

# Equation for the Abraham force in a nonconducting medium and methods for measuring it

Yurii A. Spirichev

*Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering - branch of Federal State Unitary Enterprise of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after Michael V. Protsenko"*

E-mail: [yurii.spirichev@mail.ru](mailto:yurii.spirichev@mail.ru)

## Abstract

The paper is devoted to obtaining an equation for the Abraham force in a continuous non-conducting medium and methods of its measurement. The equation for the Abraham force is obtained from the Minkowski tensor. The Abraham force occurs when the vectors  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  and  $\mathbf{B}$  are noncollinear. From the equation for the Abraham force it follows that it is a vortex force, and its divergence is zero. It is shown that there exist the Abraham electric force and the magnetic Abraham's Force. Various methods for measuring the Abraham force, which follow from its equation, are given.

## Уравнение для силы Абрагама в непроводящей среде и способы ее измерения

Юрий А. Спиричев

*Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»*

E-mail: [yurii.spirichev@mail.ru](mailto:yurii.spirichev@mail.ru)

Статья посвящена получению уравнения для силы Абрагама в сплошной непроводящей среде и способам ее измерения. Уравнение для силы Абрагама получено из тензора Минковского. Сила Абрагама возникает, когда векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  являются неколлинеарными. Из уравнения для силы Абрагама следует, что она является вихревой силой, и ее дивергенция равна нулю. Показано, что существуют электрическая сила Абрагама и магнитная сила Абрагама. Приведены различные способы измерения силы Абрагама, вытекающие из ее уравнения.

## Содержание

1. Введение
2. Тензор энергии-импульса Минковского и его разложение
3. Уравнение для силы Абрагама в непроводящей среде

#### 4. Способы измерения силы Абрагама в непроводящей среде

#### 5. Заключение

#### Список литературы

##### 1 Введение

Проблема взаимодействия электромагнитного поля с веществом и возникающих при этом сил, обсуждается уже много лет, но до настоящего времени однозначного мнения по этой проблеме нет. В последние годы ведутся работы по созданию метаматериалов с уникальными электромагнитными свойствами, поэтому вопросы взаимодействия электромагнитного поля с веществом приобрели особую актуальность. Много дискуссий вызывают объемные электромагнитные силы, особенно сила Абрагама. Объемные электромагнитные силы взаимодействия электромагнитного поля с веществом определяются электромагнитным импульсом в среде. В общем виде силу Абрагама  $\mathbf{F}_A$  записывают в виде разности выражений для производных по времени электромагнитного импульса в формах Минковского и Абрагама  $\mathbf{F}_A = \partial_t \mathbf{g}^M - \partial_t \mathbf{g}^A$ , где  $\mathbf{g}^M = (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) / 4\pi \cdot c$  - электромагнитный импульс в форме Минковского,  $\mathbf{g}^A = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / 4\pi \cdot c$  - электромагнитный импульс в форме Абрагама,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , - векторы электрической и магнитной индукции, а  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  - напряженности электрического и магнитного поля. Проблеме объемных электромагнитных сил и силе Абрагама посвящено много работ, как теоретических, так и экспериментальных [1-35]. Считается, что сила Абрагама измерена, но есть работы, подвергающие сомнению результаты экспериментов. Более того, существуют работы, ставящие под сомнение и само существование силы Абрагама в природе. Таким образом, мнения о силе Абрагама разнообразны и единого мнения о ней нет. Причиной неудовлетворительно состояния этого вопроса является отсутствие правильного уравнения для силы Абрагама, что приводит к разным мнениям и дискуссиям по этому вопросу, а также к некорректности экспериментальных работ по ее обнаружению.

Настоящая статья посвящена решению проблемы силы Абрагама и получению ее уравнения из тензора энергии-импульса Минковского, а также способам ее измерения.

