Les équations de Navier-Stokes : le cas périodique

A.Balan

February 22, 2017

Abstract

We study here the Navier-Stokes equations in the periodic case in the light of the complex analysis and the theory of holomorphic functions. We prove the existence of solutions of the equations for all time, a periodic initial condition being given.

1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont au cœur de la mécanique des fluides qui décrit le mouvement des fluides dans l'espce selon des paramètres de pression et de viscosité [C]. Le fluide considéré est incompressible, de divergence nulle. Nous montrons que dans le cas périodique, des solutions aux équations de Navier-Stokes existent pour tout temps t pour une condition initiale donnée u_0 périodique. Pour ce faire, nons utilisons la théorie des fonctions holomorphes en analyse complexe [R].

2 Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes décrivent la vitesse u d'un fluide en tout point et en fonction du temps $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$.

$$\partial_t u + (u.\nabla)(u) = \Delta(u) + grad(f)$$

$$div(u) = 0$$

avec f, la pression.
Dans le cas périodique, on suppose que la fonction u est développable en Fourier :

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) \exp(2i\pi nx)$$

On utilise dans cette notation les multi-indices. La condition initiale est $u_0(x) = u(x,0)$. La pression peut se calculer en fonction de u, sachant que la divergence est nulle et on obtient :

$$f = \Delta^{-1}(div((u.\nabla)(u)))$$

3 Les fonctions holomorphes sur le multi-disque D^3

3.1 Théorème

Comme u est périodique, on peut poser:

$$z = r\exp(ix)$$

et

$$\bar{z} = r\exp(-ix)$$

avec des multi-indices toujours. On peut donc écrire la condition initiale comme :

$$u_0(x) = f_1(z) + f_2(\bar{z})$$

pour $r = 1$. Nous remplaçons dans les équations de Navier-Stokes les ∂_{x_j} par $\partial_j = i(z_j\partial_{z_j} - \bar{z}_j\partial_{\bar{z}_j})$, afin d'obtenir des équations sur le multi-disque qui correspondent à Navier-Stokes sur le tore. Sur le multi-disque, nous aurons alors une fonction biholomorphe de rayon 1, $u_0(z,\bar{z})$, prolongeable par continuité sur le bord du disque, le cercle de rayon 1.

3.2 Démonstration

On a continuité sur le bord du miulti-disque du fait que u_0 est lisse : les séries de Fourier sont normalement convergentes. Toutes les dérivées sont prolongeables, de même.

4 Résolution des équations de Navier-Stokes sur le multi-disque D^3

4.1 Théorème

Sur le multi-disque, nous utilisons les fonctions holomorphes pour résoudre les équations de Navier-Stokes. On développe u :

$$u(z,\bar{z},t) = \sum_{n\geq 0} u_n(z,\bar{z})t^n$$

u est holomorphe en z et $\bar{z}$. En injectant cette équation dans les équations de Navier-Stokes, nous obtenons une relation de récurrence sur les u_n. De plus, nous avons un contrôle des u_n, sachant que la condition initiale est holomorphe de rayon 1. De la sorte, la solution $u(z,\bar{z},t)$ existe pour t petit avec un rayon de convergence 1 en $(z,\bar{z})$, et R en t.

4.2 Démonstration

On injecte la série dans les équations de Navier-Stokes étendues au disque, ce qui donne :

$$(n+1)u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(u_k.\nabla)(u_{n-k}) = \Delta(u_n) + grad(\Delta^{-1}(div(\sum_{k=0}^{n}(u_k.\nabla)(u_{n-k}))))$$

Sachant que les dérivées de u_0 peuvent être contrôlées par la formule de Cauchy, on peut majorer les u_n et obtenir une fonction biholomorphe sur le disque pour un temps suffisamment petit.

5 Solutions pour tout t dans l'intérieur du multi-disque D^3

5.1 Théorème

On définit un changement de fonctions :

$$u(az, a\bar{z}, t) = v_a(z, \bar{z}, t)$$

avec $1 >> a > 0$. On observe alors dans les équations que le rayon de convergence en t de la fonction holomorphe $v_a(z, \bar{z}, t)$ est R/a, du fait des dérivations dans la formule de récurrence de v_a et donc, on obtient une solution en t grand pour $v_a(z, \bar{z}, t)$. On a donc prouvé que sur le multi-disque D^3, des solutions aux équations de Navier-Stokes existent pour tout t.

5.2 Démonstration

Les u_n que l'on obtient par récurrence se trouvent multipliés par une puissance de a, par le changement de variables ; ce qui permet de définir la solution pour un temps quelconque.

6 Prolongements au tore T^3

6.1 Théorème

Toute la question est de prolonger les solutions dans l'intérieur du multi-disque D^3 au tore T^3. Nous utilisons des suites de Cauchy pour montrer qu'il n'y a pas d'explosion en un temps t_0. En effet, prenons une suite convergente vers le tore de points z_i et $y_0^i = v_a(z_i, \bar{z}_i, t_0)$, avec a assez petit, on peut alors estimer la différence avec $y_1^i = v_a(z_i, \bar{z}_i, t_1)$, la suite en un temps proche t_1 :

$$|y_0^i - y_0^j| \leq |y_0^i - y_1^i| + |y_1^i - y_1^j| + |y_1^j - y_0^j| \leq 3\epsilon$$

La suite est donc de Cauchy et il ne peut y avoir d'explosion en temps fini.

6.2 Démonstration

On choisit ϵ petit, puis on choisit un temps t_1 suffisamment proche de t_0 de sorte que $|y_0^i - y_1^i|$ est petit uniformément en $z_i, \bar{z}_i$ sur le disque, ce qui est possible car :

$$y_0^i - y_1^i = \sum_n v_a^n(z_i, \bar{z}_i)(t_0^n - t_1^n)$$

et les v_a^n sont majorables. Comme en t_1 la solution est prolongeable, la suite est de Cauchy et on aura :

$$|y_1^i - y_1^j| \leq \epsilon$$

pour i, j suffisamment grands.

References

[C] Patrick Chassaing, "Mécanique des fluides, Éléments d'un premier parcours", Cépaduès éditions, Toulouse, 2010.

[G] Christian Grossetête, "Mécanique des fluides", Éditions Ellipse, Paris, 1991.

[HPS] Pascale Harinck, Alain Plagne, Claude Sabbah, éd., "Facettes mathématiques de la mécanique des fluides", Les Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2010.

[R] Walter Rudin, "Analyse réelle et complexe", Dunod, Paris, 2009.