

Abstract :

This is a system which simulates a ball game and a machine is substituted for one player in it.

1. Flat service

There is flat service as a service in tennis. Here, the axis of spin of a ball after flat service is assumed to be on a horizontal plane and vertical to the direction of movement. Namely, the axis of rotation of a racket is on a horizontal plane.

Flat service is the name of the play in tennis. In valley ball, it is called overhand drive serve, jump serve. In base ball, it is called batting though the situation is quite different. The ball has a spin after the play in common with them. It seems that the most of the spin is generated with the cause that revolution is given a ball.

If the angular momentum of a ball is 0 initially, the angular momentum which the ball got is divided into the angular momentum on gravity centre and the angular momentum on spin. For which angular momentum to be regarded as important depends on a ball game. We suppose that it is good that spin is not in base ball and a player try to enlarge spin rate of a ball in valley ball. In tennis, if a player is tall, there is no need of care especially. If we want to enlarge spin rate of a ball as much as possible or secure enough revolution to be needed, we give it moment on gravity centre.

2. Method with impulsive force

We try to get spin rate using impulse of impulsive force. In Figure 1, a ball of which mass, radius, moment of inertia, velocity of gravity centre and angular velocity on gravity centre are  $m, r, I_m, (u, v)$  and  $\omega$  collides a pole of which mass, position of gravity centre, width, moment of inertia, velocity of gravity centre and angular velocity on gravity centre are  $M, r_G, 2l, I_M, (U, V)$  and  $\Omega$ . The collision position is  $r_2$  and the contact between the ball and the pole is rough perfectly. The velocity after collision is  $(u', v'), (U', V')$  and the angular velocity on gravity centre is  $\omega', \Omega'$ . The impulse of impulsive force  $F, R$  is expressed like  $\bar{F}, \bar{R}$

$$\begin{aligned} m(u' - u) &= \bar{R}, & I_m(\omega' - \omega) &= \bar{F}r \\ M(U' - U) &= -\bar{R} - \bar{R}_0, & I_M(\Omega' - \Omega) &= -\bar{R}(r_2 - r_G) + \bar{R}_0r_G + \bar{F}l \\ e &= -\frac{u' - r\Omega'}{u - r\Omega} \\ U &= r_G\Omega, & V &= 0, & U' &= r_G\Omega', & V' &= 0, & v' + r\omega' &= V' - l\omega' \end{aligned}$$

Solving the above

$$\begin{aligned} \Omega' \left( I_M + Mr_G^2 + mr_2^2 + \frac{I_m ml^2}{I_m + mr^2} \right) &= (I_m - mr_2^2 e)\Omega + Mr_G U + mr_2(e + 1)u - \frac{I_m ml(v + r\omega)}{I_m + mr^2} \\ \omega'(I_m + mr^2) &= I_m\omega - mr(v + l\Omega') \end{aligned}$$

For example, using  $\omega = 0, v = 0$ , because  $l > 0$ , the result is  $\omega' < 0$ . In the above case, the pole is bat. If the pole is racket, if the gut is deformed in an instant, the collision occurs on the oppsite face of the pole substantially. Therefore, using not  $v' + r\omega' = V' - l\omega'$  but  $v' + r\omega' = V' + l\omega'$ , the result will

be  $\omega' > 0$ . Using the following values

$$m = 0.0589, \quad r = 0.035, \quad I_m = 3.614 \times 9.8 / (10000 \times 100), \quad \omega = 0$$

$$M = 0.293, \quad r_G = 0.283, \quad I_M = 122.7 / 10000, \quad l = 0.01, \quad \Omega = 35 / r_2$$

$$r_2 = 0.426$$

the result is

$$\omega' = 1.716531 \text{ [rps]}$$

It is unknown that to what extent this spin accounts for the previously mentioned spin after the play. Next, we consider the spin which is generated with the cause that a ball is given revolution.

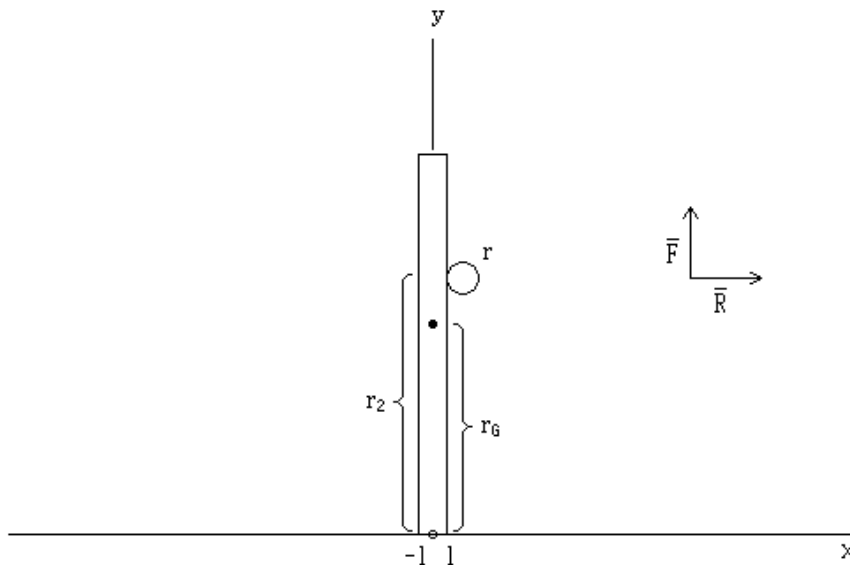


Figure 1

### 3. Catapult

Catapult which is a historical weapon throws a stone possessing a rope at an end of its wood pole and through it. The rope can be regarded as a rigid body link as long as tension acts on. We can consider that hammer throw which is an event of track and field is a kind of catapult. The number of links is 1 and 1 and over on hammer throw and catapult respectively. In hammer throw, a thrown hammer has spin. On TV, I have ever seen a picture that a stone is thrown from a catapult. The stone has spin too and I have an impression that its spin rate is bigger than hammer's spin rate.