##### 2. Тензор энергии-импульса Минковского и его разложение

Канонический тензор энергии-импульса запишем в общем виде:

$$T_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic \cdot \mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \quad (\nu, \mu=0, 1, 2, 3; i, k=1, 2, 3) \quad (1)$$

где  $W$  – плотность энергии;

$\mathbf{S}$  – плотность потока энергии (вектор Пойнтинга);

$\mathbf{g}$  – плотность импульса;

$t_{ik}$  – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Компоненты тензора энергии-импульса (1) в форме Минковского имеют вид [6]:

$$W = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) / 8\pi \quad \mathbf{S} = c \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / 4\pi$$

$$\mathbf{g}^M = (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) / 4\pi \cdot c \quad t_{ik}^M = (E_i D_k + H_i B_k) / 4\pi - \delta_{ik} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) / 8\pi$$

Тензор Минковского является несимметричным и его можно разложить на антисимметричный и симметричный тензоры энергии-импульса:

$$T_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \cdot T_{[\nu\mu]} + \frac{1}{2} \cdot T_{(\nu\mu)} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i\frac{1}{c}\mathbf{S} - ic \cdot \mathbf{g} \\ -i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic \cdot \mathbf{g} & t_{ik} - t_{ki} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic \cdot \mathbf{g} \\ i\frac{1}{c}\mathbf{S} + ic \cdot \mathbf{g} & t_{ik} + t_{ki} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Антисимметричный тензор энергии-импульса  $T_{[\nu\mu]}$  описывает энергию четырехмерного вращения среды, а симметричный тензор  $T_{(\nu\mu)}$  энергию четырехмерной деформации среды под воздействием электромагнитного поля.

### 3. Уравнение для силы Абрагама в непроводящей среде

Взяв четырехмерные дивергенции тензоров (2), получим уравнения сохранения энергии и импульса для четырехмерного вращения среды и деформации среды под воздействием электромагнитного поля.

Из антисимметричного тензора энергии-импульса  $T_{[\nu\mu]}$  следуют уравнения сохранения энергии и электромагнитного импульса для четырехмерного вращения среды:

$$\nabla \cdot (\mathbf{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathbf{S}) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot (\mathbf{g}^M - \mathbf{g}^A) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_i (\mathbf{g}^M - \frac{1}{c^2} \mathbf{S}) - \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H}) = 0 \quad \text{или} \quad \partial_i \mathbf{g}^M - \partial_i \mathbf{g}^A = \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H}) \quad (4)$$

Возьмем производную по времени уравнения (3) и получим уравнение:

$$\nabla \cdot (\partial_i \mathbf{g}^M - \partial_i \mathbf{g}^A) = 0 \quad \text{или} \quad \nabla \cdot \mathbf{F}_A = 0 \quad (5)$$

Выражение в скобках представляет собой силу Абрагама. Из этого уравнения следует, что дивергенция силы Абрагама равна нулю, т.е. эта сила имеет вихревой характер.

Уравнение (4) является уравнением для силы Абрагама:

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H}) \quad (6)$$

Уравнение (6) подтверждает вывод, сделанный из уравнения (5) о том, что дивергенция силы Абрагама равна нулю так как она имеет вихревой характер. Из уравнения (6) следует, что сила Абрагама возникает, когда векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  являются неколлинеарными. Из уравнения (6) видно, что сила Абрагама состоит из двух вихревых частей электрической и магнитной. Таким образом, можно различать электрическую силу Абрагама  $\mathbf{F}_A^E$  и магнитную силу Абрагама  $\mathbf{F}_A^M$ :

$$\mathbf{F}_A^E = \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{D}) \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_A^M = \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{H}) \quad (7)$$

Это различие представляет интерес при постановке экспериментов по измерению силы Абрагама. В зависимости от электромагнитных характеристик среды электрическая или магнитная часть силы Абрагама может отсутствовать. В уравнении (6) для силы Абрагама не налагается никаких ограничений на материальные уравнения, и оно является универсальным для любой непроводящей сплошной среды. Из уравнения (6) следует вывод, что если непроводящая среда описывается каноническими материальными уравнениями вида  $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu \cdot \mu_0$ , а относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды  $\varepsilon$  и  $\mu$  являются постоянными или скалярными функциями, то векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  являются коллинеарными и сила Абрагама равна нулю.

