

# **A new form of the antisymmetric tensor of the electromagnetic field and its consequences**

Yurii A. Spirichev

Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering - branch of Federal State Unitary  
Enterprise of Federal Scientific-Production Center "Production Association "Start" named after  
Michael V. Protsenko"

E-mail: [yurii.spirichev@mail.ru](mailto:yurii.spirichev@mail.ru)

## **Abstract**

A new form of the equivalent representation of the canonical antisymmetric tensor of the electromagnetic field is described. This form of representation is based on the decomposition of an asymmetric tensor of a general form into a symmetric and antisymmetric part. It follows from this expansion that the canonical antisymmetric tensor of the electromagnetic field can be equivalently represented as the difference between an asymmetric tensor of general form and a symmetric tensor. Then Maxwell's equations can be written in the form of four-dimensional divergences of these tensors. From this representation, in addition to the Maxwell equations, new equations of the electromagnetic field also follow, expanding knowledge of it. One of these equations is the equation of motion of the electromagnetic field in the form of the dynamic Navier-Stokes equation.

## **Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля и ее следствия**

Ю.А. Спиричев

*Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал  
федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-  
производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»*

E-mail: [yurii.spirichev@mail.ru](mailto:yurii.spirichev@mail.ru)

Описана новая форма эквивалентного представления канонического антисимметричного тензора электромагнитного поля. Эта форма представления основана на разложении

несимметричного тензора общего вида на симметричную и антисимметричную части. Из этого разложения следует, что канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля можно эквивалентно представить в виде разности несимметричного тензора общего вида и симметричного тензора. Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде четырехмерных дивергенций этих тензоров. Из этого представления кроме уравнений Максвелла следуют и новые уравнения электромагнитного поля, расширяющие знания о нем. Одним из таких уравнений является уравнение движения электромагнитного поля в форме динамического уравнения Навье – Стокса.

## **Содержание**

### **1. Введение.**

### **2. Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля**

### **3. Новые уравнения электромагнитного поля**

### **4. Заключение.**

## **Список литературы**

### **1. Введение**

Современная электродинамика основана на каноническом представлении антисимметричного тензора электромагнитного поля в форме  $F_{[\nu\mu]} = \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$ , где  $\mathbf{A}_\mu$  – четырехмерный электромагнитный потенциал, а  $\partial_\nu$  – оператор четырехмерного дифференцирования [1]. Однако, канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля  $F_{[\nu\mu]}$  имеет и другую форму эквивалентного представления. В соответствии с правилами тензорной алгебры несимметричный тензор второго ранга  $F_{\nu\mu}$  можно однозначно разложить на антисимметричный и симметричный тензоры  $F_{\nu\mu} = F_{(\nu\mu)}/2 + F_{[\nu\mu]}/2$ . Тогда антисимметричный тензор  $F_{[\nu\mu]}$  электромагнитного поля можно однозначно и эквивалентно записать в виде разности тензоров  $F_{[\nu\mu]} = 2F_{\nu\mu} - F_{(\nu\mu)}$ , где  $F_{(\nu\mu)}$  – симметричный тензор. Уравнения Максвелла следуют из антисимметричного тензора  $F_{[\nu\mu]}$  электромагнитного поля в виде его четырехмерной дивергенции. Из новой формы представления тензора  $F_{[\nu\mu]}$  следует, что уравнения Максвелла можно эквивалентно записать в виде разности уравнений, являющихся четырехмерными дивергенциями тензоров  $F_{\nu\mu}$  и  $F_{(\nu\mu)}$ . Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля имеет и новые следствия, расширяющие знания об электромагнитном поле.

Целью настоящей статьи является получение и описание следствий из новой формы  $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$  антисимметричного тензора электромагнитного поля.

