Universitaire wiskunde voor intelligente tieners.

Johan Noldus[1]

March 29, 2018

[1]Johan.Noldus@gmail.com, Relativiteits-groep, departement Wiskunde, Galglaan 2, 9000 Gent.

Contents

1 Wiskunde, een boeiende taal. 4

2 Eerste stappen: verzamelingenleer. 9

3 Geavanceerde getallenstelsels. 17

4 Topologie. 26

5 Simpliciale homologie. 35

6 Lineaire ruimten en operatoren. 43

7 Hilbert ruimten en enkele belangrijke stellingen. 56

8 Meer dimensionale analyse. 76

9 Complexe analyse en hypercomplexe analyse. 84

10 Speciale functies. 94

11 Cohomologie en het de-Rahm isomorfisme. 98

12 Riemannse en Lorentziaanse meetkunde. 100

13 Dispersie van een bundel geodeten en het opblazen of ineenklappen van bollen. 108

14 Gekromde ruimtetijd en het afbuigen en focussen van lichtstralen: een voorproefje van relativiteit. 116

15 Verdere abstractie: oefeningen. 121

16 Nawoord. 127

Een woordje vooraf.

Deze tekst is geschreven naar aanleiding van de leergierigheid van mijn twaalf jaar oude zoon Eliott, die me gevraagd had een goed wiskunde boek te kopen voor hem. Geheel ontevreden met wat ik op de markt vond heb ik maar besloten zelf iets te schrijven waarmee hij verder kan; het moge duidelijk wezen dat ik niet geloof in de betutteling van onze jeugd en dat zij best in staat is hogere wiskunde te assimileren indien het goed uitgelegd en gemotiveerd is. De bedoeling van deze tekst is hun verbeelding aan te wakkeren en te worstelen met de problemen die de beste wiskundigen slapeloze nachten hebben bezorgd. De tekst is doorspekt met originele en hoogwaardige oefeningen die allemaal gemaakt dienen te worden in tegenstelling tot de meer mechanische rekenoefeningen; de lezer moet ten minste intuitief begrijpen waarom de resultaten van de opgaven juist zijn. Dit boek bevat alle wiskunde die je in een A-programma in de middelbare school ziet alsook veruit de meeste topics die je in een master opleiding aan een doorsnee universiteit te verwerken krijgt en dit op een 150-tal bladzijden. De presentatie is geheel origineel en legt de nadruk op conceptueel denken en fantasie en veel minder op het mechanisch maken van oefeningen; de lezer krijgt een diep gevoel voor de problematiek die voor hem ligt alsook een arsenaal aan ideeen om deze te lijf te gaan. De tekst is grosso modo onderverdeeld in een viertal stukken; ten eerste wordt het onderwerp intuitief geintroduceerd waar in een later stadium de formalizering plaatsgrijpt. Vervolgens volgen makkelijke standaardoefeningen gevolgd door moeilijkere uitdagingen die het abstract denkvermogen van de student grondig op de proef stellen. Het uiteindelijke doel is de student familiair te maken met een lage abstractie taal en deze adekwaat te leren beheersen; het is niet zo dat elk bewijs strikt symbolisch neergepend dient te worden wat in onderwerpen zoals topologie gans onhaalbaar is. Een opvolgend boek dat de geinteresseerde lezer introduceert in de fysica en meer metafysisch is wat betreft hoger taalgebruik (zoals de Engelse of Nederlandse taal, Egyptische hyreogliefen uitgesoten) is in conceptie en leidt tot verdere toepassingen in de sociologie, psychologie, rechtsgeleerdheid en dergelijke.

Wat de wiskunde onderscheidt van een andere taal is haar waarheidsbegrip dat gebaseerd is op complete kennis in tegenstelling tot wat we dagelijks ervaren. In onze wereld hebben we onvolledige kennis en kunnen we de toestandsbepaling nooit exact maken wat soms tot verwarring leidt wanneer iets vreemds gebeurt. In hoofdstuk vijftien gaan we hier nader op in wanneer we vage logica ontwikkelen gebaseerd op onvolledige informatie. Men kan uiteraard niet alleen de logica wat meer flexibel maken, ook de taal zelf kan vager worden. Dit is niet een interessante piste om te bewandelen vanuit een wetenschappelijk oogkenmerk vermits het het objectiveringsproces van (vage) waarheid in de weg staat alhoewel politici hier anders over voelen. Van jongsaf aan heb ik geleerd dat een gepaste mix van metafysisch en concreet denken leidt tot een optimale intellectuele ontwikkeling en ik hoop dit gepast te weerspiegelen in dit boek. Het is niet realistisch meer dan gemiddeld vijf pagina's per dag in dit boek te verwerken voor een hoogwaardige student. Dus een minimale verwerkingstijd moet

zeker rond een maand geschat worden en het is mijns inziens zeer geschikt voor een jaarcursus in de eerste of tweede universitaire bachelor.

Chapter 1

Wiskunde, een boeiende taal.

Ieder kind heeft zo zijn eigen woordenschat wat het soms moeilijk maakt dingen tegen elkaar te zeggen. De meest eenvoudige woorden betekenen voor ieder wel iets anders en dat maakt dat we allemaal een eigen interpretatie erop nahouden. Wiskunde is een poging om iets eenduidig te zeggen en zoals zal blijken is dit enorm moeilijk; bijvoorbeeld, wat betekent het dat twee dingen aan elkaar gelijk zijn? Dat is niet zo makkelijk als je wel zou denken vermits er telkens een vergelijkende *operatie* voor nodig is en deze de dingen verandert. Bijvoorbeeld, zijn twee staven goud gelijkvormig? Het transport van de ene op de andere staaf kan de nodige vervormingen met zich meebrengen; het definieren van een universele meetstok kan problematisch zijn wanneer de temperatuur niet uniform is in de kamer. Vermits de wiskunde een eenduidige taal is, is het mogelijk verbanden tussen bepaalde concepten te vinden, deze noemen we stellingen. Deze stellingen zitten diep verborgen in de taal zelf en wij mensen hebben de mogelijkheid deze te ontdekken; het is echter een kunst de concepten op de juiste manier te formuleren zodat de stellingen zo eenvoudig mogelijk bewezen worden of dat de stellingen zelf niet leeg zijn zoals de Riemann hypothese dat is. Indien je een bepaald resultaat wenst te bewijzen en je vindt maar geen logische redenering erachter is de kans groot dat je met de verkeerde concepten werkt. Jongeren hebben daar vaak last van, ze willen vanalles zeggen, maar vinden de juiste woorden niet. Dat is een kwestie van oefening en training en in de loop van dit boek zal het erg duidelijk worden dat er heel veel verschillende manieren bestaan om iets te zeggen; de keuzes die we maken, de zogenaamde axioma's zijn daarom erg varierend en kunnen aanleiding geven tot verschillende soorten wiskunde. Inderdaad, ik maak de lezer erop attent dat heel wat mogelijk is en dat je je verbeelding de vrije loop kan laten; soms zal ik van die erg geavanceerde redeneervormen aanhalen en de lezer die daarop verder wil werken moet een gespecialiseerd boek kopen. Mijn doel hier is jongeren op een hoger niveau te tillen op een rustige maar rechtlijnige manier en hun bewust te maken

van de rijkdom van de taal. Ik ga ook nog een tweede boek over fysica schrijven indien dit aanslaat gegeven dat je eerst de taal van de natuur moet leren spreken vooraleer je haar wilt bestuderen.

Dit boek is dus in de eerste plaats pedagogisch in de zin dat het de lezer onderdompelt in de vreemde wereld van taal en waarheid, dat waarheid relatief is tot de taal en soms niet verder buiten ons beperkt redeneervermogen gebracht kan worden. Dit heeft belangrijke implicaties in de natuurkunde waar we nog steeds niet zonder de gesproken taal kunnen en dat dit wel eens uit principe zo kan zijn. De gesproken taal is erg vaag en de noodzakelijkheid van dit laaste ruikt naar de goedkeuring van een beperkte vorm van magie. Wetenschap is niet noodzakelijk een tegenhanger van magie doch een poging om haar aan banden te leggen en een beter maatschappij beeld te stimuleren. Dit boekje moet in die optiek begrepen worden, als een poging tot beheersing van de omgeving; op dat punt gekomen rijst er een nieuwe vorm van magie, dat de taal zelf de wereld afbakent. Dus beheersing betekent beperking, geen ongebreidelde verbeelding, je kunt jezelf ervan makkelijk overtuigen dat meisjes het hierbij moeilijker hebben dan jongens. Vandaar dat dit boek ook erg belangrijk is voor meisjes omdat het net vanuit een magisch perspectief geschreven is zonder doorgedreven berekening.

Een bewijs is een "logische" redenering en aldus moet logica een basis onderdeel van de wiskunde vormen. Zonder logica, geen juist bewijs en dus geen stellingen. De logica die in de wiskunde gebruikt wordt is de meest eenvoudige mogelijk: een stelling of bewering is oftewel goed of fout. Goed betekent dat ze in alle gevallen klopt en fout betekent dat er tenminste één tegenvoorbeeld gevonden kan worden. Vandaar ook dat we in de logica de symbolen $\forall$ en $\exists$ gebruiken die betekenen "voor alle", respectievelijk, "er bestaat". Verder zijn de symbolen $A \wedge B$ en $A \vee B$ van toepassing waarbij de eerste uitspraak waar is als en slechts als ze beide waar zijn en de laatste is waar wanneer tenminste één van de twee waar is. In mensentaal leest dit A én B, vervolgens A of B. De lezer kan nu controleren dat $A \wedge (B \vee C)$ hetzelfde is dan $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, een formule die gekend staat als de regel van de Morgan. Dit soort logica staat gekend als Booleaanse of klassieke logica waarbij een uitspraak waar of vals is en waar er dus een absoluut tegengestelde $\neg A$ bestaat. Per definitie is $\neg A$ waar als en slechts A vals is en je controleert dat $\neg\neg A = A$. Deze laatste eigenschap hoeft niet waar te zijn in meer algemene logica's. De lezer kan controleren dat $\neg(A \vee B)$ hetzelfde is dan $\neg A \wedge \neg B$. Verder kan men ook wiskunde ontwikkelen waarbij uitspraken gedeeltelijk waar én vals zijn met een bepaalde kans. Dit soort logica wordt quantum logica genoemd en behoeft het principe van superpositie wat meer geavanceerde wiskunde inhoudt dan stricte verzamelingenleer. In de quantum logica hoeft men wel in rekening te houden dat de waarheidsbepaling van een uitspraak een bepaalde operationaliteit vergt die de toestand van het object onder studie *verandert* hetgeen niet het geval is in de klassieke logica. Dit impliceert dat, in de quantum logica, het verifieren van uitspaak A *na* B niet dezelfde statistiek hoeft op te leveren dan degene die gepaard gaat met de

verificatie van B na A tenzij de respectievelijke veranderingen compatiebel zijn. Dit is nooit het geval voor klassieke logica waar de volgorde totaal irrelevant is. Verder bestaat er nog altijd de mogelijkheid om in te bouwen dat een bepaalde uitspraak onbepaald is, wat betekent dat het niet geweten is. Dat soort logica wordt vage logica genoemd en de geinteresseerde lezer kan hierop verder borduren. Een mijlpaal in de geschiedenis van de wiskunde was dat de klassieke logica niet strict bewijsbaar is, waarmee ik bedoel dat er binnen elk axiomatisch stelsel stellingen bestaan die waar zijn maar niet bewezen kunnen worden via een logische redenering. Dit resultaat, dat vooral een groot filosofisch belang heeft, staat gekend als de onvolledigheids stelling van Godel.

Het hoofd idee achter Godel's theorema is simpel en goed gekend in de taalkunde; in de wiskunde wordt namelijk van elke uitspraak verwacht dat je kunt controleren of deze waar al dan niet vals is. Als een uitspraak waar is kun je trachten dit aan te tonen door te onderstellen dat ze vals is en vervolgens op een tegenstrijdigheid botsen, maar compleet nutteloos zijn zinnen die niet aan deze voorwaarde voldoen. Bijvoorbeeld: "deze zin is juist" is van dat type, je kunt niet *bewijzen* of hij juist of vals is alhoewel hij juist is; nog grappiger is de zin "deze zin is vals". Als je veronderstelt dat hij juist is dan kom je op een contradictie vermits hij vals is wat suggereert dat hij vals is. Omgekeerd leidt de veronderstelling dat hij vals is tot de conclusie dat hij juist moet zijn. Dit zijn allemaal zinnen met zelf-referentie of waarbij de eigenschappen van de zin betrekking hebben tot de ganse zin zelf; da's net zoals een verzameling die een element is van zichzelf wat uiteraard verboden is.

