
Хмельник С.И.

Математическая модель плазменного кристалла

Аннотация.

Предлагается математическая модель плазменного кристалла, построенная с использованием уравнений Максвелла.

Оглавление

1. Постановка задачи
 2. Система уравнений
 3. Первая математическая модель
 4. Вторая математическая модель
 5. Энергия плазменного кристалла
- Литература

1. Постановка задачи

Пылевая плазма (см. [1]) представляет собой множество заряженных частиц. Эти "частицы могут выстраиваться в пространстве определённым образом и образовывать так называемый плазменный кристалл" [2]. Механизм образования, поведение и формы таких кристаллов трудно предсказуемы. В условиях слабой гравитации наблюдения этих процессов и форм вызывает удивление – см. иллюстрации (рис. 1) экспериментов в космосе из [3].

Поэтому в 2007 г. было выполнено их компьютерное моделирование. Результаты вызвали еще большее удивление, что отразилось даже в названии соответствующей статьи [4]: "От плазменных кристаллов и спиральных структур ению к неорганической живой материи". В [5] приведено краткое изложение и обсуждение результатов моделирования.

Мне тоже нравятся такие сопоставления. Но, тем не менее, надо отметить, что используемый авторами метод моделирования молекулярной динамики не полностью учитывает все особенности пылевой плазмы. В этом методе для описания движения частиц применяется классическая механика и рассматриваются только электростатические силы взаимодействия между заряженными

частицами. В действительности же при движении заряженных частиц возникают токи зарядов – электрические токи и, как следствие, электромагнитные поля. Их необходимо учитывать при моделировании.

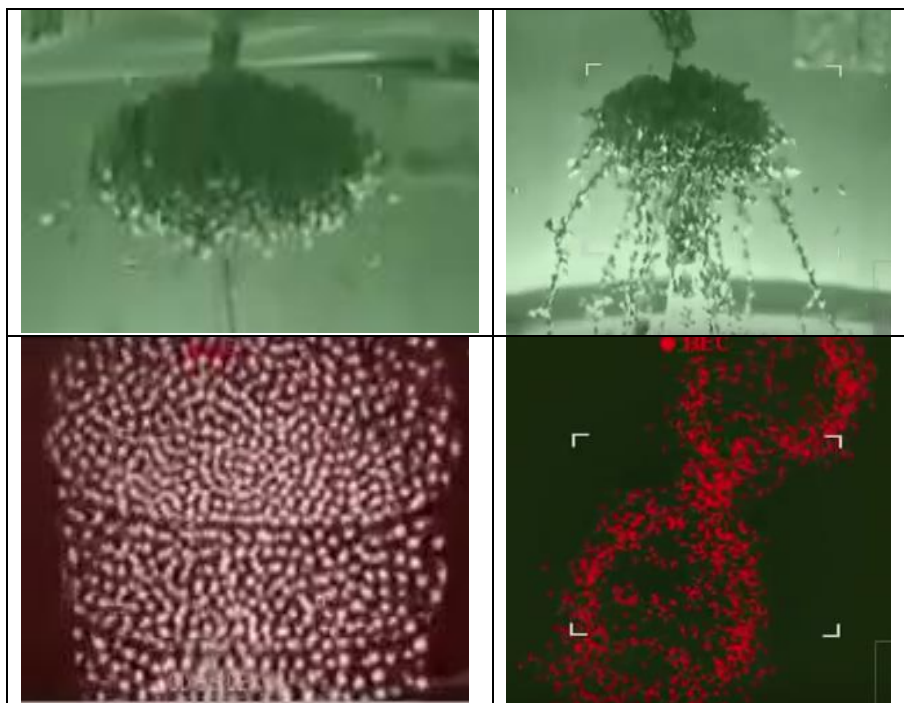


Рис. 1.

В невесомости на частицы плазмы не воздействуют гравитационные силы. Если исключить из рассмотрения энергию излучения, то можно утверждать, что пылевая плазма представляет собой электрические заряды, электрические токи и электромагнитные поля. Кроме того, плазма в момент образования (заполнения некоторого сосуда множеством заряженных частиц) получает некоторую энергию. Эта энергия может быть только электромагнитной энергией и кинетической энергией частиц, поскольку механическое взаимодействие частиц отсутствует: они заряжены одноименными зарядами. Итак, пылевая плазма должна удовлетворять следующим условиям:

- удовлетворять уравнениям Максвелла,
- сохранять суммарную энергию, как сумму электромагнитной энергии и кинетической энергии частиц,

- приобрести через некоторое время стабильную структуру расположения и движения частиц; это следует, например, из упомянутых экспериментов в космосе – см. рис. 1.