Figure 2 shows a simplified catapult and its number of links is 3. The time differentiatin of the angle is expressed like the following:

$$\overline{dt}\theta_0 \equiv \Omega_0 \quad \overline{dt}\theta_1 \equiv \Omega_1 \quad \overline{dt}\theta_2 \equiv \Omega_2$$

The angular velocity of spin of each link is

$$\text{No. 0 link : } \Omega_0$$

$$\text{No. 1 link : } \Omega_0 + \Omega_1$$

$$\text{No. 2 link : } \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\text{No. j link : } \sum_{i=0}^j \Omega_i$$

The velocity of a point on each link is

$$\text{No. 0 link : } \mathbf{V}_0 = \mathbf{r}_{01} \times \boldsymbol{\Omega}_0$$

$$\text{No. 1 link : } \mathbf{V}_1 = \mathbf{r}_{02} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{r}_{12} \times \boldsymbol{\Omega}_1$$

$$\text{No. 2 link : } \mathbf{V}_2 = \mathbf{r}_{03} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{r}_{13} \times \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{r}_{23} \times \boldsymbol{\Omega}_2$$

$$\text{No. j link : } \mathbf{V}_j = \sum_{i=0}^j \mathbf{r}_{i(j+1)} \times \boldsymbol{\Omega}_i$$

If all of the links become in a straight line like Figure 3, the velocity of the gravity centre of each link is

$$\text{No. 0 link : } V_0 = (l_0/2)\Omega_0$$

$$\text{No. 1 link : } V_1 = (l_0 + l_1/2)\Omega_0 + (l_1/2)\Omega_1$$

$$\text{No. 2 link : } V_2 = (l_0 + l_1 + l_2/2)\Omega_0 + (l_1 + l_2/2)\Omega_1 + (l_2/2)\Omega_2$$

$$\text{No. j link : } V_j = \sum_{i=0}^j \left( \sum_{k=i}^{j-1} l_k + l_j/2 \right) \Omega_i$$

The velocity of a point on the last link is

$$\text{No. 2 link : } V_2 = (l_0 + l_1 + r_{23})\Omega_0 + (l_1 + r_{23})\Omega_1 + r_{23}\Omega_2$$

$$\text{No. j link : } V_j = \sum_{i=0}^j \left( \sum_{k=i}^{j-1} l_k + r_{j(j+1)} \right) \Omega_i$$

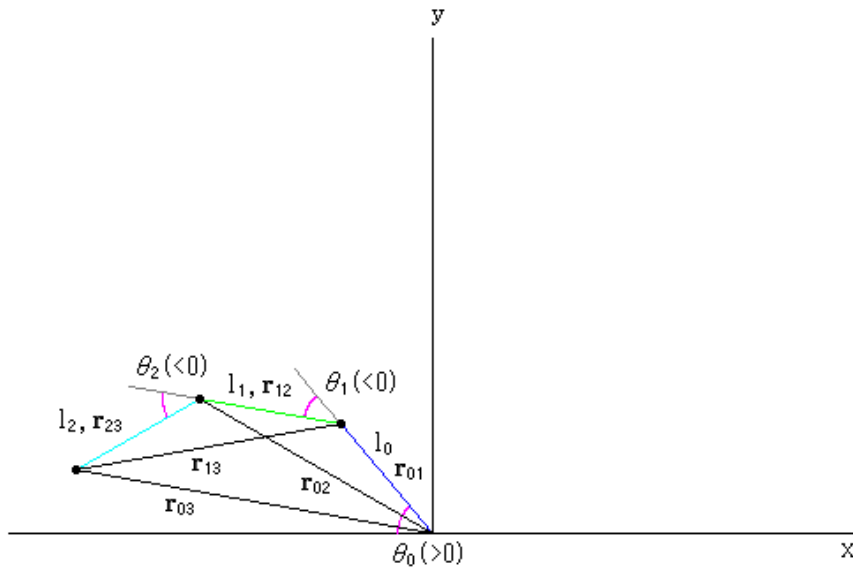


Figure 2

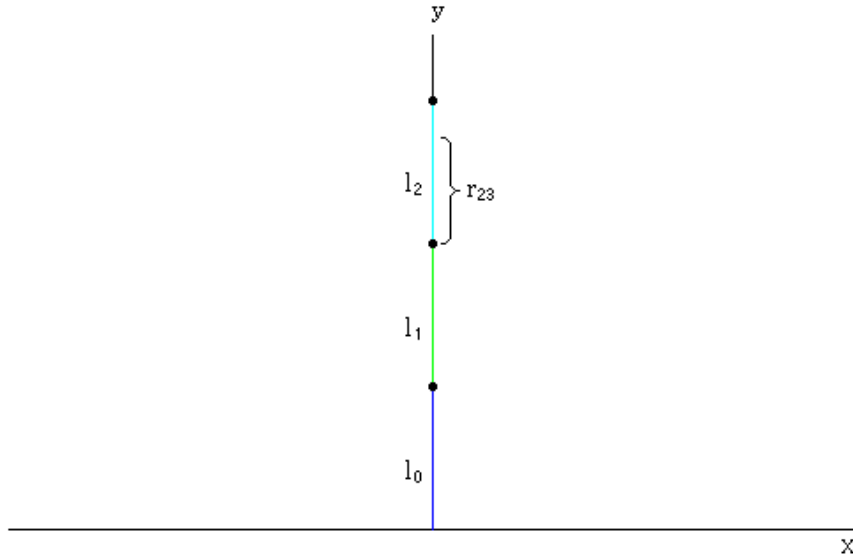


Figure 3

#### 4. Conservation of angular momentum

The method with impulsive force produces negative result, so we simulate survey of angular velocity of spin. It is assumed that at  $t = 0$ , a pole with angular velocity  $\Omega$  and a ball collide and at  $t = \Delta t$ , they separate. Figure 1 is at  $t = 0$  and Figure 4 is at  $t = \delta t$ . The collision is done on a horizontal plane for the purpose of avoiding influence of gravity.