Из симметричного тензора  $T_{(\nu\mu)}$  следуют уравнения сохранения электромагнитной энергии и импульса четырехмерной деформации среды под воздействием электромагнитного поля:

$$2 \frac{1}{c^2} \partial_t W - \nabla \cdot (\mathbf{g} + \frac{1}{c^2} \mathbf{S}) = 0 \quad \text{и} \quad \partial_t (\mathbf{g} + \frac{1}{c^2} \mathbf{S}) - \partial_i (t_{ik} + t_{ki}) = 0$$

В данной работе эти уравнения не рассматриваются.

#### 4. Способы измерения силы Абрагама в непроводящей среде

Из уравнения (6) следует, что для постановки экспериментов по измерению силы Абрагама необходимо выбирать среду у которой электромагнитные характеристики обеспечивают поворот векторов поля и индукции относительно друг друга. При этом, максимальная величина силы Абрагама обеспечивается при повороте векторов поля и индукции относительно друг друга на угол  $\pi/2$ . Поскольку вектор момента импульса, создаваемый вихревой силой Абрагама направлен по вектору электромагнитного импульса, то векторы возбуждающего электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$  должны быть ортогональны между собой и оси крутильного маятника измерительной системы.

Из уравнений (6) и (7) следуют различные способы измерения силы Абрагама. Эти способы можно разделить по виду ее возбуждения в среде электромагнитным полем:

- а) электрическое поле  $\mathbf{E}$  является переменным, а магнитная индукция  $\mathbf{B}$  является постоянной;
- б) магнитная индукция  $\mathbf{B}$  является переменной, а электрическое поле  $\mathbf{E}$  является постоянным;
- в) переменными являются электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитная индукция  $\mathbf{B}$ .

Способы измерения также можно разделить по виду электромагнитных характеристик непроводящей среды:

- a) электромагнитные характеристики среды обеспечивают поворот только вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  относительно вектора электрического поля  $\mathbf{E}$ ;
- b) электромагнитные характеристики среды обеспечивают поворот только вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  относительно вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ ;
- c) электромагнитные характеристики среды обеспечивают поворот вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  относительно вектора электрического поля  $\mathbf{E}$  и поворот вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  относительно вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

Конкретный способ измерения силы Абрагама определяется выбранной комбинацией вида возбуждения среды и вида электромагнитных характеристик непроводящей среды. Переменное электромагнитное поле, применяемое для возбуждения силы Абрагама должно подаваться с частотой механического резонанса измерительной системы. При использовании способа измерения с одновременным использованием электрических и магнитных характеристик среды (способ c) необходимо выбирать среду с поворотом векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  в одном направлении.

Оптический способ измерения силы Абрагама основан на использовании лазерного излучения, которое вводится со стороны торца в оптически прозрачный цилиндрический стержень вдоль его оси. Цилиндрический стержень подвешен в вертикальном положении в виде крутильного маятника. Стержень выполнен из материала, обеспечивающего поворот векторов поля и индукции относительно друг друга на некоторый угол. При включении лазерного излучения на цилиндрический стержень будет действовать закручивающая его сила Абрагама. Для усиления эффекта лазерный импульс подается с частотой механического резонанса подвешенного стержня.

## 5 Заключение

Из тензора энергии-импульса Минковского следует уравнение для силы Абрагама, возникающей в сплошной непроводящей среде при воздействии на нее переменным электромагнитным полем. Сила Абрагама возникает, когда векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  являются неколлинеарными. Из уравнения для силы Абрагама следует, что она является вихревой силой, и ее дивергенция равна нулю. Из этого уравнения также следует, что существуют электрическая сила Абрагама и магнитная сила Абрагама.

Приведены различные способы измерения силы Абрагама, вытекающие из ее уравнения.

