Structure Theorem for abelian groups (general case, finite or infinite)

Eli Halylaurin

6 novembre 2016

Abstract

In this document, you will find an attempt to demonstrate a general structure theorem for abelian groups (finite or not). Such a theorem already exists in the finite case, but the infinite case does not seem to have been deeply study. This is what it is proposed to do in this document. To achieve this task, Zorn Lemma will be used. We will try to prove each abelian group can be written, modulo isomorphism, as included in a direct product of groups that we will called elementary, because they can be represented upon a circle or a line. Thus this work may be valuable for every mathematicians who like to better understand the structure of groups.

This document is french written. Although my english is not bad, it lacks of perfection, and so I have prefered to write it in my french language. Nevertheless if you think this work meet enough interest, please let me know and I might rewrite it in english.

There were mistakes in previous versions of this document I hope I have corrected with this version.

Partie 1: Les groupes élémentaires et les fractions de groupes

Théorème 1

Soit G un groupe (dans tout ce document on notera les groupes additivement).

Alors $\exists \overline{G}$ un groupe tel que $G \subset \overline{G}$ et vérifiant

$\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\forall a \in \overline{G}$, $\exists b \in \overline{G}$ tel que $b.n = a$.

On appellera un tel groupe une cloture fractionnaire de G.

En effet

Tout d'abord on définit E l'ensemble des suite $(\lambda_g)_{g \in G}$ où chaque $\lambda_g \in \mathbb{Q}$.

On munit E de l'addition des suites:

$(\alpha_g) + (\beta_g) = (\alpha_g + \beta_g)$

ce qui en fait un groupe.

Ensuite, on note H le sous-groupe engendré par les suites (λ_g) telles que $\exists g_1 \in G$, $\exists g_2 \in G$ tel que $\lambda_{g_1} = 1$, $\lambda_{g_2} = 1$, $\lambda_{g_1+g_2} = -1$, et $\forall g \notin \{g_1, g_2, g_1 + g_2\}$, $\lambda_g = 0$.

On définit $\varphi : G \to E/H$ (le groupe quotient), qui a $g \in G$ associe la classe de la suite qui vaut 1 sur la coordonnée g et 0 ailleurs.

Il devient clair que φ est un morphisme injectif.

G peut donc se voir comme inclus dans E/H.

De plus E vérifiait clairement:

$\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $\forall a \in E$, $\exists b \in E$ tel que $b.n = a$.

Cela reste donc vrai pour E/H.

En notant $\overline{G} = E/H$, on obtient donc bien l'existence du groupe recherché.

Définition 2

On appellera H groupe élémentaire si et seulement s'il vérifie les deux conditions:

(i) H est union croissante de groupes monogènes.
(ii) H est clos fractionnairement.

Remarque 3

Le but est maintenant de prouver qu'un groupe qui est clos fractionnairement est isomorphe à un produit direct de groupes élémentaires.
Ainsi, tout groupe étant inclus dans une cloture fractionnaire, tout groupe pourra se voir comme inclus dans un produit direct de groupes élémentaires.

Partie 2: Le théorème de structure des groupes abéliens

Théorème 1

Soit G groupe abélien clos fractionnairement, et H sous-groupe monogène de G.
Alors il existe dans G un sous-groupe I élémentaire contenant H.

En effet

Comme H est monogène, il est engendré par $a \in G$.
On note $a_1 = a$.
Puis a_2 tel que $a_2.2 = a_1$.
Puis a_3 tel que $a_3.3 = a_2$.
Et ainsi de suite.
On note $H_k =< a_k >$.
Il devient alors clair que $\cup_{k\geq 1} H_k$ est une union croissante de groupes monogènes,
et il contient H, et il est clos fractionnairement.
On a donc bien l'existence recherchée.

Définition 2

Ayant des sous-groupes H_i de G, on notera $\sum_{i\in I} H_i$ l'ensemble
des sommes d'un nombre fini d'éléments pris dans les H_i.
On notera aussi $\prod_{i\in I} H_i$ le produit direct des H_i.
Dans le cas où I infini, on définira le produit direct de sorte que les éléments de ce produit direct n'ont qu'un nombre fini de coordonnées différentes de 0.

Théorème 3

Soit G groupe abélien clos fractionnairement, et $H = \sum_{j\in J} H_j$ un sous-groupe formé de H_j tous élémentaires.
Alors si $H \neq G$, il existe un sous-groupe I monogène non-réduit à $\{0\}$, tel que $I \cap H = \{0\}$.