$$t = 0 : \omega = 0, \quad u = 0, \quad v = 0$$

$$t = 0 : \Omega, \quad U = r_G \Omega, \quad V = 0$$

$$t = \Delta t : \omega', \quad u', \quad v'$$

$$t = \Delta t : \Omega', \quad U', \quad V'$$

We measure  $\omega'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $\Omega'$ ,  $U'$ ,  $V'$  and coordinates  $(x, y)$  of gravity centre of a ball at  $t = \Delta t$ . The angular momentum is

$$t = 0 : L = r_G M U + I_M \Omega = \Omega (r_G^2 M + I_M)$$

$$t = \Delta t : L' = r_G \sqrt{U'^2 + V'^2} + I_M \Omega' - (x m v' - y m u') + I_m \omega''$$

From conservation of angular momentum  $L = L'$

$$\omega'' I_m = \Omega (r_G^2 M + I_M) - r_G \sqrt{U'^2 + V'^2} - I_M \Omega' + (x m v' - y m u')$$

$\omega'$  is surveyed angular velocity of spin and  $\omega''$  is angular velocity of spin which is got from conservation of angular momentum.

The number of links in Figure 1 is 1 and this motion is what is called doorswing. It is easy in survey. If survey is done with more than one link, data of spin which is close to spin in actual flat service will be got. In more than one link, we get angular velocity of spin and velocity of gravity centre of each link in the manner which is used in "3. Catapult".

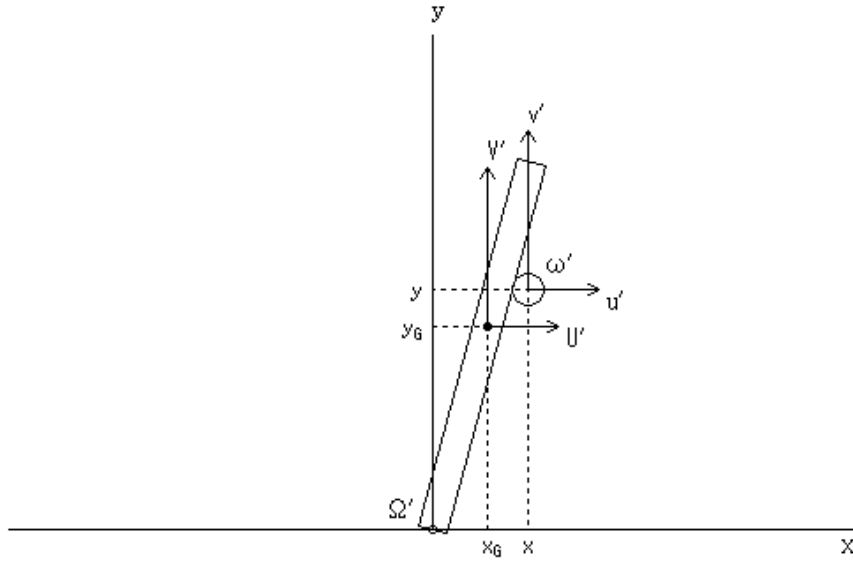


Figure 4

### 5. Presumption of angular velocity of spin

If coefficient of rebound is 0, because a ball moves together with a pole, the ball becomes equal to the pole in angular velocity and its angular velocity will be able to be got in the manner which is used in "3. Catapult". Therefore, if coefficient of rebound is positive, angular velocity of spin may have some relation to angular velocity of spin in the case that coefficient of rebound is 0. So, presuming that the former is equal to the latter plus some increment, we try to get angular velocity of spin.

Figure 1 is at  $t = 0$  and Figure 4 is at  $t = \delta t$ . We assume that after the collision between a ball and pole, the ball does not roll and slip on the pole. Like Figure 5, origin of moving coordinate system  $K'$  is placed at a point on the centre line of the pole which is close to a collision point. In  $K'$ , the position and velocity of the ball are  $\mathbf{r}_{K'}$ ,  $\mathbf{v}_{K'}$ . With knowledge of relative motion

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{K'} + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{K'} \\ \mathbf{v}_{K'} &= \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{r}_{K'}\end{aligned}$$

$\mathbf{v}'$  is velocity of the ball,  $\mathbf{v}_0$  is velocity of origin of  $K'$  and  $\boldsymbol{\Omega}'$  is angular velocity of spin of the pole.  $|\mathbf{r}_{K'}|$  is  $r$  if the pole is racket and  $l + r$  if the pole is bat.  $\mathbf{v}_{K'}$  becomes like Figure 6. The component in the direction of  $y'$  of  $\mathbf{v}_{K'}$  is  $|\mathbf{v}_{K'}| \sin \theta$ . Assuming that angular velocity of spin is equal to angular velocity of spin in the case that coefficient of rebound is 0 plus contributory portion of  $|\mathbf{v}_{K'}| \sin \theta$

$$\omega' = \Omega' \frac{v_0 + e_v |\mathbf{v}_{K'}| \sin \theta}{v_0} = \Omega' \left( 1 + \frac{e_v |\mathbf{v}_{K'}| \sin \theta}{\Omega' r_2} \right) = \Omega' + \frac{e_v |\mathbf{v}_{K'}| \sin \theta}{r_2}$$

We make the coefficient  $e_v$  1 for example. In more than one link, angular velocity of spin of the last link and velocity of a point on the last link are got in the manner which is used in "3. Catapult".