Laat het dus duidelijk wezen: aan de grondslagen van de wiskunde kan gesleuteld worden en we zullen dit in de eerste fundamentele hoofdstukken toelichten aan een discussie rond het keuze axioma waarvan we aantonen dat het strijdig is met andere axioma's uit de wiskunde, een nieuw resultaat. Zelfs de manier waarop we redeneren is voor verandering vatbaar wat zich in de moderne aanpak naar topos theorie toe uit waar een uitspraak wel degelijk waar en vals kan zijn. Dit is een voorbeeld van quantum wiskunde en de notie van stelling en bewijs is hier geheel verschillend dan het is in de klassieke wiskunde. Vermits deze de meest eenvoudige en directe is vormt zij het onderdeel van dit boek, maar ik zal er dikwijls op wijzen dat bepaalde zaken helemaal niet zo "evident" of vanzelfsprekend zijn. Er zijn wiskundigen die de mening toegedaan zijn dat het ultieme doel is alles zo op te schrijven dat een computer kan controleren of een bewijs juist al dan niet fout is: deze behoren tot de zogenaamde Bourbaki strekking die in Parijs ontstaan is. Alhoewel ik het nut van deze filosofie inzie ben ik haar niet gans genegen: het is namelijk ongelofelijk tijd en plaatsrovend om met dit uiterste detail te werken. Mijn aanpak is praktischer *maar* de lezer moet begrijpen dat vaak het allermoeilijkste is een concept of idee exact te verwoorden: je moet jezelf hierin trainen en in die zin is het *beginnen* te werken met de Bourbaki methode wel aangewezen. Eer je een voldoend hoog niveau van bekwaamheid hebt speelt dit hulpstuk helemaal geen rol meer. Dus ik raad de lezer aan in het begin elke tussenstap in een berekening of bewijs te maken

en te verantwoorden in exact detail.

De opbouw van dit boek is vanaf de grond op naar boven: we beginnen met verzamelingenleer, iets wat je allemaal wel gezien hebt in de lagere school en de eerste graad van het middelbaar onderwijs maar waarover nooit echt gepast over nagedacht is geweest. Bijvoorbeeld, hoe kun je gepast de relatie tussen verzameling en element weergeven zonder al te veel woorden te gebruiken? Wat over oneindige verzamelingen, is het aangewezen oneindigheid te formalizeren? Zijn het nemen van doorsnede en unie echt wel bewerkingen waarbij de volgorde geen rol speelt of is er hier een quantaal aspect waar $A \wedge B$ moet gelezen worden als A en B worden na elkaar uitgevoerd in die volgorde in plaats van is gelijk aan de verzameling van alle elementen die tot A en B behoren. Je zult leren dat de eerste, meer ingewikkelde interpretatie, een voorstelling gegeven kan worden, die niet fundamenteel is, binnen het meer simpele en strikte kader. Dit is vaak zo in de natuur dat veel complexe zaken opgebouwd kunnen worden uit eenvoudige dingen en de wiskunde werkt net ook zo. Dikwijls is het gewoon niet gepast een complex iets onmiddellijk bij de horens te vatten maar moet je eerst een grip krijgen op eenvoudigere zaken. Nadat de verzamelingleer gevat is, ontwikkelen we de natuurlijke, gehele, rationale, reeele en complexe getallen: het vinden van een gepaste symbolische notatie hier is veruit het moeilijkst gegeven dat een reeel getal nooit exact neergeschreven kan worden in decimale notatie en toch moeten we een manier vinden om te praten over datgene wat niet neergepend kan worden.

Indien we voldoende rekenvaardig worden gaan we aan topologie doen wat betekent dat we kaarten gaan leren maken van een ruimte en alsdusdanig de ruime reconstrueren door knip en plak operaties wat zich uit in het begrip homologie. (Uitgebreide) homologie bevat alle topologische informatie van een ruimte en is niks anders dan een reeks getalletjes: dus we hebben een cijfervormige code gevonden om een bol te onderscheiden van een auto band (torus) en die code is opgebouwd uit eigenschappen van die ruimte. Eigenlijk is het idee achter homologie erg simpel: de rand van een eindig, topologisch gesloten volume is een gesloten oppervlak wat betekent dat het geen rand heeft. Kort samengevat betekent dit dat de rand van de rand leeg is: deze simpele observatie karakteriseert het ganse homologie begrip. Nu dat we vertrokken zijn van erg algemene ruimten en vrij abstracte atlassen, of bedekkingen met kaarten, zoals je de wereldbol kunt bedekken met de kaarten van elk continent is het tijd om te specialiseren. We gaan ons richten naar de zogenaamde lineaire ruimten, dat zijn ruimten waarbij je verplaatsingen v, w met mekaar kunt optellen zodat

$$v + w = w + v$$

en kunt uitrekken of inkrimpen met een getal rv. Op een bol kun je ook twee verplaatsingen na elkaar nemen, maar de lezer moet er zich van overtuigen dat het omwisselen van deze verplaatsingen een ander resultaat geeft wat we labellen als niet commutativiteit van de bewerking. Niet commutatieve bewerkingen kunnen dus in het algemeen geometrisch voorgesteld worden op een ruimte van

gepaste dimensie. Bovendien heb je op een bol dat helemaal rond gaan hetzelfde is dan de nul verplaatsing: met andere woorden $rv = 0$ voor een zekere $r \neq 0$. Op lineaire ruimten bestaat er een natuurlijke klasse van functies: de zogenaamd lineaire functies welke veralgemeningen vormen van matrices. Deze lineaire functies vormen benaderingen van algemene functies en zijn van groot belang; we bestuderen deze, alsook een paar belangrijke resultaten hieromtrent en presenteren enkele voorbeelden aan de hand van de zogenaamde kwadratische oppervlakken in twee en drie dimensies. Van dan af begint het allemaal en bestuderen we de praktische wiskunde die we in de fysica dagdagelijks gebruiken: hier besteden we heel wat aandacht aan de analytische meetkunde die je beoefent aan de hand van het berekenen van raaklijnen en oppervlakken aan ruimtes die beschreven worden door veeltermen in een vlakke ruimte. De eerste hoofdstukken van dit boek zijn erg abstract, doch dit mag je niet afschrikken en je moet hier voldoende veel tijd aan besteden, het is hier dat de fantasie het meest tekeer kan gaan zoals we in het laatste hoofdstuk over "topologische differentialen" zullen zien. Laat je fantasie maar werken en denk na over hoe jij het zou aanpakken; ik suggereer alleszins verschillende wijzen om deze zaken te benaderen. Vanaf hoofdstuk vijf wordt alles meer praktisch en leren we rekenen op meer concrete ruimten.

Het interessante aan dit concept is dat zaken die in de traditionele benadering rond deze onderwerpen doorgaans eerst behandeld worden, zoals de exponentiele functie en de sinus en cosinus, nu op de laatste plaats komen maar veel diepzinniger en ingenieuzer aangebracht worden. Dus de traditionele moeilijkere rekenoefeningen komen helemaal op de laatste plaats en de conceptuele, die de nodige verbeelding eisen, eerst. De bonus hiervan is dat de lezer deze speciale functies onmiddelijk kan uitbreiden naar niet-conventionele getallenstelsels toe zoals de quaternionen en de Cliffordgetallen welke erg belangrijk zijn in de moderne fysica. Ik heb het oprechte vermoeden, geput uit mijn eigen ervaringen, dat een dieper conceptueel begrip ook leidt tot een betere en vooral veel efficiente rekenkunde door onderandere een gepaste keuze van coordinaten. Er zijn natuurlijk heel wat topics die niet in volledige diepte zijn aangeraakt zoals dit het geval is voor getallenleer; dit is echter een bewuste keuze gegeven dat ik in het finaal hoofdstuk nieuwe zienswijzen zal aanraken die compleet coordinaatonafhankelijk of getalonfhankelijk zijn. Inderdaad, ik geloof niet in het fetisjisme van de getal theoreten die menen dat de Riemann hypothese ook maar enig nuttig materiaal kan aanbrengen omtrent de natuurkunde en priemgetallen in het bijzonder. Veel plezier toegewenst met dit boek dat echt een werkboek moet worden en een bron van inspiratie om verdere intellectuele studies aan te vatten die niet noodzakelijk met wiskunde te maken hebben.

Chapter 2

Eerste stappen: verzamelingenleer.

Verzamelingenleer is een erg abstract en moeilijk domein en het is vereist dat je hier de nodige aandacht aan besteedt. Vermits dit onze eerste kennismaking is met een formele eenduidige taal, in de zin dat iedereen dezelfde ware zinnen construeert doch deze niet noodzakelijk op dezelfde manier interpreteert, is het goed stil te staan bij de ongelofelijke details die schuilen in lichtjes verschillende formuleringen. Advokaten of rechters kennen dit spelletje maar al te goed edoch de wiskundige is niet erg happig hier genot uit te scheppen. De aanpak die ik hier zal volgen is een beetje eigenzinnig en iets algemener dan wat gewoonlijk het geval is. Het ongelofelijke voordeel is dan weeral dat je letterlijk ziet wat voor soort veralgemeningen kunnen gebeuren: ik zal ook een paar van die abstracte gevallen presenteren en concrete situaties geven met dewelke ze overeenstemmen. In de wiskunde is het dikwijls zo dat je enkele concrete voorbeelden in je gedachten hebt waarover je wilt praten maar dat de abstractie van die ideeen aanleiding geeft tot situaties waar je voorheen nooit aan gedacht hebt. Bijvoorbeeld, ik kan denken over een verzameling als een zak met spullen in, een tandenborstel, tandpasta, een brood, jam enzovoort, elementen zoals we in de verzamelingenleer zeggen. Maar ik hoef dit niet te doen, misschien zit er in die zak nog wel iets dat ik op zich niet kan pakken maar dat ik er stuksgewijs kan uithalen wanneer ik mijn andere items eruit haal. Bijvoorbeeld, een halve liter water die ik gesmost heb op mijn kaas en brood; verzamelingenleer bevat allemaal zulke details niet en spreekt zich gewoon uit of er een halve liter in mijn zak zit ongeacht of ik het er kan uithalen of niet. Dus misschien is het gewoon in ons voordeel om niet te beginnen met een zak en items, maar gewoon met de handelingen van delen $\cap$ en verenigen $\cup$, de doorsnede en unie respectievelijk. Nu, in standaard verzamelingenleer veronderstellen we wel dat we kunnen groeperen, of in een zak steken, maar dat de zak als dusdanig eigenlijk niet meetelt. Dus we kunnen twee zakken hebben die gemeenschappelijke stukken bevatten zonder dat ik ergens een gat in hoef te maken of zo, een

"spookzak". Voor de spookzak geldt dat $A \cap B = B \cap A$ en $A \cup B = B \cup A$, we spreken over deze eigenschappen als het *commutatief* zijn van de doorsnede en unie. Voor quantum verzamelingen geldt dit dus niet maar het grappige is dat we zulke situaties kunnen bespreken binnen de traditionele verzamelingenleer aan de hand van samengestelde objecten namelijk zogenaamde Hilbertruimten. Ook hebben we dat $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ en hetzelfde voor de unie, wat bekend staat als de *associativiteit* van de doorsnede, respectievelijk unie. Noteer dus met $A, B, C, \ldots$ verzamelingen, we weten nog niet wat ze zijn maar gaan nu bewerkingen en eigenschappen formuleren; elke verzamelingen theorie $\mathcal{S}$ heeft commutatieve en associatieve bewerkingen $\cap$ en $\cup$ die bovendien voldoen aan $A \cap A = A \cup A = A$. Men eist bovendien dat er een unieke lege verzameling $\emptyset$ bestaat zodat hetvolgende geldig is

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \emptyset &= A \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

waar deze laatste regel dezelfde is dan de de-Morgan regel uit de logica. Dus we hebben hier het metafysische domein verlaten van wat is een verzameling en wat is een element en zijn de operationele toer opgegaan. Het is te zeggen, we hebben het in het midden gelaten wat verzamelingen en elementen zijn en hebben gewoon twee bewerkingen alsook enkele eigenschappen op verzamelingen gedefinieerd. Dit is al heel wat hoor en we onderzoeken enkele gevolgen van deze definities. We zeggen dat A een deelverzameling is van B, $A \subseteq B$ als en slechts als $A \cap B = A$; bovendien is A primitief wanneer elke niet lege deelverzameling A zelf is. In wiskundige taal leest dit dat "*als* $B \subseteq A$, dan moet $B = A$". De lezer controleert dat $A \cap C \neq \emptyset$ een deelverzameling is van A, vermits $A \cap (A \cap C) = (A \cap A) \cap C = A \cap C$, en dus $A = A \cap C \subseteq C$ indien A primitief is. Een primitieve verzameling is zoals een atoom in de fysica: het is ondeelbaar en er bestaat geen kleiner deel dan dat. Dus primitieve verzamelingen kunnen opgevat worden als elementen en we hanteren de notatie, per afspraak, dat $A = \{\widehat{A}\}$. $\widehat{A}$ is dan een element en we schrijven dat $\widehat{A} \in B$ als en slechts als $A \cap B = A$.