En effet

On note $a \in G \setminus H$.
Prenons le cas où $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a.n \in H$.
On note alors n plus petit tel qu'on ait un tel $a \in G \setminus H$ avec $a.n \in H$.
(n est donc premier).
Ainsi on obtient $a.n = \sum_{k=1}^{m} h_k$, où chaque h_k dans un des H_j qu'on note H_k.
Pour chaque h_k, on a l'existence de $a_k.n = h_k$, où a_k est encore dans H_k.
Ainsi $a.n = \sum_{k=1}^{m} a_k.n$
On note $b = a - \sum_{k=1}^{m} a_k$.
Ainsi $b.n = 0$, et il s'ensuit que b engendre un groupe monogène d'intersection $\{0\}$ avec H, et on a donc gagné.
Prenons maintenant le cas où $a.n$ n'est jamais dans H (pour $n > 0$).
Dans ce cas $< a >$ forme bien un groupe monogène d'intersection $\{0\}$ avec H.
Dans tous les cas, on a donc bien l'existence du nouveau groupe monogène recherché.

Théorème 4

Soit G un groupe abélien, et $\sum_{i\in I} H_i$ une somme de sous-groupes, où I est muni d'un ordre total, tel que la somme est égal à G (i.e. l'ensemble des sommes finies parmis les éléments des H_i parcourt tout G), tel que tout H_i est d'intersection réduites à $\{0\}$ avec la somme des H_j qui le précède dans l'ordre total sur I.

Alors G est isomorphe au produit direct des H_i.

En effet

On définit $\varphi : \prod_{i\in I} H_i \to G$ par $\varphi((h_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} h_i$
(où seul un nombre fini de h_i sont différents du neutre).
C'est évidemment un morphisme.
La condition $G = \sum_{i\in I} H_i$ assure la surjectivité et la condition des intersections réduites à $\{0\}$ assure l'injectivité.
C'est donc un morphisme bijectif, et c'est donc un isomorphisme.
Le théorème est donc bien vrai.

Théorème 5

Soit G groupe abélien clos fractionnairement (fini ou infini).
Sous cette seule hypothèse, G est somme $\sum_{i\in I} H_i$, où I est muni d'un ordre total, tel que tous les H_i sont élémentaires, et tel que chaque H_i est d'intersection réduite à $\{0\}$ avec la somme des H_j qui le précède dans l'ordre total sur I.

En effet

On munit les sommes $\sum_{i\in I} H_i$, où les I sont munis d'un ordre total, et où les H_i sont élémentaires dans G et d'intersection réduite à $\{0\}$ avec la somme des H_j qui lui sont inférieur dans l'ordre sur I, de la relation d'ordre:

$\sum_{i\in I} H_i \leq \sum_{j\in J} R_j$ si et seulement si

($I \subset J$ avec J ne contenant que des éléments plus grands que ceux de I, et $\forall i \in I$, $H_i = R_i$).

(on définit une somme infinie comme l'ensemble des sommes parmi un nombre fini d'éléments dans les sous-groupes formant la somme).
L'hypothèse du lemme de Zorn est facile à vérifier ce qui permet de dire qu'il y a une somme maximale.
On la note $\sum_{i\in I} H_i$.
Si cette somme n'était pas G tout entier, le théorème 3 assure l'existence d'un groupe R monogène tel que R est d'intersection $\{0\}$ avec la somme, avec R non réduit à $\{0\}$.
Le théorème 1 nous dit alors qu'on peut en trouver un élémentaire (on le note R').
Du coup $R' + \sum_{i\in I} H_i$ est une somme strictement plus grande que la précédente pour la relation d'ordre définie.
Cela contredit la maximalité de ce dernier, et on conclut donc qu'en fait la somme $\sum_{i\in I} H_i$ est bien G tout entier.

Théorème 6 (de structure)

Soit G groupe abélien clos fractionnairement (fini ou infini).
Alors sous cette seule hypothèse, G est produit direct de groupes H_i élémentaires.

En effet

C'est la conséquence immédiate des théorèmes 4 et 5.

Partie 3: Qui suis-je

Je possède un Master de Mathématiques générales, obtenu en France où je suis né et habite.

Eli Halylaurin n'est pas mon vrai nom. C'est un nom de plûme que j'utilise pour me protéger vis à vis d'éventuelles attaques que mes documents pourraient soulevées.

Pour moi, les lieux de publication devraient ouvrir la possibilité de partager les idées, de soumettre des démonstrations, sans avoir peur d'être jugé.

Malheureusement, j'ai vécu suffisamment pour me rendre compte que c'est souvent devenu un lieu où les personnes sont injustement critiquées et psychologiquement persécutées.

Je ne nie pas l'éventualité que j'ai pu faire une erreur dans ce document. Mais, si tel était le cas, je ne l'aurais pas voulu et qu'on me critique pour cela ou pour une autre raison serait injuste, d'où la raison pour laquelle je ne divulguerai mon vrai nom que si nécéssaire.

Toutefois, le lecteur désireux de me contacter, si la raison n'est pas malintentionnée, pourra utiliser l'adresse mail ci-dessous.

If you wish to contact me: eli.halylaurin@sfr.fr