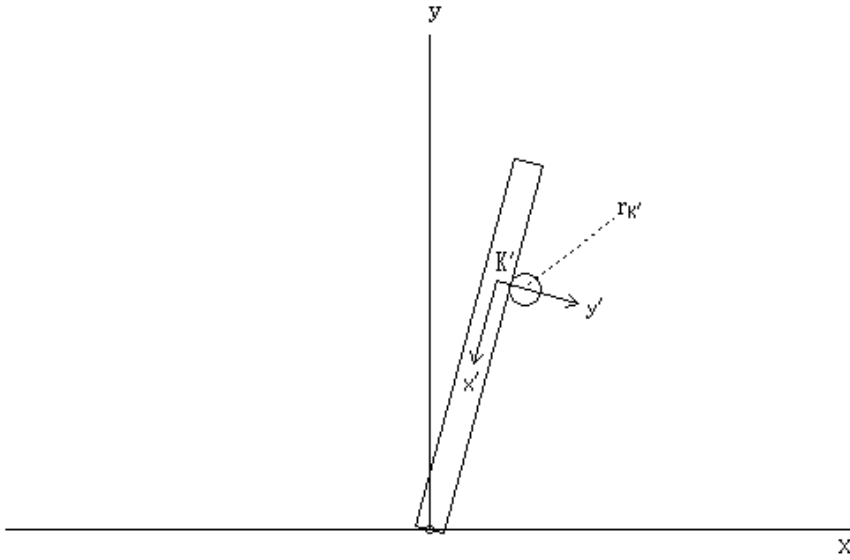


Figure 5

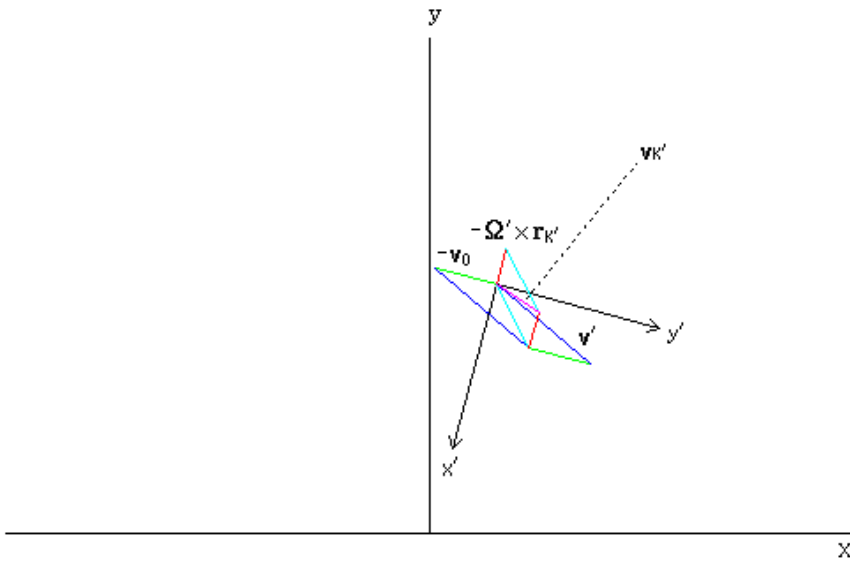


Figure 6

## 6. Concrete example

We consider a case that like Figure 7, a ball and racket collide and the two arms and racket are in a straight line when the ball separates from the racket. We fix the length  $l_0$ ,  $l_1$  of the two arms, the distance  $r_2$  between the grip and the collision point, velocity  $|\mathbf{v}'|$  of the ball and angular velocity  $\omega_i'$  of each link (two arms, racket) like the following:

$$l_0 = 0.27, \quad l_1 = 0.27, \quad r_2 = 0.426$$

$$|\mathbf{v}'| = (160/3.6) \times 1.3$$

$$\omega_0' = 11.5 \times 1.3 \times 0.2$$

$$\omega_1' = 10 \times 1.3 \times 0.2$$

$$\omega_2' = 23 \times 1.3 \times 0.2$$

We assume that velocity of the ball is vertical to the racket face and angular velocity of each link when they separate is 0.2 times as much as its angular velocity just before the collision. The third term is

omitted in the relational expression of relative motion.

$$\mathbf{v}_{K'} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0$$

The second term of the right side is

$$v_0 = (l_0 + l_1 + r_2)\omega_0' + (l_1 + r_2)\omega_1' + r_2\omega_2'$$

Therefore, angular velocity of spin is

$$v_{K'} = v' - v_0 = 50.532358$$

$$\omega' = \Omega' + \frac{|\mathbf{v}_{K'}| \sin \theta}{r_2} = \omega_0' + \omega_1' + \omega_2' + \frac{v_{K'}}{r_2} = 20.720471 \text{ [rps]}$$