Dus, we kunnen elementen *definieren* vanuit de operaties $\cap, \cup$ terwijl normaal gezien precies het omgekeerde gebeurt. Ons zichtpunt is echter ruimer gegeven dat het niet duidelijk is of elementen wel bestaan en dat het niet noodzakelijk zo is dat ze de ganse verzameling uitmaken. Bijvoorbeeld, een oneindige rechte hoeft niet te bestaan uit punten, punten zijn "abstracties" die niet noodzakelijk enig realiteitsgehalte hebben. Desalniettemin, laten we verder onderzoeken wat we kunnen zeggen over elementen in *onze* context. Als $B \subseteq C$, dan behoort elk element $\widehat{A}$ van B tot C: inderdaad $\widehat{A} \in B$ als en slechts als $A \cap B = A$ en dus $A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B = A$ wat dus aantoont dat $A \cap C = A$ en dus $\widehat{A} \in C$. Een ander bewijs is dat $\widehat{A} \in B$ als en slechts als $A \cap B = A$ wat equivalent is aan $(A \cap C) \cap B = A$ en dus $A \cap C \neq \emptyset$ waaruit volgt dat $A \cap C = A$ omdat A primitief is. Dus elementen van deelverzamelin-

gen behoren tot de verzameling zelf. Wat nu betreffende de doorsnede van twee verzamelingen? Eerst tonen we aan dat indien $\widehat{A} \in B, C$ dan is $\widehat{A} \in B \cap C$: dit is waar omdat $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C = A$ en dus $\widehat{A} \in B \cap C$. Aan de andere kant hebben we dat als $\widehat{A} \in B \cap C$ dan is $\widehat{A} \in B, C$ omdat de doorsnede van twee verzamelingen een deelverzameling is van elk. Dus de elementen in de doorsnede van twee vezamelingen zijn precies de gemeenschappelijke elementen van beide verzamelingen. Wat nu betreffende de unie? We tonen aan dat indien $\widehat{A} \in B \cup C$ dan moet $\widehat{A} \in B$ of $\widehat{A} \in C$ vermits $A = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ en dat daarom tenminste een van die twee niet leeg moet zijn en dus gelijk aan A omdat A primitief is. We hebben ook dat als $\widehat{A} \in B$ dan behoort het tot $B \cup C$ vermits $A \cap (B \cup C) = A \cup (A \cap C)$ en dit is gelijk aan $A \cup A$ of $A \cup \emptyset$ omdat A primitief is. In beide gevallen hebben we dat $A \cap (B \cup C) = A$ vermits $A \cup \emptyset = A = A \cup A$. Dus de elementen in de unie zijn precies die elementen die in tenminste een van de verzamelingen zitten.

Zoals gezegd betekent dit niet dat alle verzamelingen alleen bestaan uit elementen of dat elementen zowiezo bestaan in de eerste plaats. Bijvoorbeeld, veronderstel dat $\mathcal{S}$ bestaat uit $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}$, dan is $\{1\}$ primitief, maar $\{1, 2\}$ bestaat niet alleen uit elementen. Traditionele verzamelingenleer veronderstelt dat

$$B = \{\widehat{A} | \widehat{A} \in B\}$$

wat betekent dat een verzameling gelijk is aan de collectie van haar elementen. In dat geval hebben we dus net bewezen dat $\cap$ en $\cup$ de gewone operaties van doorsnede en unie zijn. De lezer kan dit nogal allemaal abstract vinden en zeggen "tja, kan ik dit allemaal niet zomaar onderstellen zonder al die afleidingen?". Het simpele antwoord is "neen"; wiskundigen zijn erg zuinig op hun aannames! Waarom een bijkomende zin in de grondwet schrijven wanneer die reeds een gevolg is van de voorgaande zinnen?! De vraag die je je kunt stellen is "jamaar, hoe verzin je al die stellingen?". Hier is het antwoord eenvoudig dat je jezelf altijd de gewenste situatie voor ogen moet houden en "zien" aan wat voor eigenschappen deze voldoet. Het is dan niet meer dan een "oefening" om te controleren of de abstracte theorie hier ook aan voldoet. Dus hier hebben we een voorbeeld van een situatie gevonden waarbij we vertrokken zijn met twee bewerkingen op een gepaste collectie van objecten die voldeden aan een aantal spelregels omvervolgens elementen te definieren en op te merken dat dezse objecten opgevat kunnen worden als verzamelingen van deze elementen.

Dit zijn lang niet de enige spelregels van verzamelingenleer maar we zullen deze verder stelselmatig opbouwen naargelang de dingen waarover we willen praten meer complex worden. Wiskunde is nogmaals een primitieve taal waarin we de zaken zeer scherp definieren en elke "afwijking" kan dus meer of minder serieuze gevolgen hebben. Laten we even afwijken en fantaseren wat er allemaal kan gebeuren wanneer onze zakken geen spookzakken zijn. Een cruciaal verschil is onmiddelijk dat de doorsnede en unie van "verzamelingen" geen verzamelingen meer zijn vermits het aantal gaten moet meegeteld worden alsook de

manier waarop zakken in elkaar gebouwd zitten. Dit leidt tot de operatie van het "in elkaar steken van n-zakken" Δ_n en de lezer merkt op dat we hiervoor de natuurlijke getallen nodig hebben. Deze zijn definieerbaar uit onze huidige axioma's en alsdusdanig kun je toch zeggen dat in een zekere zin verzamelingenleer de meest fundamentele is; we zullen een gelijkaardige situatie tegenkomen in de meetkunde waarbij de vlakke meetkunde de moeder van de (afleidbare) meetkundes blijft.

De natuurlijke getallen n definieren we symbolisch als $n = 1+1+1+1+\ldots+1$ aan de hand van het volgende voorschrift:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\emptyset\} \\ n+1 &= \{n, \emptyset\}. \end{aligned}$$

Dus $1 = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$, $2 = \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset\}$ enzovoorts; het is een deellectuur die je kan halen gebruik makende van de symbolen $\emptyset, \{, \}$. Ik heb de lezer gewaarschuwd dat symbolische notatie dikwijls het moeilijkste onderdeel van de wiskunde is, maar dit is hoe een computer de getallen zou kunnen inlezen, niet hoe wij praten over de getallen natuurlijk. Nu definieren we op dezelfde manier $n + m$ aan de hand van het voorschrift $n + (m + 1) = \{(n + m), \emptyset\}$ waarbij $n + 0 = 0 + n = n$ gesteld wordt. Hieruit tonen we dan aan dat $n + m = m + n$ voor elk natuurlijk getal m; dit is al zeker waar voor $m = 0$. Stel dat het ook waar is voor $m = k$, dan tonen we aan dat het geldt voor $m = k+1$; inderdaad, $n+(k+1) = \{n+k, \emptyset\} = \{k+n, \emptyset\} = \{k+(1+(n-1)), \emptyset\} = \{(k+1)+(n-1), \emptyset\} = (k+1)+n$ waar we in de eerste stap de definitie gebruikt hebben, in de tweede stap de veronderstelling dat $k + n = n + k$ en finaal, in de derde stap, de associativiteit van $+$. We stellen dan dat $\mathbb{N}$ de verzameling is van alle natuurlijke getallen, wat een verzamelingen theorie definieert door het nemen van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

De bewerking $+$ beeldt twee natuurlijke getallen af op een natuurlijk getal, is associatief en commutatief en heeft 0 als eenheids-element wat betekent dat $0+n = n+0 = n$. Voor elke n kunnen we een inverse $-n$ definieren die voldoet aan $n+(-n) = 0 = (-n)+n$ wat we ook noteren als $n-n = 0$; $n+(-m) = n-m$ is dan een natuurlijk getal als $n > m$ en min een natuurlijk getal als $n < m$. De verzameling van de natuurlijke getallen en hun inverse noemen we de gehele getallen en definieren we als $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}, +$ noemen we dan een commutatieve groep vermits de bewerking $+$ inwendig is, associatief met eenheidselement en inverse.

Zoals voorheen vermeld begint men met het maken van een onderscheid tussen elementen en verzamelingen; men vertrekt van het concept van een lege verzameling $\emptyset$, doorsnede en unie, en hieruit leidt men de eerste drie axioma's af van verzamelingenleer. De aanpak hier is algemener in de zin dat we een element definieren als een primitieve verzameling. Zermelo-Frankel verzamelingenleer bevat veel meer axioma's die te doen hebben met oneindigheid zoals het keuze axioma en we zullen later in dit werk de inconsistentie van deze aanpak

toelichten. Een vijfde axioma betreft het nemen van het verzameling theoretische verschil

$$B \setminus C = \{\widehat{A} | \widehat{A} \in B \wedge \widehat{A} \notin C\}$$

hetwelke we ook opnemen in onze lijst. In de meetkunde kunnen we niet alleen de unie nemen van twee lijnen of de doorsnede ervan maar ook het zogenaamde Cartesisch product, dat een vlak definieert. Gegeven twee verzamelingen B, C, we definieren het Cartesisch product $B \times C$ als de *verzameling* van alle koppels (x, y) zodat $x \in B$ and $y \in C$ hetgeen een zesde axioma is in de verzamelingenleer $\mathcal{S}$ en aldus is deze laatste gesloten met betrekking tot $\times$ waarbij

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

en

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

en hetzelfde wanneer het tweede item vervangen wordt door het eerste. Het bestaan van Cartesische producten laat ons toe relaties te definieren waarbij een *relatie* R tussewn verzamelingen B en C een deelverzameling is van $B \times C$; in het geval $B = C$ kunnen we meerdere criteria opstellen. Bij notatie zeggen we dat xRy als en slechts als $(x, y) \in R$; we noemen R reflexief als xRx voor alle $x \in B$, symmetrisch als xRy impliceert dat yRx voor alle $x, y \in B$ en finaal transitief als xRy en yRz impliceren dat xRz. Een reflexieve, anti-symmetrische, transitieve relatie noemen we een partiele orde en wordt genoteerd door $\prec$ of $\leq$, en een reflexieve, symmetrische en transitieve relatie een equivalentie gewoonlijk genoteerd door $\equiv$. Een equivalentie relatie moet je jezelf indenken als een veralgemening van het gelijkheidsteken, het betreft hier objecten met eenzelfde eigenschap. Je moet dan ook kunnen bewijzen dat een equivalentie relatie op een verzameling A deze doet uiteenvallen in zogenaamde equivalentie-klassen $\overline{x}$ waarbij

$$\overline{x} = \{y \in A | x \equiv y\}.$$

De lezer controleert dat $\overline{x} = \overline{y}$ als en slechts als $x \equiv y$ en de doorsnede $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$ anders. Een partiele orde relatie is een veralgemening van een totale orde zoals "Jan is groter dan Els" waarbij Jan ofwel even groot, kleiner dan of groter is dan Els. Een partiele orde laat de mogelijkheid toe waarbij vergelijking onmogelijk is.

We hebben net de natuurlijke getallen gedefinieerd aan de hand van de bewerking $+$; $\mathbb{N}$ draagt een natuurlijke *totale* orde $\leq$ gedefinieerd door $n \leq n$ and $n \leq n+1$ en men neemt de *transitieve sluiting* van dat, dat wil zeggen de relatie tussen alle natuurlijke getallen die het loigisch gevolg is van deze twee wetten *en* het pricipe van transitiviteit. Dit is zoals het aaneenknopen van een kettin g. Vanuit de natuurlijke getallen hebben we de gehele getallen $\mathbb{Z}$ gedefinieerd en de definitie van $\leq$ kan natuurlijk uitgebreid worden tot $\mathbb{Z}$. We construeren nu de rationale getallen vanuit $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ door middel van de equivalentie relatie $(m, n) \equiv (m', n')$ als en slechts als er bestaat een $k, l \in \mathbb{N}_0$ zo dat $km = lm'$, $kn = ln'$ waar $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. De *rationale* getallen zijn dan gedefinieerd als de

equivalentie-klassen onder deze *equivalentie* relatie.