## 2 Новая форма антисимметричного тензора электромагнитного поля

Электромагнитный потенциал будем записывать в виде  $\mathbf{A}_\mu$  ( $\varphi/c$ ,  $i\mathbf{A}$ ), где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Канонический антисимметричный тензор  $F_{[\nu\mu]}$  электромагнитного поля запишем в матричном представлении:

$$F_{[\nu\mu]} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_x + \partial_x \varphi) & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_y + \partial_y \varphi) & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_z + \partial_z \varphi) \\ -\frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_x + \partial_x \varphi) & 0 & (\partial_x A_y - \partial_y A_x) & (\partial_x A_z - \partial_z A_x) \\ -\frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_y + \partial_y \varphi) & -(\partial_x A_y - \partial_y A_x) & 0 & (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \\ -\frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_z + \partial_z \varphi) & -(\partial_x A_z - \partial_z A_x) & -(\partial_y A_z - \partial_z A_y) & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Из тензорной алгебры следует, что несимметричный тензор второго ранга можно разложить на симметричную и антисимметричную части  $F_{\nu\mu}=(\partial_\nu A_\mu+\partial_\mu A_\nu)/2+(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu)/2$ .

Используя это разложения и тензор (1) запишем симметричный тензор  $F_{(\nu\mu)}$ :

$$F_{(\nu\mu)} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t \varphi & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_x - \partial_x \varphi) & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_y - \partial_y \varphi) & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_z - \partial_z \varphi) \\ \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_x - \partial_x \varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_y - \partial_y \varphi) & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_z - \partial_z \varphi) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда несимметричный тензор  $F_{\nu\mu}$  получим сложением тензоров (1) и (2):

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi & \frac{1}{c}i \cdot \partial_t A_x & \frac{1}{c}i \cdot \partial_t A_y & \frac{1}{c}i \cdot \partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i \cdot \partial_x \varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i \cdot \partial_y \varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i \cdot \partial_z \varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Теперь, используя выражение  $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$  запишем новое представление канонического антисимметричного тензора электромагнитного поля  $F_{[\nu\mu]}$  в виде:

$$F_{[\nu\mu]} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi & \frac{1}{c}i \cdot \partial_t A_x & \frac{1}{c}i \cdot \partial_t A_y & \frac{1}{c}i \cdot \partial_t A_z \\ -\frac{1}{c}i \cdot \partial_x \varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c}i \cdot \partial_y \varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c}i \cdot \partial_z \varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t \varphi & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_x - \partial_x \varphi) & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_y - \partial_y \varphi) & \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_z - \partial_z \varphi) \\ \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_x - \partial_x \varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_y - \partial_y \varphi) & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i \cdot (\partial_t A_z - \partial_z \varphi) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix}$$

### 3. Новые уравнения электромагнитного поля

Уравнения Максвелла следуют из антисимметричного тензора в виде его четырехмерной дивергенции. При отсутствии источников  $\partial_\nu F_{[\nu\mu]}=0$  (здесь ковариантные и контравариантные индексы можно не различать). Запишем новое представление уравнений Максвелла в форме четырехмерной дивергенции:

$$\partial_\nu F_{[\nu\mu]} = 2\partial_\nu F_{\nu\mu} - \partial_\nu F_{(\nu\mu)} = 0 \quad (4)$$

Это уравнение можно записать в развернутом виде:

$$2\left(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi\right) - \left(2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t\nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi\right) = \nabla\cdot(-\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}) = \nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}A - \Delta A\right) - \left(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}A - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot A) - \Delta A\right) = \\ & = \frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t A + \nabla\varphi) + \nabla\times\nabla\times A = -\frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E} + \nabla\times\mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

или окончательно получим уравнения Максвелла  $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$  и  $\partial_t\mathbf{E}/c^2 = \nabla\times\mathbf{B}$ , где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , соответственно напряженность электрического поля и индукция магнитного поля.