Очевидно, заряженные частицы отталкиваются силами Кулона. Однако эксперименты показывают, что эти силы не действуют на периферии облака частиц. Следовательно, они компенсируются другими силами. Ниже будет показано, что этими силами являются силы Лоренца, возникающие при движении заряженных частиц (хотя на первый взгляд кажется странным, что эти силы направлены внутрь облака, противодействуя силам Кулона). Частицы не могут быть неподвижными, поскольку тогда будут превалировать силы Кулона. Но тогда эти силы приведут частицы в движение, благодаря которому возникнут силы Лоренца и т.д.

Ниже в математической модели мы не будем учитывать силы Кулона, полагая, что их роль сводится только к тому, чтобы изолировать частицы друг от друга (подобно тому, как эти силы не учитываются в задачах электротехники).

Итак, мы будем рассматривать пылевую плазму как область, где текут электроток и анализировать ее с помощью уравнений Максвелла. Поскольку частицы находятся в вакууме и всегда изолированы друг от друга, то отсутствует омическое сопротивление и отсутствует электрическая напряженность, пропорциональная току – ее не надо учитывать в уравнениях Максвелла. Кроме того, на первом этапе мы будем полагать, что токи изменяются медленно – являются постоянными токами. С учетом этих замечаний уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot}(H) - J = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(J) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0, \quad (3)$$

где J , H - ток и магнитная напряженность соответственно. Кроме того, к этим уравнениям необходимо добавить уравнение, связывающее энергию W плазмы с J , H

$$W = f(J, H). \quad (4)$$

В этом уравнении энергия W является известной, поскольку плазма в момент образования получает эту энергию.

В скалярном виде система уравнений (1-4) является системой 6-ти уравнений с 6-ю неизвестными и должна иметь единственное решение. Однако регулярный алгоритм решения такой системы отсутствует. Поэтому ниже предлагается другой подход:

1. Поиск аналитических решений недоопределенной системы уравнений (1-3) при данной форме облака плазмы. Таких решений может быть множество.
2. Вычисление энергии W по (4). Если решение системы (1-4) является единственным, то тем самым решена система (1-4) при данных W и форме облака.

2. Система уравнений

В цилиндрических координатах r, φ, z , как известно [6],

дивергенция и ротор вектора H имеют соответственно вид

$$\operatorname{div}(H) = \left(\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right), \quad (a)$$

$$\operatorname{rot}_r(H) = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right), \quad (b)$$

$$\operatorname{rot}_\varphi(H) = \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (c)$$

$$\operatorname{rot}_z(H) = \left(\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right). \quad (d)$$

С учетом уравнений (a-d) перепишем уравнения (1.1-1.3) в следующем виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Система 5-ти уравнений (1-5) относительно 6-ти неизвестных $(H_r, H_\varphi, H_z, J_r, J_\varphi, J_z)$ является переопределенной и может иметь множество решений. Ниже показывается, что такие решения существуют и для различных случаев определяются некоторые из возможных решений.

Будем вначале искать решение этой системы уравнений (1-5) в виде функций, сепарабельных относительно координат. Эти функции имеют следующий вид:

$$H_r = h_r(r) \cdot \cos(\chi z), \quad (6)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (7)$$

$$H_z = h_z(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (8)$$

$$J_r = j_r(r) \cdot \cos(\chi z), \quad (9)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (10)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin(\chi z), \quad (11)$$

где χ – некоторая константа, а $h_r(r)$, $h_\varphi(r)$, $h_z(r)$, $j_r(r)$, $j_\varphi(r)$, $j_z(r)$ – функции от координаты r ; производные этих функций будем обозначать штрихами.