De zes axioma's die zover besproken zijn, zijn veruit de belangrijkste van verzamelingenleer en laten ons verder toe de rationale getallen te construeren; de resterende twee hebben te maken met oneindigheid en zijn veelal toegevoegd om eigenschappen van de rationale getallen te veralgemenen naar de reeele getallen. We zullen hier zeer voorzichtig zijn met het soort oneindigheid dat we toelaten wat zich uit in een grondige discussie van het keuze axioma. In feite zullen we bewijzen dat dit erg betwist axioma uit de wiskunde foutief is en in strijd met de existentie van de reeele getallen. De wiskunde benodigd hier is echter niet op haar plaats in dit hoofdstuk, doch wordt kant en klaar hier geserveerd teneinde compleetheid te garanderen. Ons zevend axioma luidt als volgt: gegeven een verzameling D, de machtsverzameling 2^D van alle niet triviale deelverzamelingen van D, is een verzameling en behoort tot $\mathcal{S}$. Dit axioma leidt tot de constructie van de ordinale getallen door Cantor. De definitie van een Cartesisch product wordt uitgebreid over zogenaamde "index" verzamelingen; hiervoor hebben we een partiele orde nodig $\prec$. Een index verzameling I is een verzameling uitgerust met een partiele orde $\prec$ zodanig dat voor elke $x, y \in I$ er een $z \in I$ bestaat zodat $x, y \prec z$. Deze voorwaarde is nodig en voldoende indien we unieke limieten willen nemen zoals de lezer moet controleren. Als het niet geldig is, dan kunnen verschillende sublimieten bestaan; dus we noteren door

$$\times_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} | x_i \in A_i\}$$

waar de I-koppels partieel geordend zijn door $\prec$. Finaal, als achtste axioma hebben we het zogenaamde keuze axioma dat als volgt geformuleerd kan worden: gegeven verzamelingen A_i, $i \in I$, met I een index verzameling, dan is het geassocieerd Cartesch product niet leeg. Een andere formulering is dat er een functie f bestaat van I naar $\cup_{i \in I} A_i$ zodat $f(i) \in A_i$. Dus je kunt een verzameling vormen door uit elke verzameling een element te kiezen. Dit keuze axioma heeft erg veel gevolgen en sommige wiskundigen verwerpen het dan ook omdat sommige resultaten te sterk lijken en het transfiniete uitrust met dezelfde eigenschappen als het finitum. Ik heb het reeds een aantal malen gezegd: wiskunde op zich is niet bewijsbaar, het is een taal en we moeten enkele "grammaticale" keuzes maken. De lezer moet erg goed nadenken over deze acht spelregels en indachtig zijn dat commutativiteit, associativiteit alsook het vormen van een machtsverzameling de meest eenvoudige of symmetrische spelregels zijn. Elk voorbeeld dat niet aan deze regels voldoet is geconstrueerd vanuit deze ideale situatie; bijvoorbeeld, we zullen later niet commutatieve of associatieve bewerkingen definieren en zien hoe deze vanuit de commutatieve situatie gebouwd kunnen worden. Dit leidt tot niet commutatieve groepen, quantum groepen enzovoort. Dit doet ons een beetje denken aan de Egyptische bouwkunst en hieruit voortvloeiend de Romeinse en Franse symmetrische bouwstijlen: super eenvoudig, prachtig en logisch. Alles wat meer complex is moet vertrekken van dezelfde spelregels. Nogmaals, het is geen schande dat je dit kleine hoofdstukje eens een paar keer moet overpeinzen en ik nodig je uit in te zien dat de sym-

bolische notatie van de natuurlijke getallen de enige mogelijke is.

Ter verduidelijking, het keuze axioma ondersteunt het idee dat het Cartesisch product niet leeg is terwijl het Cartesisch product axioma stelt dat het een verzameling betreft. Het grappige is dat men kan aantonen dat het keuze axioma faalt: beschouw hiertoe twee rotaties a, b rond een hoek $r2\pi$ met r irrotationeel rond de x en z as respectievelijk. Men beschouwt de (vrije) group F_2 geconstrueerd uit a, b dewelke je kunt splijten in vijf (disjuncte) delen

$$S(a), S(a^{-1}), S(b), S(b^{-1}), e$$

waar $S(a)$ alle irreduciebele woorden bevat beginnende met de letter a. Duidelijk heeft men dat $S(a) \sim S(b)$ vanuit een geometrisch standpunt en gelijkaardig wanneer de inversen toegepast worden. Het *keuze axioma* laat de constructie van een verzameling M toe die precies één representant van elke F_2 orbit op de sfeer S^2 bevat. De constructie gaat als volgt: beschouw de verzameling van alle equivalentieklassen $\widetilde{M}$ van S^2 onder F_2 en noteer met $p : S^2 \to \widetilde{M}$ de geassocieerde projectie. Als men $\widetilde{M}$ uitrust met een triviale partiele orde $\prec$ door bijvoorbeeld een uitzonderlijk element boven alle andere gedisconnecteerde elementen te plaatsen, dan bekomt men een index verzameling $(\widetilde{M}, \prec)$ en het keuze axioma wordt dan toegepast op $\times_{m\in\widetilde{M}} p^{-1}(m)$. Beschouw de verzamelingen

$$A = S(a)M, B = S(a^{-1})M, C = S(b)M, D = S(b^{-1})M, M$$

en observeer dat $bD = A \cup B \cup D \cup M$. Voor rotationeel invariante volumes impliceert dit dus dat $bD = D$ op een verzameling van maat nul na en de lezer noteert dat $b^n D \subseteq b^{n+m} D$ voor $n, m > 0$. Bijgevolg, vermits $\lim_{n\to\infty} b^n D = S^2$ bekomen we dat $D = S^2$ en omdat generiek geen enkel woord van de vorm $a^{n_1} b^{m_1} \dots a^{n_k} b^{m_k}$ reduceerbaar is tot de eenheid tenzij alle $n_i = m_j = 0$ (toon dit aan in detail) komen we tot een contradictie. Bijgevolg bestaat M niet.

Teneinde het bewijs te vervolledigen; neem de z as v_z. $b^n(v_z) = v_z$ en $a^m(v_z) = \cos(rm2\pi)v_z - \sin(rm2\pi)v_y$. v_y wordt door a^m geroteerd in v_y en v_z terwijl de actie van b^n resulteert in v_y en v_x. In het algemeen bekomen we dus voor elke reeks $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k$ een formule van de vorm $\sum_l \pm \prod_{j=1}^k g_j^l f_j^l = 1$ waarbij de som eindig is en $f_j^l = \sin(rm_j2\pi)$, $f_j^l = \cos(rm_j2\pi)$ of $f_j^l = 1$ alsook $g_j^l = \sin(rn_j2\pi)$, $g_j^l = \cos(rn_j2\pi)$ of $g_j^l = 1$. Gegeven dat er een aftelbaar aantal woorden zijn en een overaftelbaar aantal reeele getallen bekomen we dat er een overaftelbaar aantal r bestaan zodat de voorwaarde geschonden is. Voor uitleg rond de woorden aftelbaar en overaftelbaar verwijs ik naar later. Bijgevolg is het keuze axioma alleen maar geldig voor aftelbare Cartesische producten wat heel wat situaties in de wiskunde uitsluit. De zogenaamde functionaal analyse alsook de spectraalstelling voor zelftoegevoegde operatoren, die we later zullen behandelen,valt hiermee door de mand. Dit noodzaakt reflectie gegeven dat deze velden basis vormen voor de traditionele quantum mechanica.

De belangrijkste les hier is dat het neerschrijven van consistente spelregels verre

van evident is; weinig personen zouden enig gram zien in het keuze axioma en argumenteren dat de transfiniete situatie analoog is aan deze van de natuurlijke getallen. Dit is echter niet zo, zelfs niet vanuit verzamelingen theoretisch standpunt. Nu we de basis onder de knie hebben, kunnen we verder doorborduren op de constructie van meer complexe getallenstelsels wat het onderwerp van hetvolgende hoofdstuk is.

Chapter 3

Geavanceerde getallenstelsels.

Dit hoofdstukje is al wat praktischer dan het voorgaande; waar we voordien abstracte regels bestudeerd hebben gaan we deze nu aanwenden om concrete berekeningen te leren maken. We beginnen terug met voorstellingen of representaties van de gehele en rationale getallen en later breiden we deze uit naar de reeele getallen. Hierna bestuderen we de complexe getallen en reeele quaternionen om finaal te eindigen met algemene Clifford algebra's en octonionen; afgezien van deze laatste zijn ze allen belangrijk in de natuurkunde en hogere rekenkunde. Toepassingen van deze getalstelsels zijn er voldoende: de ganse ganse quantum mechanica is gebouwd op de complexe getallen en uitbreidingen naar de reeele quaternionen zijn ook gemaakt. We hebben tot hiertoe $\mathbb{Z}, +$ bestudeerd en vooraleer we overgaan naar hogere getallenstelsels, laat ons even abstracte regels opstellen: $\mathbb{Z}, +$ voldoet aan

- $+$ is inwendig wat betekent dat de som van twee gehele getallen terug een geheel getal is,
- $+$ is associatief wat betekent dat $(n + m) + k = n + (m + k)$, met andere woorden de som van een reeks getallen hangt alleen af van de reeks en niet van de manier waarop je haar opsplitst in paren,
- er bestaat een uniek neutraal element 0 zodat $0 + n = n + 0 = n$,
- gegeven het neutraal element 0, we hebben dat voor elk element n er een unieke inverse $-n$ bestaat zodat $n + (-n) = (-n) + n = 0$,
- de som is commutatief, wat betekent dat $n + m = m + n$.

Meer algemeen, een vezameling G met bewerking $\star : G \times G \to G$ die aan deze vijf eigenschappen voldoet noemen we een commutatieve groep. Je moet goed begrijpen dat deze regels gegeven zijn in volgorde van belangrijkheid: de

tegengestelde of inverse kan niet gedefinieerd worden zonder het neutraal element en de definitie van het neutraal element steunt op de inwendigheid van de optelling. Uiteraard kan je associativiteit laten vallen alsook het bestaan van een unieke inverse (later zullen we hiervan voorbeelden zien); commutativiteit is nog het makkelijkst om te laten vallen en ook hier bestuderen we voorbeelden van. De gehele, rationale, reeele en complexe getallen voldoen allemaal aan deze spelregels voor de optelling; we bestuderen nu de vermenigvuldiging. Voor de natuurlijke getallen definieren we de vermenigvuldiging aan de hand van $n.1 = 1.n = n$ en $n.(m+1) = n.m + n = (m+1).n$; we bewijzen nu even dat hieruit volgt dat

$$n.(m+k) = n.m + n.k = (m+k).n$$

voor alle $n, m, k \in \mathbb{N}$. Duidelijk is

$$n.(m+k) = n.((m+k-1)+1) = n.(m+k-1)+n = n.(m+k-2)+n.2 = \ldots = n.m+n.k$$

door het herhaaldelijk toepassen van de elementaire regel. Je toont nu aan dat dezelfde eigenschappen gelden voor alle $n, m, k \in \mathbb{Z}$ door te stellen dat $0.n = n.0 = 0$. 1 is per definitie het eenheidselement voor de vermenigvuldiging, maar elk geheel getal n verschillend van 1 heeft geen inverse in $\mathbb{Z}$ in de zin dat $m.n = n.m = 1$. De vermenigvuldiging is dus inwendig, associatief, commutatief en heeft een eenheidselement. $\mathbb{Z}, +, .$ met deze eigenschappen noemen we een commutatieve ring; meer precies noemen we een verzameling G uitgerust met twee bewerkingen $+, .$ waarbij $G, +$ een commutatieve groep is en $.$ inwendig, associatief is met eenheidselement 1 een ring indien bovendien

$$g.(u+v) = g.u + g.v,\ (u+v).g = u.g + v.g$$

een eigenschap die we de distribuviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling noemen. Noteer dat deze regel precies dezelfde is dan de regel van de-Morgan uit de verzamelingenleer en logica. Dus $+$ mag je lezen als "of" en $.$ als "en". Je kunt deze abstracties op het eerste zicht als overdreven of onnatuurlijk ervaren; het is niet zo omdat de gehele getallen hieraan voldoen dat dit noodzakelijkerwijs een soort "heilige" regel moet zijn. De lezer zal beter apprecieren dat deze regels wel degelijk belangrijk zin in de zin dat veruit de meeste getallenstelsels die we hieruit kunnen construeren aan die regels voldoen. Vooraleer we overstappen naar de rationale getallen is het goed om na te denken over voorstellingswijzen of representaties van de natuurlijke en gehele getallen; de arabieren hebben hierin het pleit gewonnen. Ze waren slim genoeg om te werken met zogenaamde machten n^m waarbij n, m twee natuurlijke getallen zijn. Per definitie stellen we dat $n^0 = 1$ en $n^{m+1} = n.n^m$ dus $n^1 = n, n^2 = n.n, n^3 = n.n.n$; in het algemeen leest dit dus dat n m maal met zichzelf vermenigvuldigd wordt. Terzake nu, de arabieren hadden begrepen dat je elk natuurlijk getal m op een unieke manier kunt schrijven als

$$m = \sum_k c_k.n^k$$

waar c_k een natuurlijk getal is dat ligt tussen 0 en $n-1$; het bewijs hiervan is erg simpel en een gevolg van de Chinese reststelling. Deze zegt dat elk natuurlijk getal $m = k.n+r$ met r tussen 0 en $n-1$ wat gewoon betekent dat elk getal ligt tussen twee veelvouden van n; een uitspraak die simpelweg waar is. De stelling van de arabieren volgt dan gewoonweg uit

$$m = k_1.n + c_0 = (k_2.n + c_1).n + c_0 = k_2.n^2 + c_1.n + c_0 = \ldots = \sum_{k=0}^{l} c_k.n^k$$