Для тензора второго ранга существуют дивергенции по каждому из индексов. Уравнение (4) является дивергенцией по индексу  $\nu$ . Найдем дивергенцию антисимметричного тензора  $F_{[\nu\mu]}$  по индексу  $\mu$ :

$$\partial_\mu F_{[\nu\mu]} = 2\partial_\mu F_{\nu\mu} - \partial_\mu F_{(\nu\mu)} = 0 \quad (7)$$

Очевидно, что в силу антисимметричности тензора  $F_{[\nu\mu]}$  должны получить результат, что и в предыдущем случае, но с противоположным знаком. Уравнение (8) можно записать в развернутом виде:

$$2\partial_t\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \left(2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t\nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi\right) = -\nabla\cdot(-\nabla\varphi - \partial_t\mathbf{A}) = -\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & 2\left(-\nabla\left(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \left(\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}\right)\right) = \\ & = \frac{1}{c^2}\partial_t(-\partial_t\mathbf{A} - \nabla\varphi) - \nabla\times\nabla\times\partial_t\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{E} - \nabla\times\mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

или окончательно также получим уравнения Максвелла  $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$  и  $\partial_t\mathbf{E}/c^2 = \nabla\times\mathbf{B}$ . Уравнения (5) и (6) отличаются от уравнений (8) и (9). Это вызвано тем, что дивергенции несимметричного тензора (3) по разным индексам различны. Найдем дивергенции этого тензора из уравнений (4) и (7):

$$\partial_\nu F_{\nu\mu} = \partial_\nu F_{[\nu\mu]}/2 + \partial_\nu F_{(\nu\mu)}/2 = 0 \quad \text{и} \quad \partial_\mu F_{\nu\mu} = \partial_\mu F_{[\nu\mu]}/2 + \partial_\mu F_{(\nu\mu)}/2 = 0$$

Эти уравнения можно записать в развернутом виде:

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi - \Delta \varphi = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = 0 \quad (11)$$

$$\partial_t \left( \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 0 \quad (12)$$

$$-\nabla \left( \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 0 \quad (13)$$

Уравнения (10) и (11) являются уравнениями Максвелла в калибровке Лоренца [3], а уравнения (12) и (13) являются четырехмерной производной калибровочного условия Лоренца  $\partial_t \varphi / c^2 + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . В электродинамике уравнения (11) и (12) получают применением этой калибровки. Из несимметричного тензора (3) уравнения Максвелла и это калибровочное условие следуют как уравнения электромагнитного поля, без дополнительных предположений и обоснований. Это говорит о том, что калибровочное условие Лоренца является не просто математическим приемом, а является полноправным уравнением электромагнитного поля и имеет глубокий физический смысл о котором будет сказано далее.

Из уравнения (4) найдем дивергенцию симметричного тензора  $\partial_\nu F_{(\nu\mu)}$ :

$$\partial_\nu F_{(\nu\mu)} = 2\partial_\nu F_{\nu\mu} - \partial_\nu F_{[\nu\mu]} / 2 = 0$$

Запишем ее в развернутом виде:

$$2 \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \varphi = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = 0 \quad (15)$$

Уравнение (15) является электромагнитным аналогом уравнения движения изотропной упругой среды [4] или динамического уравнения движения Навье-Стокса. Здесь это уравнение показывает общность законов движения разных видов материи.

Канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля  $F_{[\nu\mu]}$  представляет собой четырехмерный ротор, т.е. описывает четырехмерное вращение электромагнитного поля. В физике сплошных сред симметричный тензор описывает деформацию среды. Тогда, применительно к электромагнитному полю, симметричный тензор  $F_{(\nu\mu)}$  (2) и следующие из него уравнения (14) и (15) описывают четырехмерную деформацию поля. Таким образом, эти тензоры дополняют друг друга в описании четырехмерного движения электромагнитного поля. Диагональные члены симметричного тензора (2) являются членами калибровочного условия Лоренца. Из этого следует, что это