Подставляя (6-11) в (1-5), получаем:

$$\frac{h_r}{r} + h_r' + \chi h_z = 0, \quad (12)$$

$$-\chi h_\varphi = j_r, \quad (13)$$

$$-\chi h_r - h_z' = j_\varphi \quad (14)$$

$$\frac{h_\varphi}{r} + h_\varphi' = j_z, \quad (15)$$

$$\frac{j_r}{r} + j_r' + \chi j_z = 0. \quad (16)$$

Подставим (13) и (15) в (16). Тогда получим:

$$\frac{-\chi h_\varphi}{r} - \chi h_\varphi' + \chi \left(\frac{h_\varphi}{r} + h_\varphi' \right) = 0. \quad (17)$$

Выражение (17) является тождеством $0=0$. Поэтому (16) следует из (13, 15) и может быть исключено из системы уравнений (12-16). Оставшиеся уравнения перепишем в виде:

$$h_z = -\frac{1}{\chi} \left(\frac{h_r}{r} + h_r' \right), \quad (18)$$

$$j_z = \frac{h_\varphi}{r} + h_\varphi', \quad (19)$$

$$j_r = -\chi h_\varphi, \quad (20)$$

$$j_\varphi = -\chi h_r - h_z' \quad (21)$$

3. Первая математическая модель

В этой системе 4-х дифференциальных уравнений (18-21) с 6-ю неизвестными функциями можно произвольным образом определить две функции. Для дальнейшего мы определим следующие две функции:

$$h_\varphi = q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi), \quad (22)$$

$$h_r = h \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi), \quad (23)$$

где q , h - некоторые константы. Тогда из (18-23) найдем:

$$h_z = -\frac{h}{\chi} \left(2 \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{\pi \cdot r}{\chi} \cos(\pi \cdot r / \chi) \right), \quad (24)$$

$$j_z = q \left(2 \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{\pi \cdot r}{\chi} \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi) \right), \quad (25)$$

$$j_r = -\chi \cdot q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi) \quad (26)$$

$$j_\varphi = h \cdot \left(\frac{\pi^2}{\chi R^2} - \chi \right) \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi) + \frac{h}{\chi} \left(2 - \frac{\pi}{\chi} \right) \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi). \quad (27)$$

Таким образом, функции $j_r(r)$, $j_\varphi(r)$, $j_z(r)$, $h_r(r)$, $h_\varphi(r)$, $h_z(r)$ определяются по (26, 27, 25, 23, 22, 24) соответственно.

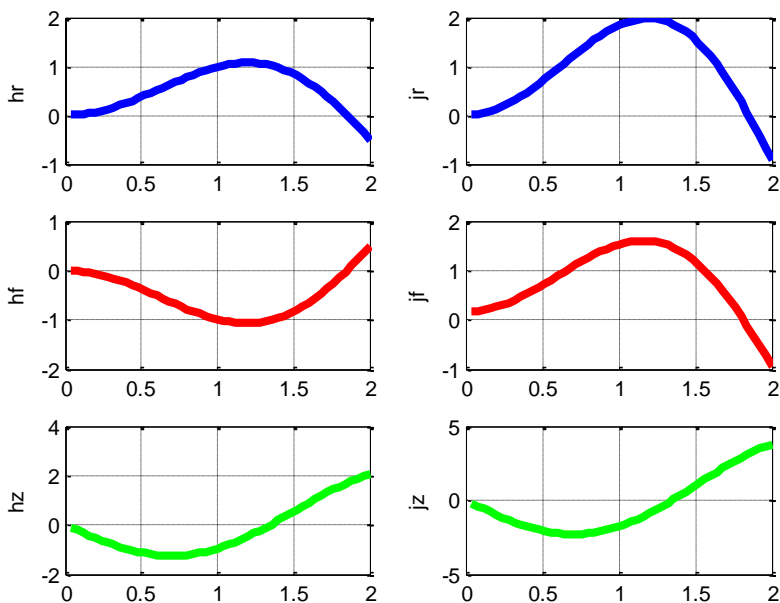


FIG. 2 (figPlazma.m)

Пример 1.

На рис. 2 показаны графики функций $j_r(r)$, $j_\varphi(r)$, $j_z(r)$, $h_r(r)$, $h_\varphi(r)$, $h_z(r)$. Эти функции вычисляются при данных $\chi = 1.85$, $h = 1$, $q = -1$. В первой колонке показаны функции $h_r(r)$, $h_\varphi(r)$, $h_z(r)$, во второй колонке показаны функции $j_r(r)$, $j_\varphi(r)$, $j_z(r)$.