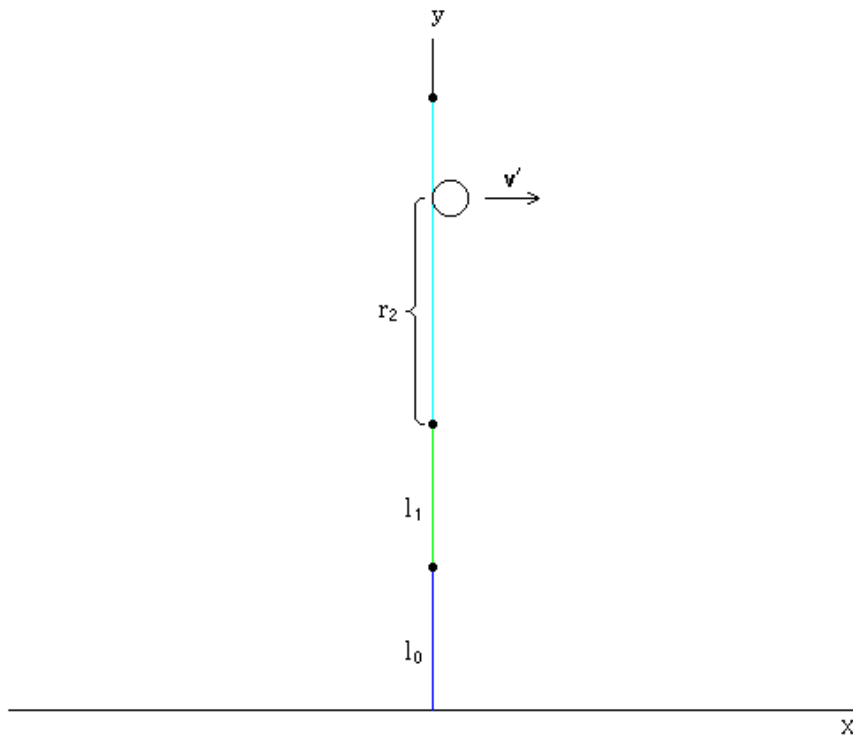


Figure 7

## ボールゲームのための機械による練習システム

菊池盛雄

アブストラクト：

これはボールゲームにおける練習システムであり、一方の対戦者を機械で代替します。

### 1. フラットサービス

テニスのサービスの一つにフラットサービスがあります。ここでは、フラットサービスの後のボールのスピンの軸は水平面上にあり、ボールの進行方向と垂直であるとします。すなわち、ラケットの回転の軸は水平面上にあります

フラットサービスはテニスの場合の名称であり、同じようなプレイは他のボールゲームにもあります。バレーボールではオーバーハンドドライブサーブ、ジャンプサーブと呼ばれます。野球では、大幅に状況が異なりますが、バッティングと呼ばれます。これらのプレイに共通するのはプレイ後にボールにスピンが生じることです。このスピンの大部分はボールに公転が与えられることにより生じるようです。

最初ボールの角運動量がゼロであるとすれば、ボールが受け取った角運動量は重心の角運動量とスピンの角運動量に分かれます。重心の角運動量とスピンの角運動量のどちらを重視するかはボールゲームによります。野球ではスピンはない方がよいでしょう。バレーボールではスピンの回転数を大きくしようとしています。テニスでは長身のプレーヤーは特に気にすることはないでしょう。スピンの回転数を可能な限り大きくしたい、または必要なだけ確保したい場合は、ボールの重心に関するモーメントを与えることとなります。

### 2. 撃力による解法

撃力の力積を用いてスピンの回転数を求めてみます。図1において、質量  $m$ 、半径  $r$ 、慣性モーメント  $I_m$ 、重心の速度  $(u, v)$ 、重心に関する角速度  $\omega$  のボールと質量  $M$ 、重心の位置  $r_G$ 、幅  $2l$ 、慣性モーメント  $I_M$ 、重心の速度  $(U, V)$ 、重心に関する角速度  $\Omega$  の棒が衝突するとします。衝突する位置は  $r_2$  であり、ボールと棒の接触は完全に疎であるとします。衝突後の重心の速度は各々  $(u', v')$ 、 $(U', V')$ 、衝突後の重心に関する角速度は各々  $\omega'$ 、 $\Omega'$  です。撃力  $F$ 、 $R$  の力積を各々  $\bar{F}$ 、 $\bar{R}$  のように表します。

$$\begin{aligned} m(u' - u) &= \bar{R}, & I_m(\omega' - \omega) &= \bar{F}r \\ M(U' - U) &= -\bar{R} - \bar{R}_0, & I_M(\Omega' - \Omega) &= -\bar{R}(r_2 - r_G) + \bar{R}_0 r_G + \bar{F}l \\ e &= -\frac{u' - r\Omega'}{u - r\Omega} \\ U &= r_G\Omega, & V &= 0, & U' &= r_G\Omega', & V' &= 0, & v' + r\omega' &= V' - l\omega' \end{aligned}$$

これを解いて

$$\begin{aligned} \Omega' \left( I_M + Mr_G^2 + mr_2^2 + \frac{I_m ml^2}{I_m + mr^2} \right) &= (I_m - mr_2^2 e)\Omega + Mr_G U + mr_2(e + 1)u - \frac{I_m ml(v + r\omega)}{I_m + mr^2} \\ \omega'(I_m + mr^2) &= I_m\omega - mr(v + l\Omega') \end{aligned}$$

例えば  $\omega = 0$ 、 $v = 0$  を用いると、 $l > 0$  なので  $\omega' < 0$  となってしまいます。これは棒がバットの場合です。棒がラケットの場合は、ガットが瞬時に変形すれば衝突は実質的に棒の反対側の面で起こると考