условие описывает четырехмерную объемную деформацию расширения-сжатия электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла с источниками поля в виде плотности электрических зарядов  $\rho$  и плотности тока  $\mathbf{J}$  записывают в виде [3]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 & \quad \text{или} \quad -\partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \varphi = \rho / \varepsilon_0 \\ \mu_0 \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} & \quad \text{или} \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \\ \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi - \Delta \varphi = \rho / \varepsilon_0 & \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

Тогда уравнения (14) и (15) с источниками поля будут иметь вид:

$$2 \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \varphi = \rho / \varepsilon_0 \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J}$$

Таким образом, уравнения Максвелла (5), (6), (10), (11) образуют с уравнениями (12), (13), (14) и (15) связанную систему и эти уравнения имеют такое же право на существование в электродинамике, как и уравнения Максвелла. Все уравнения этой системы можно записать в двух сжатых эквивалентных вариантах:

$$1) \quad \partial_\nu F_{\nu\mu} = \mathbf{J}_\nu \quad \partial_\mu F_{\nu\mu} = 0 \quad \text{и} \quad 2) \quad \partial_\nu F_{[\nu\mu]} = \mathbf{J}_\nu \quad \partial_\nu F_{(\nu\mu)} = \mathbf{J}_\nu$$

Для перехода от одного варианта к другому достаточно попарно сложить и вычесть уравнения соответствующего варианта. Первый вариант этих уравнений в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi - \Delta \varphi = \rho / \varepsilon_0 & \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \\ \partial_t \left( \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 0 & \quad -\nabla \left( \frac{1}{c^2} \partial_t \varphi + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 0 \end{aligned}$$

Второй вариант этих уравнений в развернутом виде:

$$\begin{aligned} -\partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \varphi = \rho / \varepsilon_0 & \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \\ 2 \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi + \partial_t \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta \varphi = \rho / \varepsilon_0 & \quad \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \varphi - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

В каждый из этих вариантов входят канонические уравнения Максвелла. Какой из этих эквивалентных вариантов выбирать, определяется конкретной задачей исследования. Второй вариант интересен тем, что он кроме вращения электромагнитного поля в явном виде описывает и его деформацию, которая в курсах электродинамики не рассмотрена. Динамическое уравнение Навье – Стокса описывает и волновые движения сплошной среды, следовательно, это относится и к его электромагнитному аналогу (15). Это

очевидно, поскольку применение к нему калибровки Лоренца или уравнения (13), приводит волновому уравнению Максвелла (11).

#### 4 Заключение

Новая форма представления канонического антисимметричного тензора электромагнитного поля в виде  $F_{[\nu\mu]}=2F_{\nu\mu}-F_{(\nu\mu)}$  имеет новые следствия. Из него вытекает, что уравнения Максвелла можно эквивалентно записать в виде разности уравнений, являющихся четырехмерными дивергенциями тензоров  $F_{\nu\mu}$  и  $F_{(\nu\mu)}$ . Из новой формы тензора  $F_{[\nu\mu]}$  следует уравнение движения электромагнитного поля в виде динамического уравнения Навье – Стокса, что показывает единство законов природы. Это представление антисимметричного тензора электромагнитного поля позволяет дать физическую интерпретацию калибровочного условия Лоренца, как описание четырехмерной объемной деформации электромагнитного поля, и равноправно включить это условие в систему уравнений электродинамики.

Таким образом, новая форма представления канонического антисимметричного тензора  $F_{[\nu\mu]}$  и следующие из него уравнения расширяют возможности описания электромагнитного поля и его понимание.

#### Литература

- 1 Рубаков В А *Классические калибровочные поля* (М.: «Эдиториал УРСС», 1999)
- 2 Тоннела М-А *Основы электромагнетизма и теории относительности* (М.: «Издательство иностранной литературы», 1962, с.153)
- 3 Ландау Л Д , Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2003)  
Landau L D, Lifshits E M *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983)
- 4 Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория упругости* (М.: «Наука», 1973);  
Landau L D, Lifshits E M *The Theory of elasticity* (Oxford: Pergamon Press, 1983)