Здесь важно отметить, что на графике функций $j_r(r)$, $j_\varphi(r)$ существует точка, где $j_r(r) = 0$ и $j_\varphi(r) = 0$. Физически это означает, что в области $r < \chi$ существуют радиальные токи $J_r(r)$, направленные от центра (при $\chi q < 0$). В точке $r = \chi$ токи $J_r(r)$, $J_\varphi(r)$ отсутствуют. Поэтому величина $R = \chi$ является радиусом кристалла. Пылинки, попавшие за пределы этого радиуса, испытывают радиальные токи $J_r(r)$, направленные к центру. Тем самым создается устойчивая граница кристалла.

Построенная модель описывает цилиндрический кристалл бесконечной длины, что, конечно же, не соответствует реальности. Рассмотрим теперь более сложную модель.

4. Вторая математическая модель

Корень уравнения $j_r(r) = 0$ определял величину $R = \chi$ радиуса цилиндрического кристалла. Будем теперь изменять величину χ . Если величина χ будет зависеть от z , то и радиус R будет зависеть от z . Но именно такая зависимость наблюдается в экспериментах – см., например, первый фрагмент на рис. 1.

Имея это в виду рассмотрим математическую модель, отличающуюся от использованной выше, тем, что вместо константы χ используется функция $\chi(z)$. Перепишем (6-11) с учетом этого:

$$H_r = h_r(r) \cdot \cos(\chi(z)), \quad (28)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (29)$$

$$H_z = h_z(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (30)$$

$$J_r = j_r(r) \cdot \cos(\chi(z)), \quad (31)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r) \cdot \sin(\chi(z)), \quad (32)$$

$$J_z = j_z(r) \cdot \sin(\chi(z)). \quad (33)$$

Система уравнений (1-6) отличается от системы (2.9-2.14) только тем, что вместо константы χ используется производная $\chi'(z)$ по z от функции $\chi(z)$. Следовательно, и решение системы (28-33) будет отличаться от решения системы от предыдущего только тем, что вместо константы χ используется производная $\chi'(z)$. Таким образом, решение в этом случае примет следующий вид:

$$j_r = -\chi'(z) \cdot q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (34)$$

$$j_\varphi = \left[\begin{aligned} &h \cdot \left(\frac{\pi^2}{\chi'(z)R^2} - \chi'(z) \right) \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \\ &+ \frac{h}{\chi'(z)} \left(2 - \frac{\pi}{\chi'(z)} \right) \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \end{aligned} \right], \quad (35)$$

$$j_z = q \left(2 \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \frac{\pi \cdot r}{R} \cdot \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \right), \quad (36)$$

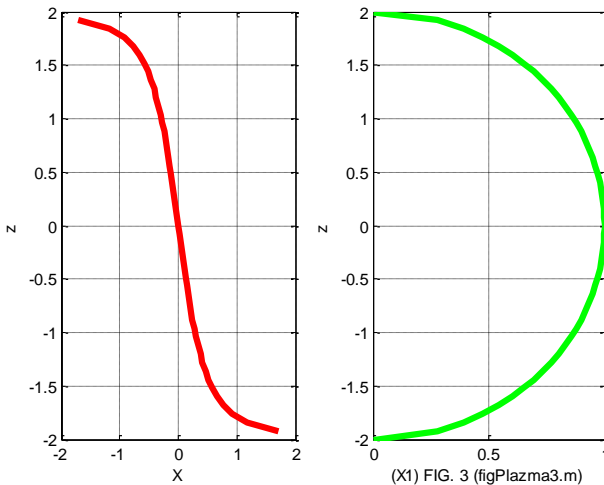
$$h_r = h \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (37)$$