waarbij deze laatste som eindig is omdat op een gegeven moment $k_{l+1} = 0$. Dus een getal kun je voorstellen als $c_l c_{l-1} \ldots c_1 c_0$ en deze code hangt dus af van het zogenaamde basisgetal n. Indien het basisgetal 2 is spreken we over binaire getallen, deze worden gebruikt in de logica en schakelingen in electronische apparaten zoals computers en microgolf ovens. Je moet de volgende oefeningen maken: toon aan dat het getal $3 = 2 + 1$ binair leest als 11 en het getal $7 = 2^2 + 2 + 1$ als 111, speel nog wat verder met binaire codes. De getallen-notatie die het gehaald heeft is de tiendelige, misschien omdat we tien vingers of tien tenen hebben; de basisgetallen zijn dus $0 = \emptyset, 1 = 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Dus we noteren getallen zoals 923 enzovoort; nu, waarom is zulke notatie extreem handig wat betreft de optelling alsook de vermenigvuldiging? De reden is dat $0 \leq c_k + d_k \leq 2n - 2$ alsook $0 < c_k c_l < n^2$ wat leidt tot de optellings en vermenigvuldigingsregels die je geleerd hebt in de lagere school; een handig begrip hierbij is dat van modulo " mod " waarbij "$n \mod m$" de rest bij deling van n door m. Dit zover de optelling en vermenigvuldiging van natuurlijke getallen; deze regels kunnen triviaal uitgebreid worden naar de gehele getallen toe en je moet hierop enkele oefeningen maken. Dit zijn typisch dingen die je doet in de lagere school; we eindigen deze sectie met de volgende concepten. Een natuurlijk getal $n > 1$ wordt een priemgetal genoemd indien n en 1 haar enige delers zijn wat betekent dat als $n \mod q = 0$ en $0 \leq q \leq n$ dan is $q = 1, n$. Controleer nu dat $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ de eerste 6 priemgetallen zijn. De eerste oefening die je moet maken is dat elk getal kan geschreven worden als een uniek product van priemgetallen, deze ontbinding noemen we de priemontbinding. Bijvoorbeeld, de priemontbindingen van $6, 12, 21$ zijn $6 = 2.3, 12 = 2^2.3, 21 = 3.7$; bereken nu de priemontbindingen van $37, 41, 56$.

We hebben in het vorig hoofdstuk de rationale getallen al abstract gedefinieerd maar hier gaan we verder in op de materie. We vertrokken van $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ en definieerden twee koppels (m, n) en (m', n') als equivalent indien er niet nul natuurlijk getallen k, l bestaan zodat $km' = lm, kn' = ln$. Dit is echter een niet zo handige manier om de zaken voor te stellen en daarom heeft men de notatie

$$\frac{m}{n}$$

geintroduceerd, de equivalentie komt dan neer op de schrappingsregel dat twee gemeenschappelijke factoren boven en onder de streep weggelaten kunnen wor-

den. Meer precies,

$$\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$$

en men definieert de optelling en vermenigvuldiging als volgt

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Hieruit leidt je af dat het eenheidselement voor de optelling kan voorgesteld worden als $\frac{0}{n}$ en het eenheidselement voor de vermenigvuldiging als $\frac{n}{n}$ waarbij $n \in \mathbb{N}_0$. Je moet nu controleren, als oefening, dat de optelling en vermenigvuldiging associatief en commutatief zijn en dat aan de distribuviteitsregel voldaan is. Dus $\mathbb{Q}, +, .$ is een ring; de inverse voor de optelling is duidelijk $\frac{-m}{n}$ en je moet een inverse voor de vermenigvuldiging vinden voor elk niet nul element. Met deze bijkomende informatie noemen we $\mathbb{Q}, +, .$ een veld; zover de rekenkundige eigenschappen van de rationale getallen. Nu komen we tot enkele belangrijke inzichten: eerst en vooral merk je op dat de gehele getallen $\mathbb{Z}$ voorgesteld kunnen worden als een rationaal getal $m := \frac{m}{1}$ en dat onder die voorstelling de eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging behouden blijven. Meer precies,

$$m + n := \frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1}, mn := \frac{mn}{1} = \frac{m}{1}\frac{n}{1}$$

we vertalen dit door te zeggen dat de afbeelding

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : m \to \frac{m}{1}$$

een homomorfisme is. Je moet nu aantonen dat $\mathbb{Q}$ het kleinste veld is dat de gehele getallen omvat (hint: definieer inversen voor de vermenigvuldiging van gehele getallen en neem willekeurige producten). Een tweede belangrijke eigenschap betreft de uitbreiding van de orde relatie $\leq$; we zeggen dat

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'}$$

als en slechts als $mn' \leq m'n$. Je controleert dat deze definitie geldig is over de ganse equivalentie klasse waarmee ik wil zeggen dat indien $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}$ en $\frac{r'}{s'} = \frac{m'}{n'}$ dan is $rs' \leq r's$ als en slechts als $mn' \leq m'n$. Als moeilijke oefening probeer je aan te tonen dat je de rationale getallen niet kunt nummeren volgens orde; met andere woorden, tussen elke twee rationale getallen kun je een ander rationaal getal vinden (hint: neem het midddelpunt).

Deze laatste eigenschap leidt ons tot de constructie van de reeele getallen $\mathbb{R}$; er bestaan verschillende manieren om deze te introduceren, bijvoorbeeld als de metrische sluiting van $\mathbb{Q}$ in de natuurlijke metriek. Vermits we topologie en

metrieken pas in het volgende hoofdstuk zullen bestuderen gaan we hier anders te werk; we gebruiken gewoon de orde relatie. Laten we eerst aantonen dat de rationale getallen gaten bevatten; bijvoorbeeld, definieer het getal $\sqrt{2}$ als het uniek positief getal zodat $\sqrt{2}^2 = 2$. We tonen aan dat dit niet rationeel is. Stel dat $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dan is $2n^2 = m^2$. Nu kun je zien dat dit onmogelijk is omdat 2 een oneven aantal keer voorkomt in de priemontbinding van het linkerlid maar een even aantal in het rechterlid. Dus $\sqrt{2}$ behoort niet tot de rationale getallen en aldus bevat deze gaten; dus hier komt het eerste nut naar voren van de priem-ontbinding. Noteer dat de priemgetallen zijn ten opzichte van de vermenigvuldiging wat de primitieve verzamelingen zijn ten opzichte van de doorsnede; dus het is helemaal niet verwonderlijk dat deze zo belangerijk zijn. De vraag is nu dus hoe je een getal als $\sqrt{2}$ construeert! Dus om even de logica tot hiertoe te herhalen: (a) de natuurlijke getallen zijn geconstrueerd vanuit de optelling (b) de gehele getallen volgden door inversen ten opzichte van de optelling toe te voegen (c) de rationale getallen volgen uit de gehele getallen door inversen ten opzichte van de vermenigvuldiging te definieren en finaal (d) volgen de reeele getallen uit een compleetheidseigenschap.

De vervollediging definieren we aan de hand van de Dedekind procedure: hier neem je stijgende rijen $q_n \leq q_{n+1}$ van rationale getallen q_n die allemaal kleiner zijn dan een bepaald rationaal getal q. We definieren weeral dat twee zulke rijen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equivalent zijn indien voor elke p_n er een q_m bestaat zodat $q_m \geq p_n$ en omgekeerd. Controleer terug dat deze relatie tussen stijgende rijen een equivalentierelatie is; evenzo kun je werken met dalende rijen die langs onder begrensd zijn. $\mathbb{R}, +, .$ is dan gedefinieerd aan de hand van deze equivalentie-klassen en je moet aantonen dat $+$ en $.$ goed gedefinieerd zijn en dat $\mathbb{R}, +, .$ een veld is. Laten we eens bij wijze van voorbeeld zulke rij construeren voor $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \sqrt{4-2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

en

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n}z^n$$

en daarom is $\sqrt{2}$ benaderd door de dalende rij

$$q_m = 1 - \frac{1}{4} - \sum_{n=2}^{m}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{4^n}$$

van rationale getallen. Uiteraard ken je die formule voor de wortel nog niet en we zullen deze later in dit boek bewijzen. Dus de reeele getallen zijn een compleet en totaal geordend veld dat bovendien aan de Archimedische eigenschap voldoet: het is te zeggen

$$ra \leq rb$$

als en slechts als $a \leq b$ gegeven dat $r > 0$. Nu zou je zeggen dat we klaar zijn met het definieren van getallenstelsels mochten we niet op de volgende uitspraak

botsen. Een veelterm is een functie in een reeele veranderlijke x van de vorm

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

waarbij $a_k \in \mathbb{R}$; een wortel of nulpunt van P is een reeel getal c zodat $P(c) = 0$. Indien c een wortel is van $P(x)$ kan men $P(x)$ schrijven als $P(x) = (x-c)Q(x)$ met $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$. Toon dit aan! Indien P precies n nulpunten heeft kan deze geschreven worden als

$$P(x) = a_n(x - c_1)\dots(x - c_n).$$

In dat geval noemen we $P(x)$ volledig factoriseerbaar en $(x - c)$ een factor. Nu kan men makkelijk inzien dat niet elke veelterm van die aard factorizeerbaar is: namelijk

$$P(x) = x^2 + 1$$

is altijd strict positief en heeft geen nulpunten. Om deze toch te factorizeren voegt men een getal i toe zodat $i^2 = -1$. In dat geval is

$$P(x) = (x - i)(x + i)$$

wat erop wijst dat we de reeele getallen minstens moeten uitbreiden met i; met andere woorden, definieer

$$z = a + bi$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

de verzameling van de complexe getallen. Beschouw vervolgens veeltermen $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ met $a_k \in \mathbb{C}$ dan kan men bewijzen dat $P(z)$ factorizeerbaar is oftewel $P(z)$ heeft n nulpunten. Je merkt op dat het voldoende is te bewijzen dat $P(z)$ minstens een nulpunt c heeft vermits dan $P(z) = (x-c)Q(z)$ en $Q(z)$ is van graad $n - 1$ en heeft terug een nulpunt enzovoorts. Een bewijs van deze stelling vergt hogere wiskunde en we komen daarop terug in hoofdstuk 13. We rusten $\mathbb{C}$ terug uit met een optelling alsook vermenigvuldiging:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

en

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Je toont aan dat $\mathbb{C}, +, .$ een ring is; definieer nu de complex toegevoegde als

$$\overline{z} = a - bi$$

dan is

$$\overline{z}z = z\overline{z} = a^2 + b^2$$

een getal dat alleen nul is indien $a = b = 0$. Dus het getal $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ is de inverse voor z voor de vermenigvuldiging en aldus is $\mathbb{C}, +, .$ een veld. Het veld is echter niet

Archimedisch gegeven dat de natuurlijke orde gegeven is door $a + bi \leq c + di$ als en slechts als $a < c$ of $a = c$ en $b \leq d$. In dat geval is $1 + 5i > 0$ maar $(1+5i)^2 = -24+10i < 0$ wat in strijd is met de Archimedische eigenschap. We gaan dieper in op de complexe getallen in hetvolgende hoofdstuk; noteer voor nu dat

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

en

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$$

twee eigenschappen die je moet aantonen. Als toepassing van de complexe getallen gaan we nulpunten berekenen van reeele veeltermen $P(x)$ van eerste en tweede graad. Voor een eerste graadsfunctie $ax + b$ is het nulpunt gegeven door $-\frac{b}{a}$ terwijl voor een tweedegraadsfunctie we de nulpunten moeten zoeken van

$$ax^2 + bx + c.$$

Deze laatste kun je herschrijven als

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

en dit is nul als en slechts als

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Indien $b^2 - 4ac \geq 0$ dan is

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

terwijl in het andere geval

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

hetgeen expliciet aantoont dat reeele veeltermen van de tweede graad factorizeerbaar zijn over $\mathbb{C}$.

Nu zou je denken dat de meest interessante getallenstelsels bestudeerd zijn doch er is een erg belangrijke klasse van veralgemeningen van de complexe getallen: we bestuderen eerst het meest eenvoudige geval van de reeele quaternionen $\mathbb{RQ}$. Dit getallenstelsel heeft een nauw verwantschap met meetkunde in de drie-dimensionale ruimte, iets waar we later zullen op terug komen. Voorlopig bestuderen we de algebraische eigenschappen van dit getallenstelsel en laten de meetkundige motivatie voor later. $\mathbb{RQ}$ is gegenereerd door twee imaginaire eenheden i, j zodat $i^2 = j^2 = -1$ en $ij + ji = 0, ij = k$; dus, $k^2 = ijij = -i^2j^2 = -1$ en $jk = i, ki = j$. Een algemeen quaternion q is dus van de vorm

$q = a + bi + cj + dk$ waarbij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. We definieren terug de quaternion toegevoegde aan de hand van

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk$$

en aldus is $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. De inverse van $q \neq 0$ is dus $\frac{\overline{q}}{q\overline{q}}$ en aldus is $\mathbb{RQ}, +, .$ een niet commutatieve ring waarbij elk niet nul element een multiplicatieve inverse heeft. Zoals gezegd komt de meetkundige interpretatie later.