えられます。したがって、 $v' + r\omega' = V' - l\omega'$ ではなく  $v' + r\omega' = V' + l\omega'$  を用いて、 $\omega' > 0$  となるでしょう。以下の数値

$$m = 0.0589, \quad r = 0.035, \quad I_m = 3.614 \times 9.8 / (10000 \times 100), \quad \omega = 0$$

$$M = 0.293, \quad r_G = 0.283, \quad I_M = 122.7 / 10000, \quad l = 0.01, \quad \Omega = 35 / r_2$$

$$r_2 = 0.426$$

を用いると

$$\omega' = 1.716531 \text{ [rps]}$$

となります。このスピンの前に述べたプレイ後のスピンのどの程度を占めているかは不明です。次に、ボールに公転が与えられることにより生じるスピンについて考察します。

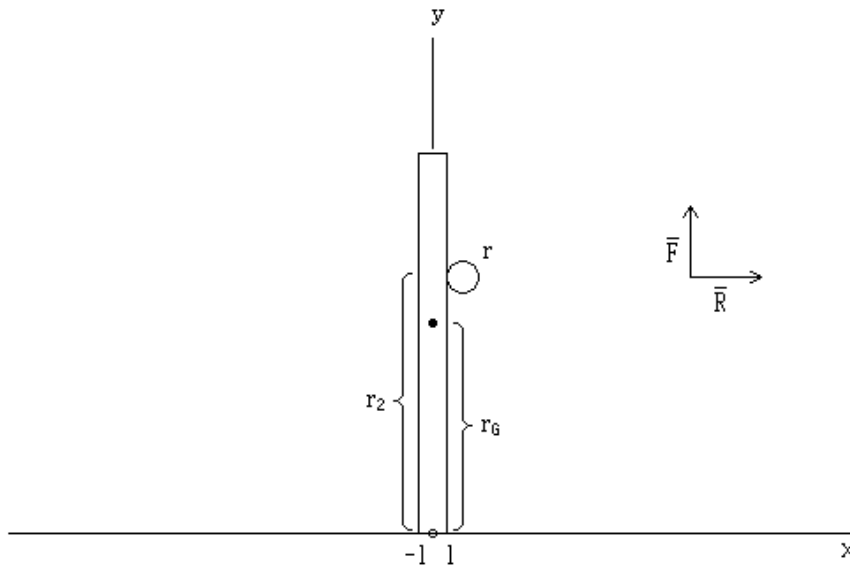


図 1

### 3. 投石機

歴史的な武器である投石機は例えば木の棒の先に縄を備え、これを介して石を投げます。縄は張力が働いている限りは剛体リンクとみなすことができます。陸上競技の種目であるハンマー投げは投石機の一つであると考えられます。リンクの数は、ハンマー投げは1、投石器は1以上です。ハンマー投げでは投げられたハンマーはスピンを有しています。TVで投石器から石が投げられる映像を見たことがあります。石もスピンを有していて、回転数はハンマーより大きいという印象を持っています。

図2は単純化された投石機を表して、リンクの数は3です。各角の時間微分を以下のように表します。

$$\overline{dt}\theta_0 \equiv \Omega_0 \quad \overline{dt}\theta_1 \equiv \Omega_1 \quad \overline{dt}\theta_2 \equiv \Omega_2$$

各リンクのスピンの角速度は

$$\text{第0リンク} : \Omega_0$$

$$\text{第1リンク} : \Omega_0 + \Omega_1$$

$$\text{第2リンク} : \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\text{第} j \text{リンク} : \sum_{i=0}^j \Omega_i$$

各リンク上の点の速度は以下の式で表されます。

$$\text{第0リンク} : \mathbf{V}_0 = \mathbf{r}_{01} \times \boldsymbol{\Omega}_0$$

$$\text{第1リンク} : \mathbf{V}_1 = \mathbf{r}_{02} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{r}_{12} \times \boldsymbol{\Omega}_1$$

$$\text{第2リンク} : \mathbf{V}_2 = \mathbf{r}_{03} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \mathbf{r}_{13} \times \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{r}_{23} \times \boldsymbol{\Omega}_2$$

$$\text{第} j \text{リンク} : \mathbf{V}_j = \sum_{i=0}^j \mathbf{r}_{i(j+1)} \times \boldsymbol{\Omega}_i$$

図3のように全てのリンクが一直線になった場合の各リンクの重心の速度は

$$\text{第0リンク} : V_0 = (l_0/2)\Omega_0$$

$$\text{第1リンク} : V_1 = (l_0 + l_1/2)\Omega_0 + (l_1/2)\Omega_1$$

$$\text{第2リンク} : V_2 = (l_0 + l_1 + l_2/2)\Omega_0 + (l_1 + l_2/2)\Omega_1 + (l_2/2)\Omega_2$$

$$\text{第} j \text{リンク} : V_j = \sum_{i=0}^j \left( \sum_{k=i}^{j-1} l_k + l_j/2 \right) \Omega_i$$

最終リンク上の点の速度は

$$\text{第2リンク} : V_2 = (l_0 + l_1 + r_{23})\Omega_0 + (l_1 + r_{23})\Omega_1 + r_{23}\Omega_2$$

$$\text{第} j \text{リンク} : V_j = \sum_{i=0}^j \left( \sum_{k=i}^{j-1} l_k + r_{j(j+1)} \right) \Omega_i$$