## Список литературы

1. Скобельцын Д В *УФН* **110** 253 (1973); Skobel'tsyn D V *Sov. Phys. Usp.* **16** 381 (1973)
2. Гинзбург В Л *УФН* **110** 309 (1973); Ginzburg V L *Sov. Phys. Usp.* **16** 434 (1973)
3. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976); Ginzburg V L, Ugarov V A *Sov. Phys. Usp.* **19** 94 (1976)]
4. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009); Veselago V G *Phys. Usp.* **52** 649 (2009)
5. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **179** 995 (2009); Makarov V P, Rukhadze A A *Phys. Usp.* **52** 937 (2009)
6. Веселаго В Г, Щавлев В В *УФН* **180** 331 (2010); Veselago V G, Shchavlev V V *Phys. Usp.* **53** 317 (2010)
7. Давидович М В *УФН* **180** 623 (2010); Davidovich M V *Phys. Usp.* **53** 595 (2010)
8. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **181** 1357 (2011); Makarov V P, Rukhadze AA *Phys. Usp.* **54** 1285 (2011)
9. Веселаго В Г *УФН* **181** 1201 (2011); Veselago V G *Phys. Usp.* **54** 1161 (2011)
10. Топтыгин И Н, Левина К *УФН* **186** 146 (2016); Toptygin I N, Levina K *Phys. Usp.* **59** 141 (2016)
11. Rodrigo Medina, J Stephany, *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*, arXiv: 170.02109
12. Barnett S., *Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma*, *Phys. Rev. Lett.* 104 (2010) 070401 (4 pages).
13. Nesterenko V V, Nesterenko A V. *Ponderomotive forces in electrodynamics of moving media: The Minkowski and Abraham approaches*, arXiv: 1604.01708
14. Saldanha P.L., *Division of the momentum of electro- magnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts*, *Optics Express* 18 (2010) 2258-2268.
15. Yuri N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive media*, arXiv: 1310.0518v2
16. M. Mansuripur, *Resolution of the Abraham-Minkowski controversy*, *Opt. Comm.* 283 (2010) 1997-2005.
17. Pablo L. Saldanha, J. S. Oliveira Filho, *Hidden momentum and the Abraham-Minkowski debate*, arXiv: 1610.05785v1
18. Massimo Testa, *A Comparison between Abraham and Minkowski Momenta*, *Journal of Modern Physics*, 2016, 7, 320-328
19. Choi H, Park M, Elliott D S, Oh K, *Optomechanical Measurement of the Abraham Force in an Adiabatic Liquid Core Optical Fiber Waveguide*, arXiv: 1501.05225

20. M.E. Crenshaw and T.B. Bahder, *Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in a dielectric*, Opt. Comm. 284 (2011) 2460-2465.
21. Y. N. Obukhov, Ann. Phys.(Berlin) 17,830–851 (2008).
22. Iver Brevik, *Explanation for the transverse radiation force observed on a vertically hanging fiber*, arXiv: 1401.6545
23. M. Mansuripur, Phys. Rev. Lett. 103, 019301 (2009).
24. I. Brevik, Phys. Rev. Lett. 103, 219301 (2009).
25. Joseph J. Bisognano, *Electromagnetic Momentum in a Dielectric: a Back to Basics Analysis of the Minkowski-Abraham Debate*, arXiv: 1701.08683
26. Pablo L. Saldanha, *Division of the Energy and of the Momentum of Electromagnetic Waves in Linear Media into Electromagnetic and Material Parts*, arXiv: 1102.0491
27. V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, J. Math. Phys. 57, 032901 (2016).
28. V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, J. Math. Phys. 57, 092902 (2016).
29. G. B. Walker, D. G. Lahoz and G. Walker, Can. J. Phys. 53, 2577 (1975)
30. G. B. Walker and D. G. Lahoz, Nature (London) 253, 339 (1975)
31. I. Brevik, *Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor*, Phys. Rep. 52, 133 (1979), Sec. 1. 2.
32. I. Brevik and S. E. Ellingsen, *Detection of the Abraham force with a succession of short optical pulses*, Phys. Rev. A 86, 025801 (2012).
33. I. Brevik, *Comment on ‘Observation of a push force on the end face of a nanometer silica filament exerted by outgoing light’*, Phys. Rev. Lett. 103, 219301 (2009).
34. I. Brevik and S. E. Ellingsen, *Transverse radiation force in a tailored optical fiber*, Phys. Rev. A (R) 81, 011806 (2010)
35. Tomras Ramos, Guillermo F. Rubilar and Yuri N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive media*, arXiv: 1310.0518v2