Er is een natuurlijke uitbreiding van de quaternionen naar de zogezegde reeele Clifford algebra's; deze zijn gegenereerd door elementen e_i waarvoor geldt dat

$$e_i e_j + e_j e_i = \alpha_{ij}$$

met $\alpha_{ij} = 0$ als $i \neq j$ en $\alpha_{ii} = \pm 2$. We noteren dit met $\mathrm{Cl}(p, q)$ waarbij p het aantal plusjes is en q het aantal minnetjes. De quaternionen zijn dan $\mathrm{Cl}(0, 2)$; men kan aantonen dat met uitzondering van $\mathrm{Cl}(0, 1)$ en $\mathrm{Cl}(0, 2)$, dus de complexe getallen en quaternionen, dat in elk van deze ringen een element kan gevonden worden dat geen inverse heeft voor de vermenigvuldiging. Dit bemoeilijkt een heel aantal zaken maar bijvoorbeeld $\mathrm{Cl}(1, 3)$ wordt veelvuldig gebruikt in de fysica. Tot slot van dit hoofdstuk toon je aan dat elk element van de Clifford algebra geschreven kan worden als

$$q = a + \sum_{n=1}^{p+q} a_{j_1 \ldots j_n} e_{j_1} \ldots e_{j_n}$$

waarbij $j_k \neq j_l$ als $k \neq l$. We zullen later nog meer eigenschappen van Clifford getallen bestuderen maar dit volstaat voor nu. Merk op dat de Clifford getallen niet commutatief zijn voor de vermenigvuldiging en dus meer dan een dimensie vereisen om ze meetkundig voor te stellen; het vermeetkundigen van algebra is een erg belangrijke tak van de wiskunde. Tot slot zijn er ook nog de octonionen, deze vormen een getallenstelsel waarbij de vermenigvuldiging niet associatief noch commutatief is. De geinteresseerde lezer kan hierover alles nalezen in de literatuur.

Zover een eerste inleiding tot getallenleer: alles kan nogal abstract over komen tot hiertoe maar ik heb reeds talloze malen benadrukt dat het neerpennen van een idee in symbolentaal vaak het moeilijkste deel is van wiskunde en dat er veel verschillende manieren bestaan om dit te doen. Finaal een beetje notatie: we hebben reeds gezegd dat de inverse van een getal q ten opzichte van de som gegeven is door $-q$ terwijl dit voor de vermenigvuldiging gelijk is aan q^{-1}. Als je voorheen totaal geen ervaring hebt gehad met deze materie, toon dan aan dat

- $(\frac{5}{4})^{-1} = \frac{4}{5}$,
- $(1 + i)^{-1} = \frac{1-i}{2}$,

- $2^3 = 8$,
- $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$,
- $\frac{1}{i} = -i$,
- $(1+2i)^2 = -3+4i$.

Oefeningen betreffende Clifford getallen.

- Toon aan dat de Clifford getallen $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ met $i_r \neq i_s$ voor $r \neq s$ voor k even een subalgebra vormen van de ganse Clifford algebra.
- Neem de Clifford getallen $\beta_{ij} = e_i e_j$ met $i \neq j$ en definieer de commutator $[\beta_{ij}, \beta_{kl}] = \beta_{ij}\beta_{kl} - \beta_{kl}\beta_{ij}$. Toon aan dat de commuator terug van de vorm $\sum_{r\in\{i,j\},s\in\{k,l\}} \pm\alpha_{r's'}\beta_{rs}$ waar $r' = i$ als $r = j$ en $r' = j$ indien $r = i$.
- De β_{ij} vormen dus een zogenaamde Lie-algebra bepaald door de α_{ij} symbolen.
- Classificeer alle reeele Clifford algebra's waarvoor elk niet nul element een inverse heeft (er zijn er drie; de reeele getallen, complexe getallen en quaternionen).

Chapter 4

Topologie.

Topologie moet je je indenken als een verfijning van verzamelingenleer; het is te zeggen, we beperken ons tot speciale verzamelingen de zogenaamde open verzamelingen. In de natuur is een open verzameling een abstractie, een denkbeeldig iets wat niet helemaal bestaat. Een open verzameling moet je je indenken als iets met "volume": bijvoorbeeld, op een rechte is de verzameling van alle reeele getallen tussen twee elementen $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ open en de natuurlijke lengte hiervan is $b - a$. Een punt is een voorbeeld van een gesloten verzameling maar dit heeft volume of lengte nul. Laten we even verder werken met de open intervallen (a, b): de doorsnede van twee open intervallen is terug een open interval en de unie van open intervallen kan geschreven worden als de disjuncte unie van open intervallen, waarbij disjunct betekent dat ze een lege doorsnede hebben. Kortweg, gegeven een verzameling D, we noemen een verzameling $\tau(D)$ van deelverzamelingen van D een topologie indien

- $\emptyset \in \tau$,
- $A, B \in \tau$ impliceert dat $A \cap B \in \tau$,
- $A_i \in \tau$ impliceert dat $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$ voor elke index set I.

Ik benadruk opnieuw dat deze definitie afhangt van de commutativiteit en associativiteit van de doorsnede en unie en dat het daarom mogelijk is een niet commutatieve topologie te definieren door een of beide van de bewerkingen niet commutatief te maken. Dit is echter volledig onbekend gebied en in dit korte hoofdstuk bestuderen we "klassieke" topologieen. Intuitief kun je deze definierende eigenschappen begrijpen als de voorwaarde waaraan een verzameling landkaarten moet voldoen: typisch overlappen zulke kaarten en al wat we vragen is dat de doorsnede ervan terug een kaart is en dat je er willekeurig veel kan bijeen gooien. Er zijn speciale deelverzamelingen $E \subseteq D$ zodat

- *gesloten* als en slechts als $E^c := D \setminus E \in \tau(D)$,

- *compact* als en slechts als voor elke bedekking O_α van E met behulp van open verzamelingen $O_\alpha \in \tau(D)$ er een eindige deelbedekking $O_i; i = 1 \ldots n$ bestaat zodat $E \subseteq \cup_{i=1}^{n} O_i$.

Dus de compacte verzamelingen zijn deze die altijd bedekt worden door een eindig aantal kaarten zoals bijvoorbeeld een wereldbol: ongeacht hoe klein je ook je kaarten maakt, de bol is bedekt door een eindig aantal van hen. Gegeven een punt $p \in D$, we noemen O een open omgeving van p als en slechts als $p \in O$. Gegeven een punt p, een basis van open omgevingen is gegeven door een aftelbare collectie van open omgevingen O_i van p, zodat voor elke open V die p omvat geldt dat er een index i bestaat zodat $O_i \subseteq V$. Men zou bovendien kunnen eisen dat $O_{i+1} \subseteq O_i$ maar in het vervolg doen we dat niet. Betreffende gesloten verzamelingen X, Y moet je nu controleren dat: (a) $\emptyset, D$ zijn gesloten (b) $X \cup Y$ is gesloten (c) $\cap_{i \in I} X_i$ is gesloten als alle X_i dat zijn. Vezamelingen zoals $\emptyset, D$ welke open en gesloten zijn noemen we clopen. Gegeven een verzameling $B \subseteq D$, de doorsnede van alle gesloten verzamelingen X die B bevatten is gesloten en noemen we de sluiting van B wat we noteren als $\overline{B}$. De sluiting van een verzameling is daarom de kleinste gesloten verzameling die deze verzameling zelf bevat. Met andere woorden, je voegt dus elementen of punten toe die limieten zijn van elementen in B. Meer concreet, we noemen x een limietpunt van een rij $(x_i)_{i \in I}$ als en slechts als voor elke open omgeving $\mathcal{O}$ van x geldt dat er een j bestaat zodat $\forall j \prec i$ geldt dat $x_i \in \mathcal{O}$. Nu toon je aan, gebruik makend van de eigenschappen van een index set dat indien y een ander limiet punt is dat dan de open omgevingen van x en y samenvallen. Dit motiveert de volgende definitie: een topologie is Hausdorff als en slechts als elke twee punten x en y twee disjuncte open omgevingen hebben. Het is te zeggen $x \in \mathcal{O}, y \in \mathcal{V}$ en $\mathcal{O} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Voor Hausdorff topologieen geldt dan dat de limiet van een rij uniek is. We hebben nu het volgende resultaat voor topologieen met een aftelbare basis: een verzameling is gesloten als en slechts als ze al haar limietpunten bevat. We bewijzen dit even: veronderstel dat B gesloten is, en zij $(x_i)_{i \in I}$ een rij in B met limiet punt $x \in D$, dan is $x \in B$ anders bestaat er een open omgeving B^c van x die disjunct is met $(x_i)_{i \in I}$, wat tegen de definitie is van een limiet punt. Omgekeerd, veronderstel dat elk limietpunt van B tot B behoort, dan is B gesloten; indien dit laatste niet zo is, vinden we een $x \in \overline{B} \setminus B$ zodat voor elke basis-open omgeving $\mathcal{O}_n$ van x we een element $x_n \in B \cap \mathcal{O}_n$ vinden en aldus is x een limietpunt van $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B$ en aldus behoort het tot B wat een tegenstrijdigheid oplevert. Later geven we een voorbeeld van een compacte verzameling in een niet-Hausdorff topologie met een rij waarvan geen enkele deelrij een limietpunt heeft (indien je zelf wil zoeken, denk in een oneindig aantal dimensies). We gaan nog verdere karakteriseringen van compactheid bedenken in de zogenaamde metrische topologieen, dat zijn diegene die bepaald worden door een afstandsfunctie d.

Zover lijkt de behandeling van topologie erg abstract en weinig nuttig, je kunt zowat elke topologie bedenken waarmee je wil werken. Onze fysische werkelijkheid lijkt bij zeer goede benadering specialistischer gegeven dat we over afs-

tanden en bollen spreken, zoals bijvoorbeeld de cirkel met straal van 10 kilometer rond Brussel gemeten vanaf manneken pis in vogelvlucht uiteraard. Op aarde gaat dit alleen "mis" wanneer je de halve omtrek bewandeld hebt; een grotere wandeling zou economischer geweest zijn mocht je oorspronkelijk in tegengestelde richting vertrokken zijn. Dus op grote afstanden kun je "problemen" krijgen en tegenwoordig denken we in de natuurkunde dat zulke zaken zich ook kunnen voordoen op zeer kleine afstanden; veel kleiner dan de typische schaal van een atoom. Kortweg, een afstandsfunctie $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ op een verzameling X voldoet aan

- $d(x, y) = 0$ als en slechts als $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ voor elke $x, y \in X$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ de zogenaamde driehoeksongelijkheid.

Een afstandsfunctie definieert een Hausdorff topologie met aftelbare basis door middel van de open ballen

$$B(x, \epsilon) = \{z | d(x, z) < \epsilon\}$$

een aftelbare basis is dan gegeven door $B(x, \frac{1}{n})$ waarbij $n \in \mathbb{N}_0$. Twee punten x, y gescheiden door een afstand $d(x, y) > 2\epsilon$ kunnen omgeven worden door twee disjuncte bollen $B(x, \epsilon), B(y, \epsilon)$ respectievelijk. Dit is nog altijd een redelijk abstracte voorstelling van zaken gegeven dat we ook nog over hoeken en loodrechte stand willen spreken en dit niet zo eenvoudig is in dit formalisme. Met andere woorden, we hebben nog een verdere specializatie nodig die verder reikt dan de afstands functie alleen. Nochtans kun je op deze manier een redelijk grote rijkdom aan resultaten bekomen door abstract te redeneren met deze drie axioma's waaraan d voldoet. Zulke veralgemening huist erin te stellen dat het afstandsbegrip een "locale" oorsprong heeft; het is te zeggen dat de afstand tussen twee punten in willekeurig kleine stukken gekapt kan worden. Dit leidt tot het begrip van pad-metriek: d is een pad metriek als en slechts als voor elke twee punten x, y er bestaat een z zodat

$$d(x, z) = d(y, z) = \frac{d(x, y)}{2}$$

met andere woorden, elke twee punten hebben een middelpunt. We zullen hier later nog een betere voorstelling van geven.