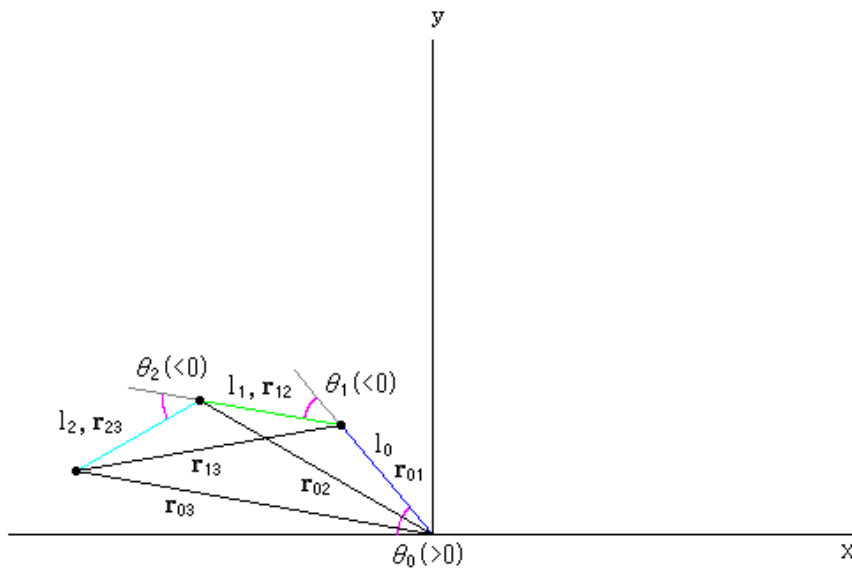


図 2

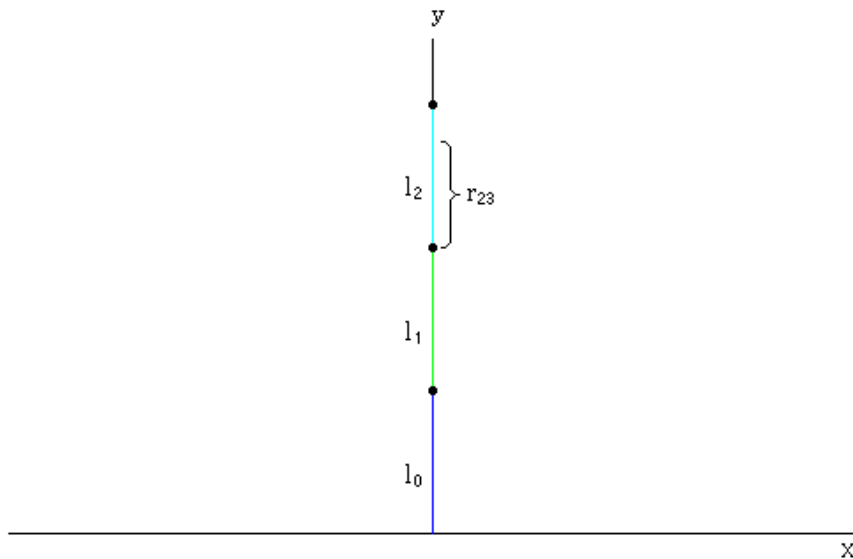


図 3

#### 4. 角運動量保存

撃力による解法では否定的な結果に終わってしまいます。そこで、実測でスピンの角速度を求めてみます。  $t = 0$  で角速度  $\Omega$  の棒とボールが衝突し、  $t = \Delta t$  で棒とボールが離れるとします。図 1 は  $t = 0$ 、図 4 は  $t = \delta t$  です。衝突は重力の影響を避けるために水平面内で行います。

$$t = 0 : \omega = 0, \quad u = 0, \quad v = 0$$

$$t = 0 : \Omega, \quad U = r_G \Omega, \quad V = 0$$

$$t = \Delta t : \omega', \quad u', \quad v'$$

$$t = \Delta t : \Omega', \quad U', \quad V'$$

$t = \Delta t$  で  $\omega'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $\Omega'$ ,  $U'$ ,  $V'$ 、ボールの重心の座標  $(x, y)$  を測定します。角運動量は

$$t = 0 : L = r_G M U + I_M \Omega = \Omega (r_G^2 M + I_M)$$

$$t = \Delta t : L' = r_G \sqrt{U'^2 + V'^2} + I_M \Omega' - (x m v' - y m u') + I_m \omega''$$

$L = L'$  として

$$\omega'' I_m = \Omega (r_G^2 M + I_M) - r_G \sqrt{U'^2 + V'^2} - I_M \Omega' + (x m v' - y m u')$$

$\omega'$  は実測したスピンの角速度、 $\omega''$  は角運動量保存から求められたスピンの角速度です。

図中のリンクの数は 1 であり、この運動はいわゆるドアシングです。この方が実測は容易です。複リンクで実測を行えば実際のフラットサービスのスピンに近いデータが得られるでしょう。複リンクでは各リンクのスピンの角速度と重心の速度は”3. 投石機”の要領で求めます。



