sous-groupes formant la somme).
L'hypothèse du lemme de Zorn est facile à vérifier ce qui permet de dire qu'il y a une somme maximale.
On la note $\sum_{i\in I} H_i$.
Si cette somme n'était G tout entier, le théorème 3 assure l'existence d'un groupe R monogène tel que R est d'intersection $\{0\}$ avec la somme, avec R non réduit à $\{0\}$.
Le théorème 1 nous dit alors qu'on peut en trouver un élémentaire (on le note R').
Du coup $R' + \sum_{i\in I} H_i$ est une somme strictement plus grande que la précédente pour la relation d'ordre définie.
Cela contredit la maximalité de ce dernier, et on conclut donc qu'en fait la somme $\sum_{i\in I} H_i$ est bien G tout entier.

Théorème 6 (de structure)

Soit G groupe abélien (fini ou infini).
Alors sous cette seule hypothèse, G est produit direct de groupes H_i élémentaires.

En effet

C'est la conséquence immédiate des théorèmes 4 et 5.

Partie 3: Qui suis-je

Je possède un Master de Mathématiques générales, obtenu en France où je suis né et habite.

Eli Halylaurin n'est pas mon vrai nom. C'est un nom de plûme que j'utilise pour me protéger vis à vis d'éventuelles attaques que mes documents pourraient soulevées.

Pour moi, les lieux de publication devraient ouvrir la possibilité de partager les idées, de soumettre des démonstrations, sans avoir peur d'être jugé.

Malheureusement, j'ai vécu suffisamment pour me rendre compte que c'est souvent devenu un lieu où les personnes sont injustement critiquées et psychologiquement persécutées.

Je ne nie pas l'éventualité que j'ai pu faire une erreur dans ce document. Mais, si tel était le cas, je ne l'aurais pas voulu et qu'on me critique pour cela ou pour une autre raison serait injuste, d'où la raison pour laquelle je ne divulguerai mon vrai nom que si nécéssaire.

Toutefois, le lecteur désireux de me contacter, si la raison n'est pas malintentionnée, pourra utiliser l'adresse mail ci-dessous.

If you need to contact me: eli.halylaurin@sfr.fr