Laten we nu eens een equivalentie-relatie tussen twee topologische ruimten bestuderen; met andere woorden, wanneer zijn twee topologische ruimten hetzelfde? Om dat te bepalen gaan we nu vergelijkings-middelen bestuderen, het is te zeggen "topologische" afbeeldingen tussen twee topologische ruimten X, Y. Een afbeelding $f : X \to Y$ wordt gedefinieerd aan de hand van een deelverzameling F van het Cartesisch product $X \times Y$; F voldoet aan de eigenschap dat

voor elke $x \in X$ er precies een $y \in Y$ bestaat zodat $(x, y) \in F$. y wordt dan genoteerd als $f(x)$ en F is de grafiek van f; in mensentaal betekent dit dat elk element uit X precies een beeld heeft in Y. Betreffende afbeeldingen formuleren we nog de volgende extreme eigenschappen: (a) f is injectief indien $f(x) = f(x')$ impliceert dat $x = x'$ of elke x heeft een verschillend beeld (b) f is surjectief indien voor elke $y \in Y$ er een $x \in X$ bestaat zodat $f(x) = y$ of met andere woorden elke potentiele beeldwaarde is ook effectief gerealiseerd. Finaal noemen we f bijectief als en slects als ze injectief en surjectief is; bijectieve afbeeldingen zijn equivalenties tussen verzamelingen zoals we nu zullen zien. Laat $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ dan is $g \circ f : X \to Z : x \to g(f(x))$ de samenstelling van deze twee afbeeldingen. Toon nu aan dat $g \circ f$ injectief is als en slechts als g dat is op $f(X)$ en f dat is op X. Toon ook aan dat $g \circ f$ surjectief is als en slechts als g dat is op $f(X)$; finaal, toon aan dat $g \circ f$ een bijectie is als g, f dat zijn. Indien $f : X \to Y$ een bijectie is kunnen we uniek $f^{-1} : Y \to X$ definieren aan de hand van

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

of $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ waarbij id_X de eenheids afbeelding is op X. Leidt hieruit af dat

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

door gebruik te maken van de surjectiviteit van f. Finaal, toon aan dat f^{-1} ook een bijectie is; we zeggen dus dat X en Y equivalent zijn als en slechts als er een bijectie van X naar Y bestaat; gebruik makend van de voorgaande resultaten toon je aan dat deze relatie inderdaad reflexief, symmetrisch en transitief is. Nu komen we terug op topologische equivalenties $f : X \to Y$; een afbeelding f noemen we continue als en slechts als de inverse van elke open verzameling O in Y, $f^{-1}(O)$ terug open is in X. Voor een continue bijectie is f^{-1} ook continue indien $f(V)$ open is in Y. Indien een functie f voldoet aan deze eigenschap noemen we het een open afbeelding. Een voorbeeld van een continue bijectie waarvan de inverse niet continue is, is gegeven door $f : (-1, 1) \to (-1, 0] \times \mathbb{Z}_2 : x \to (-|x|, \theta(x))$ waarbij $|x| = -x$ als $x < 0$ en x als $x \geq 0$. $\theta(x) = 0$ voor $x \leq 0$ en 1 anders; finaal, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. De topologie die we leggen op $(-1, 0] \times \mathbb{Z}_2$ is deze van $(-1, 0]$ en is dus niet Hausdorff op $\{0, 1\}$. We hebben dat $f((-1, 0)) = (-1, 0) \times \{0\}$ is niet open terwijl $(-1, 0) \times \mathbb{Z}_2$ dat wel is. Een topologische equivalentie is dan gegeven door een bijectie f die continue en open is; controleer terug dat dit inderdaad een equivalentie relatie definieert.

We komen nu even terug op metrische topologieen en in het bijzonder alternatieve bepalingen van compactheid. Een rij $(x_i)_{i \in I}$ noemen we Cauchy als en slechts als voor elke $\epsilon > 0$, er bestaat een i, zodat voor alle $i \prec j, k$ we hebben dat $d(x_j, x_k) < \epsilon$. In mensentaal leest dit: als je maar voldoende ver in de rij kijkt dan liggen de punten willekeurig dicht bij elkaar. Zulke eigenschap suggereert het bestaan van een uniek limietpunt x; een metrische ruimte (X, d) waarvoor elke Cauchy rij een limietpunt heeft noemen we *compleet*. Indien een deelverzameling K compact is, dan hebben we dat elke rij $(x_i)_{i \in I}$ een deelrij heeft met een limiet-punt in K. Het bewijs is simpel, beschouw arbitraire eindige (omwille

van de compactheid) overdekkingen met ballen van straal $\frac{1}{n}$, dan vinden we een rij van ballen $B(y_n, \frac{1}{n})$ zodat eindige doorsneden $\cap_{n=1}^{m} B(y_n, \frac{1}{n})$ een oneindig aantal $x_i \in K$ bevat. Dit definieert een deelrij met limietpunt

$$x = \cap_{n=1}^{\infty} B(y_n, \frac{1}{n})$$

in K. Omgekeerd, stel dat elke rij in K een Cauchy deelrij met limietpunt in K heeft, dan is K compact. Kies een overdekking van K met open ballen - zonder beperking van de algemeenheid- $B(y_n, \epsilon_n)$ waarbij $n \in \mathbb{N}$ en stel nu dat er geen enkele eindige deelbedekking bestaat. Noteer dat we ons beperken tot aftelbare overdekkingen wat een kleine beperking van de algemeenheid inhoudt; de geinteresseerde lezer kan uitzoeken of dit enig "wezenlijk" verschil maakt of niet, mij boeit het alleszins niet. Definieer dan $B_m = \cup_{n=1}^{m} B(y_n, \epsilon_n)$, we bekomen dan dat voor elke m er een $m' > m$ bestaat zodat $B_k \cap \overline{B_m}^c \cap K \neq \emptyset$ voor elke $k > m'$. In het bijzonder bekomen we dus een rij (x_m) met de eigenschap dat voor elke m er een $m' > m$ bestaat zodat $x_k \in \overline{B_m}^c$ voor $k \geq m'$. Deze rij kan geen Cauchy deelrij met limietpunt x bevatten vermits $x \in B_m$ voor m voldoende groot wat een tegenstrijdigheid is. We hebben net bewezen dat een verzameling K compact is in een metrische topologie als en slechts als elke rij een Cauchy deelrij met limietpunt in K bevat. Toon nu de volgende eigenschappen aan:

- definieer op $\mathbb{R}$ de functie $d(x, y) = |y - x|$, toon aan dat deze een metriek vormt (makkelijk),
- toon aan dat in de metrische topologie op $\mathbb{R}$, het gesloten interval $[a, b]$ compact is (hint: redeneer vanuit de decimale getalvoorstelling) (moeilijk),
- zij X, Y twee topologische verzamelingen en definieer de product topologie $\tau(X \times Y)$ als de kleinste topologie die $\tau(X) \times \tau(Y)$ bevat, waarbij deze laatste als elementen $U \times V$ heeft met $U \in \tau(X)$ en $V \in \tau(V)$,
- toon aan dat het Cartesisch product van compacte verzamelingen $K_1 \times K_2$ compact is in de product topologie (gemiddeld),
- een metrische ruimte (X, d) is begrensd als en slechts als er een $M > 0$ bestaat zodat $d(x, y) \leq M$ voor alle $x, y \in X$; toon aan dat een compacte ruimte gesloten en begrensd is (makkelijk).

De lezer kan terecht nogmaals uiten dat dit allemaal veel te algemeen is en dat onze wereld specialistischer is in de zin dat bijvoorbeeld lichtstralen buigen en twisten rond elkaar op een continue manier en dat dit gedrag geometrisch bepaald is. Om dit gepast te beschrijven hebbben we de notie nodig van een locale inproduct ruimte wat we zullen bestuderen in hoofdstuk zes: dit leidt tot analytische meetkunde. Noteer hier nog hetvolgende; veronderstel dat $\gamma : [a, b] \to X$ een continue kromme van x naar y is en definieer de lengte $L(\gamma)$ van γ als

$$L(\gamma) = \sup_{a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}=b} \sum_{k=0}^{n} d(\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1}))$$

waar het sup staat voor het supremum van deze som genomen over alle eindige verdelingen $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = b$ van het gesloten interval $[a, b]$. Het supremum van een verzameling reeele getallen A is het kleinste getal dat groter of gelijk is aan elk getal $x \in A$. Het supremum wordt ook wel eens de bovengrens genoemd en je moet aantonen dat wat betreft de reeele getallen, het supremum altijd bestaat en uniek is door het getal $+\infty$ toe te voegen. Op een gelijkaardige manier definieer je het infimum of ondergrens en je toont nogmaals aan dat in de reeele getallen het infimum bestaat en uniek is. Wat betreft onze som noteer je dat indien je een interval $[t_k, t_{k+1}]$ in twee breekt door een punt $t_k < t_{k+\frac{1}{2}} < t_{k+1}$ toe te voegen de som verhoogt. Dus een verfijning van de opdeling van het interval $[a, b]$ leidt tot een hogere som door gebruik te maken van de driehoeksongelijkheid.

Nu komen we tot ons hoofd resultaat; een complete metrische ruimte (X, d) definieert een pad-metriek d als en slechts als

$$d(x, y) = \min_{\gamma:[a,b]\to X, \gamma(a)=x, \gamma(b)=y} L(\gamma)$$

in andere woorden wanneer de afstand tussen twee punten gelijk is aan de minimale lengte van een kromme die x met y verbindt. Je bewijst dit zelf: indien d een padmetriek is maak je voortdurend gebruik van de middelpunt eigenschap om zo'n kromme te construeren en je begint met aan te tonen dat steeds $L(\gamma) \geq d(x, y)$ wat simpel volgt uit de driehoeksongelijkheid. Omgekeerd, indien zo'n kromme bestaat heb je uiteraard een middelpunt. Een kromme die de lengte minimaliseert noemen we een geodeet en in een padmetrische ruimte is de lengte van een geodeet gelijk aan de afstand tussen twee punten. Later zullen we nog tot een meer specialistische karakterisatie van geodeten komen wanneer we meer structuur eisen. Nogmaals, met deze primitieve begrippen kun je al een heel eind erg abstract redeneren en vooral Mikhail Gromov en Peter Anderson zijn hier specialisten in; indien je verder over deze erg primitieve metrische ruimten iets wilt leren, moet je hun werk erop naslaan.

Zoals je opmerkt is onze taal nog niet rijk genoeg om te spreken over begrippen zoals loodrechte stand, hoeken en dergelijke alhoewel dit in sommige gevallen mogelijk is. Je leert dan ook dat dit boek specifieker en specifieker gaat worden, dat de taal rijker wordt, maar ook meer complex wat toelaat sterkere verbanden of stellingen te vinden. Compactheid of lokaal compactheid is een belangrijk begrip omdat het de (lokale) topologie "eindig" houdt in een zekere zin; niet lokaal compacte structuren laten vaak sommige wiskundige constructies niet toe omdat de ruimte te groot is, zoals het bijvoorbeeld het geval is voor integralen. We komen nu tot heel speciale bouwstenen: lijnstukken, driehoeken en pyramides alsook hoger dimensionale veralgemeningen hiervan. We zullen deze gebruiken om bepaalde "regelmatige" topologische ruimten te beschrijven en topologisch te karakteriseren: centraal staat hierin het concept van homologie wat op zich

weer aanleiding geeft tot een mooie abstracte wiskundige karakterisering.

Oefeningen.
De bedoeling van deze korte oefeningen is de lezer in te laten zien dat padmetrische ruimten een notie van continuiteit met zich meedragen die later naar een "gladde" structuur beperkt wordt wat de definitie van hoeken en loodrechte stand mogelijk maakt. Dit is ook het geval hier, maar de som van hoeken rond een punt hoeft niet gelijk te zijn aan 2π wat bevoorbeeld het geval is voor de top van een kegel. Deze uitzondering vertaalt zich in het gegeven dat je de top niet kunt uitvlakken wat wel het geval is lokaal voor punten op de mantel. Deze laatste definieren een raakvlak of oneindig kleine Euclidische structuur wat niet het geval is voor de top. De volgende definities zijn ook toepasbaar op de top.

- Neem een punt x en beschouw een rij van naburige paren van punten y_n, z_n gelegen op gelijke afstand $d(x, y_n) = d(x, z_n)$ van x op twee verschillende geodeten vertrekkende vanuit x zodat in de limiet voor n naar oneindig x het limietpunt is. Indien de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x,y_n)^2 + d(x,z_n)^2 - d(y_n,z_n)^2}{2d(x,y_n)d(x,z_n)}$$

  bestaat stellen we deze gelijk aan $\cos(\theta)$ waarbij θ de hoek is in radialen tussen de twee geodeten.

- Toon aan dat de totale hoek rond de top van een kegel (a) goed gedefinieerd is (hangt niet af van de opsplitsing in deelhoekjes) (b) kleiner is dan 2π.

- Construeer met knip en plakwerk een ruimte met openingshoek groter dan 2π; ruimten het voormalige type noemen we sferisch en het laatste hyperbolisch.

- Alexandrov kromming: neem de situatie van het eerste puntje en beschouw de midpunten r_n tussen y_n, z_n en neem limiet voor n naar oneindig en beschouw de limiet R van de grootheid

$$R_n(y,z) = \frac{d(x,y_n)^2 + d(x,z_n)^2 - 2d(x,r_n)^2}{d(x,y_n)^2 d(x,z_n)^2 \sin^2(\theta_x(y_n,z_n))}$$

  die dimensie één over meter kwadraat heeft. Symmetrizeer over de zijden en verkrijg een grootheid die alleen van de driehoek afhangt.

- Indien $R < 0$, dan is de ruimte hyperbolisch; in het andere geval is ze sferisch.