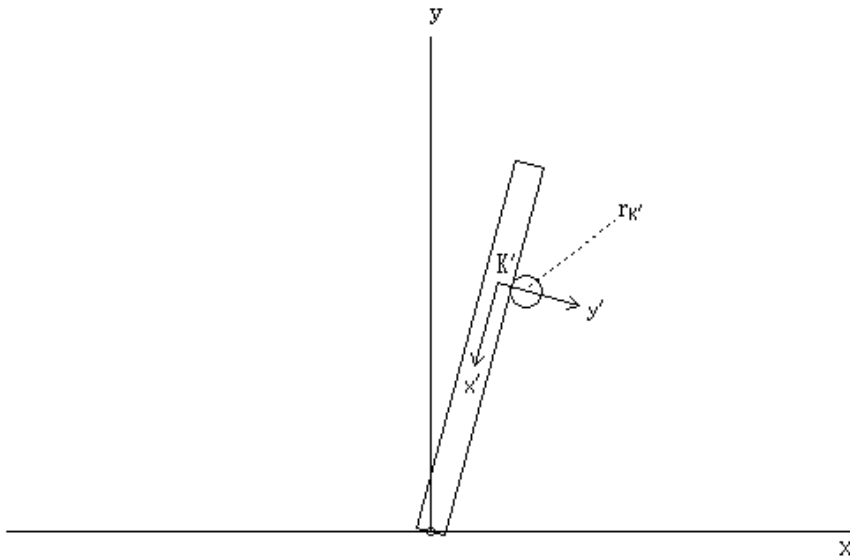


図 5

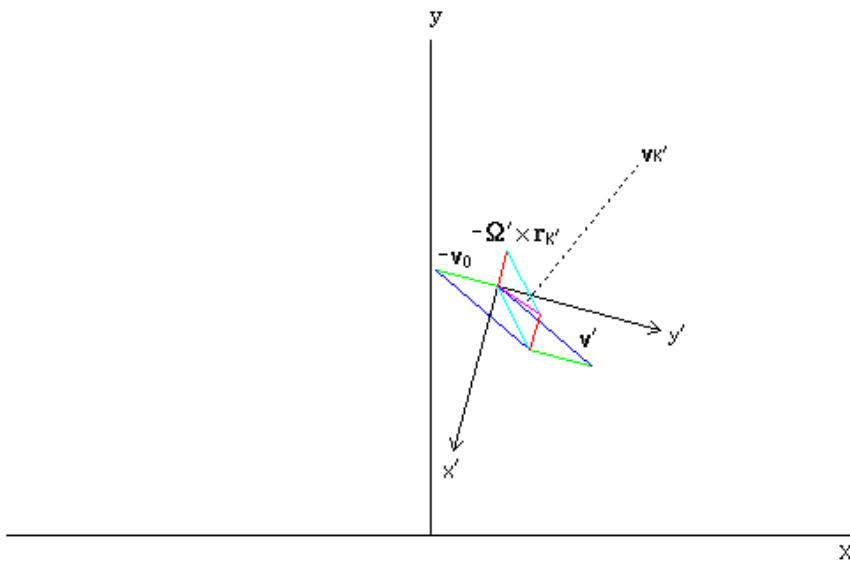


図 6

## 6. 具体例

図 7 のようにボールとラケットが衝突し、ボールがラケットから離れる時に腕、ラケットが一直線になっている場合を考えます。腕の長さ  $l_0$ 、 $l_1$ 、グリップと衝突点の距離  $r_2$ 、ボールの速度  $|v'|$  と各リンク (腕とラケット) の角速度  $\omega_i'$  は以下のように選びます。

$$l_0 = 0.27, \quad l_1 = 0.27, \quad r_2 = 0.426$$

$$|v'| = (160/3.6) \times 1.3$$

$$\omega_0' = 11.5 \times 1.3 \times 0.2$$

$$\omega_1' = 10 \times 1.3 \times 0.2$$

$$\omega_2' = 23 \times 1.3 \times 0.2$$

ボールの速度はラケット面に垂直であり、ボールがラケットから離れる時の各リンクの角速度は衝突直前の角速度の 0.2 倍であるとしています。相対運動の関係式では第三項を省略します。

$$v_{K'} = v' - v_0$$

右辺第二項は

$$v_0 = (l_0 + l_1 + r_2)\omega_0' + (l_1 + r_2)\omega_1' + r_2\omega_2'$$

したがって、スピンの角速度は

$$v_{K'} = v' - v_0 = 50.532358$$

$$\omega' = \Omega' + \frac{|v_{K'}| \sin \theta}{r_2} = \omega_0' + \omega_1' + \omega_2' + \frac{v_{K'}}{r_2} = 20.720471 \text{ [rps]}$$

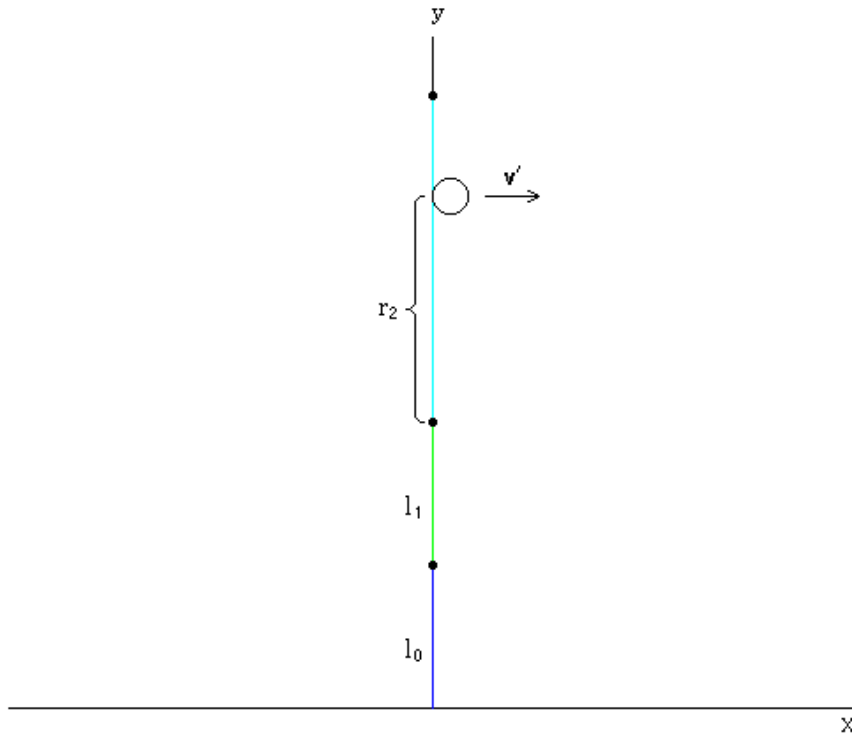


図 7

参考文献：

- ・ 山内恭彦、末岡清市、”大学演習力学”、裳華房、昭和 61 年
- ・ 村松憲、池田亮、高橋仁大、道上静香、岩嶋孝夫、梅林薫、”世界ランキング 50 位以内のテニスプレイヤーの国際大会におけるサービス回転量について”、スポーツパフォーマンス研究、2010 年

\*\*\*\*\*

List 1:spin.c