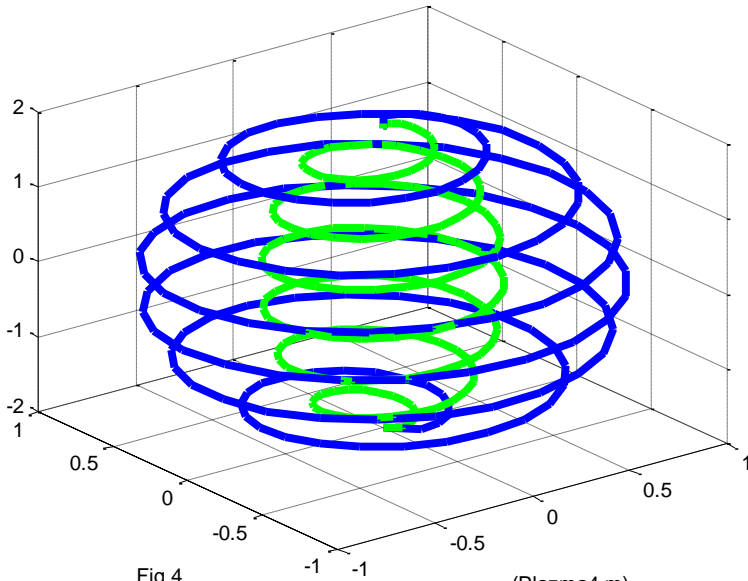
$$h_\varphi = q \cdot r \cdot \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)), \quad (38)$$

$$h_z = -\frac{h}{\chi'(z)} \left(2 \sin(\pi \cdot r / \chi'(z)) + \frac{\pi \cdot r}{R} \cos(\pi \cdot r / \chi'(z)) \right). \quad (39)$$

Указанные функции будут зависеть от $\chi'(z)$. При $\chi(z) = \eta z$ уравнения (34-39) превращаются в уравнения (22-27).

Например, на рис. 3 показаны функции $\chi(z)$ и $\chi'(z)$, где $\chi'(z)$ - уравнение эллипса.





Можно полагать, что ток пылинок таков, что их средняя скорость не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный пылинкой в единицу времени по окружности, и путь, пройденный ею по вертикали, будут равны. Следовательно, в этом случае при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$\Delta\varphi \equiv \Delta z. \quad (40)$$

В рассмотренной выше системе траектория пылинок описывается формулами

$$co = \cos(\chi(z)), \quad (41)$$

$$si = \sin(\chi(z)). \quad (42)$$

Таким образом, в такой системе на фигуре вращения радиусом $r = \chi'(z)$ существует траектория точки, описываемая формулами (40-42). Такая траектория является винтовой линией. На этой траектории все напряженности и плотности токов не зависят от φ .

На основе этого предположения можно построить траекторию движения пылинок в соответствии с функциями (1-3). На рис. 4 показаны две винтовые, описываемые функциями $j_r(r)$ и $j_z(r)$ тока: при $r_1 = \chi'(z)$ при $r_2 = 0.5\chi'(z)$, где $\chi'(z)$ определена на рис. 3.

5. Энергия плазменного кристалла

При известных магнитных напряженностях и плотностях тока можно найти энергию плазменного кристалла. Плотность энергии магнитного поля

$$W_H = \frac{\mu}{2} (H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2). \quad (43)$$

Плотность кинетической энергии пылинок W_J найдем в предположении, что все пылинки имеют одинаковую массу m . Тогда

$$W_J = \frac{1}{m} (J_\varphi^2 + J_\varphi^2 + J_\varphi^2). \quad (44)$$

Для определения полной энергии кристалла необходимо проинтегрировать (43, 44) по объему кристалла, форма которого определена. Таким образом, при определенной форме кристалла и принятой математической модели могут быть найдены все характеристики кристалла.

Литература

1. В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. Пылевая плазма, УФН, 2004, май, <http://ufn.ru/ru/articles/2004/5/b/>
 2. Пылевая_плазма, https://ru.wikipedia.org/wiki/Пылевая_плазма
 3. Эксперимент с плазмой в космосе <https://www.youtube.com/watch?v=SI406HKLYkM>
 4. V.N. Tsytovich, G.E. Morfill, V.E. Fortov, N.G. Gusein-Zade, B.A. Klumov and S.V. Vladimirov. From plasma crystals and helical structures towards inorganic living matter. New Journal of Physics, Volume 9, August 2007, <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/9/8/263/meta>
 5. Пылевая плазма намекает на молекулу жизни, <http://www.membrana.ru/particle/693>.
 6. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
-