- Men kan deze constructie verder uitbreiden en een formule bekomen voor de zogenaamde Riemann tensor; neem x en punten a_m, b_n, c_n, d_n op vier geodeten vanuit x, beschouw midpunten r_n tussen a_n, b_n alsook s_n tussen a_n en c_n, t_n tussen b_n en c_n, u_n tussen a_n en d_n, v_n tussen b_n en d_n en finaal w_n tussen c_n en d_n. De geassocieerde grootheid die we berekenen is

$$T_n(a,c,b,d) = \frac{d(x,a_n)d(x,b_n) - d(x,a_n)d(x,d_n) - d(x,c_n)d(x,b_n) + d(x,c_n)d(x,d_n)}{V_x(a_n,b_n,c_n,d_n)}$$

$$\frac{d(x,r_n)d(x,c_n) - d(x,r_n)d(x,d_n) + d(x,w_n)d(x,a_n) - d(x,w_n)d(x,b_n)}{V_x(a_n,b_n,c_n,d_n)}$$

$$\frac{-d(x,t_n)d(x,a_n) + d(x,t_n)d(x,d_n) - d(x,u_n)d(x,c_n) + d(x,u_n)d(x,b_n)}{V_x(a_n,b_n,c_n,d_n)}$$

$$+\frac{2d(x,r_n)d(x,w_n) - 2d(x,u_n)d(x,t_n)}{V_x(a_n,b_n,c_n,d_n)}.$$

  Dit resulteert in

$$T_n(a,c,a,c) = \frac{d(x,a_n)^2 - 2d(x,a_n)d(x,c_n) + d(x,c_n)^2}{V_x(a_n,c_n)^2}$$

$$+\frac{2d(x,a_n)d(x,c_n) - 2d(x,t_n)^2}{V_x(a_n,c_n)^2} = R_n(a,c)$$

  wat de juiste uitdrukking oplevert. Je controleert bovendien dat de eerste Bianchi identiteit geldt; het is te zeggen

$$T_n(a,c,b,d) + T_n(c,b,a,d) + T_n(b,a,c,d) = 0.$$

- Construeer hogere krommings invarianten op die manier door sequentieel hogere midpunten te nemen.

- Construeer de volume vorm

$$V_n(a_1,\ldots,a_n)^2 = \left(\prod_{i=1}^n d(x,a_i)\right)^2 \sum_{\sigma\in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n \cos(\theta(i,\sigma(i))).$$

- Definieer de metriek

$$g_x^\epsilon(a,b) = \frac{d(x,a)d(x,b)\cos(\theta_x(a,b))}{\epsilon^2}$$

  en definieer een inverse metriek $g_x^\epsilon(\widehat{a},\widehat{b})$ op een algemene metrische ruimte aan de hand van, $\widehat{a}(b) = \delta(a,b)$ met

$$\int_V d\mu_d(a) f(a)\delta(a,b) = f(b)$$

waarbij $d\mu_d$ de Hausdorff maat is gedefinieerd door de metriek d en V, a zowel als b bevat. Deze laatste is gedefinieerd door bollen van straal r te stacken met bollen van kleinere straal en voorop te stellen dat

$$Vol(x,r) = \alpha r^{d_H}$$

in de limiet voor r naar nul en d_H is de zogenaamde Hausdorff dimensie. In het bijzonder moet dus

$$\sum_{\text{Kleine ballen } B(x_i,r_i)\in B(y,r)} \alpha r_i^{d_H} = \alpha r^{d_H}$$

in die limiet. De definitie is nu dat

$$\int_{B(x,\epsilon)} d\mu_d(b) g_x^\epsilon(\widehat{a},\widehat{b}) g_x^\epsilon(b,c) = \delta(a,c).$$

Indien de ruimte een lineaire structuur heeft, koppel deze definities aan de gewoonlijke door de limiet ϵ naar nul te nemen.

- Definieer nu de Ricci "tensor" op schaal ϵ door de

$$T_x^\epsilon(a,b) := \int_{B(x,\epsilon)} d\mu_d(k) \int_{B(x,\epsilon)} d\mu_d(l) g_x^\epsilon(\widehat{k},\widehat{l}) T_x(k,a,l,b)$$

en een Ricci scalar door

$$T_x^\epsilon := \int_{B(x,\epsilon)} d\mu_d(k) \int_{B(x,\epsilon)} d\mu_d(l) T_x^\epsilon(k,l).$$

De Einstein functie is dan gedefinieerd, in het Riemannse geval, door

$$G_x^\epsilon(a,b) = T_x^\epsilon(a,b) - \kappa(\epsilon, d_H) T_x^\epsilon g_x^\epsilon(a,b).$$

Oefening: bepaal een geschikte definitie voor κ.

Chapter 5

Simpliciale homologie.

Waar de vorige drie hoofdstukken erg abstract waren, beginnen we hier te werken met meer tastbare voorwerpen, dingen die we allemaal wel kennen uit het dagdagelijkse leven. We gaan hier op een hoger niveau leren mee omgaan; het is te zeggen op een meer abstracte manier dan gewoonlijk. Dit heeft zo zijn voordelen vermits het ons toelaat met deze objecten te *rekenen*; dit is eigenlijk het hoofdmirakel van abstractie, dat het ons toelaat dingen te doen en in te zien. De topologische ruimten die we gaan bestuderen zijn gemodelleerd aan de hand van de n-dimensionale reeele ruimte

$$\mathbb{R}^n = \times_{i=1}^n \mathbb{R} = \{(x_i)_{i=1}^n | x_i \in \mathbb{R}\}$$

welke de verzameling is van de n-koppels van reeele getallen uitgerust met de product metrische topologie van $\mathbb{R}$. Men kan de notie van een som uitbreiden als

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$$

alsook heeft men het begrip van de *scalaire* vermenigvuldiging van een reeel getal met een n-koppel of *vector* door

$$r.(x_i) = (rx_i).$$

Meer algemeen, zij R een veld en $G, +$ een commutatieve groep, dan noemen we G een R moduul indien er een scalaire vermenigvuldiging bestaat zodat

$$1.g = g;\ (rs).g = r.(s.g);\ (r+s).g = r.g + s.g;\ r.(g_1 + g_2) = r.g_1 + r.g_2$$

voor alle $r, s \in R$ en $g, g_1, g_2 \in G$. Indien $R = \mathbb{R}$ noemen we het moduul ook wel een reeele vector ruimte. In $\mathbb{R}^n, +$ hebben we de speciale vectoren e_i, die een 1 bevatten op de i-de plaats en nul anders; hiervoor geldt dat

$$\sum_{i=1}^{n} r_i.e_i = 0$$

als en slechts als alle $r_i = 0$ en bovendien hebben we dat alle vectoren (uniek) geschreven kunnen worden op die manier, dus als $\sum_{i=1}^{n} r_i.e_i$. Indien deze twee eigenschappen gelden voor een verzameling van vectoren $\{v_i | i = 1 \dots m\}$, dan noemen we $\{v_i | i = 1 \dots m\}$ een *basis*. Je merkt op dat we hier twee getallen gebruikt hebben, n voor de e_i en m voor de v_j; het is nu een koud kunstje om aan te tonen dat $n = m$. De reden is devolgende, omdat e_i een basis is kun je v_j uniek schrijven als

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i e_i$$

en omgekeerd

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} e_i^j v_j.$$

Dus,

$$\sum_{i=1}^{n} v_j^i e_i^k = \delta_j^k;\ j, k : 1 \dots m$$

en

$$\sum_{j=1}^{m} e_i^j v_j^l = \delta_i^l;\ i, l : 1 \dots n$$

waarbij $\delta_j^k = 1$ als en slechts als $j = k$ en nul anders. Dit systeem van vergelijkingen is symmetrisch in e en v en dus moet $m = n$ gegeven dat beide afbeeldingen injectief moeten zijn. Dus n is een basis *invariant* en noemen we de dimensie van $\mathbb{R}^n, +$. Nu begrijpen we voldoende over reeele vectorruimten om onze speciale bouwsteentjes te gaan definieren; wanneer we deze hebben kunnen we concrete ruimten zoals simpliciale complexen gaan bouwen.

Hetgeen wat volgt is een veralgemening van eenvoudig knip en plakwerk van hoger dimensionele driehoekjes en pyramides. We kunnen zogenaamde Euclidische lichamen construeren op die manier en de ouderwetse aanpak naar classificatie van topologische ruimten verliep traditioneel op deze manier. Echter, hogere redeneervormen die minder constructivistisch zijn kunnen ook leiden tot deze theorie in slechts een aantal lijnen. Neem de ruimte $\mathbb{R}^{n+1}$ en beschouw een basis $v_i; i = 0 \dots n$, dan is het n simplex $(v_0 v_1 \dots v_n)$ gedefinieerd als de gesloten ruimte

$$(v_0 v_1 \dots v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i | \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Dit is allemaal een beetje abstract, om een idee te krijgen van hoe deze ruimte eruit ziet nemen we een voorbeeld in $0, 1, 2, 3$ dimensies. Een nul dimensionaal simplex (v_0) is gewoon een punt op een rechte; een één dimensionaal simplex is het lijnstuk $(v_0 v_1)$ in het vlak $\mathbb{R}^2$. Het tweedimensionaal simplex $(v_0 v_1 v_2)$ is een driehoek in $\mathbb{R}^3$ terwijl finaal $(v_0 v_1 v_2 v_3)$ een pyramide is in $\mathbb{R}^4$. In het algemeen is het simplex $(v_0 v_1 \dots v_n)$ convex wat betekent dat het lijnstuk tussen twee

punten $x, y \in (v_0 v_1 \dots v_n)$ volledig tot $(v_0 v_1 \dots v_n)$ behoort. Het lijnstuk tussen twee punten x, y is de verzameling

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y | 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Punten van het simplex die niet op het inwendige van een lijnstuk liggen dat volledig tot het simplex behoort noemen we extremale punten; toon bij wijze van oefening aan dat de enige extremale punten van $(v_0 v_1 \dots v_n)$ de punten v_i zijn. Men noemt het simplex ook wel eens de convexe omhulling van de punten $\{v_i | i = 0 \dots n\}$. We weten nu wat een moduul is alsook een simplex wat ons toelaat het begrip van een lineaire operator te definieren. Een afbeelding $A : V \to W$ tussen twee R modulen V, W is lineair als en slechts als

$$A(rv_1 + sv_2) = rA(v_1) + sA(v_2)$$

voor elke $r, s \in R$ en $v_i \in V$. Toon aan dat A injectief is als en slechts als $A(v) = 0$ impliceert dat $v = 0$. Vooraleer we verder gaan, bestuderen we enkele erg speciale ringen $\mathbb{Z}_n$. Deze is gedefinieerd als $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, met andere woorden de equivalentieklassen bij deling door n:

$$k \equiv l \Leftrightarrow k - l = rn \,\text{voor een bepaalde}\, r \in \mathbb{Z}.$$

De som en product zijn dan gedefinieerd door de equivalentieklasse te nemen van de gewone som en product in $\mathbb{Z}$. Toon aan dat dit goed gedefinieerd is en dat $\mathbb{Z}_n, +, .$ een veld is als en slechts als n een priemgetal is. Bij wijze van voorbeeld heeft men in $\mathbb{Z}_3$ dat $1 + 2 = 0, 2 + 2 = 1$; $\mathbb{Z}_3$ is ook voorgesteld door $\{-1, 0, 1\}$. Nu gaan we een beetje abstracter werken: eigenlijk hebben we helemaal niet nodig dat $v_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, dit was eigenlijk alleen maar goed voor de voorstelling of representatie. Vanaf nu zijn v_i, w_j gewoon namen voor punten die niet in een vooraf gegeven lineaire ruimte moeten leven. We definieren het $\mathbb{Z}$ moduul Z_n door het nemen van gehele veelvouden van simpliciale complexen, gedefinieerd door de simplices $(v_0, \dots, v_n)$ waarbij het omwisselen van v_i en v_j een min-teken veroorzaakt; het is te zeggen, de orientatie draait om. Een simpliciaal complex is gedefinieerd als de topologische ruimte bepaald door een som van simplices waarin elk simplex in de som, of haar orientatie tegengestelde, meerdere malen mag voorkomen. We definieren de randoperator $\partial_n : Z_n \to Z_{n-1}$ als de lineaire operator over $\mathbb{Z}$ die een simplex $(v_0 v_1 \dots v_n)$ afbeeldt op

$$\partial_n (v_0 v_1 \dots v_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (v_0 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_n).$$

Je controleert dan dat $\partial_{n-1} \partial_n S_n = 0$ gegeven een som van simplices S_n dat een simpliciaal complex definieert. Je controleert makkelijk dat de rand van een simplex een georienteerd simpliciaal complex is waarin de orientatie wel degelijk een rol speelt. In principe komt het overeen met het nemen van de rand van een georienteerd lichaaam; voor een bus melk is dit het karton, voor een bolschijf een georienteerde cirkel. We noemen een som T_k van $k = 0 \dots n$ simplices die

behoren tot een van de simplices in S_n gesloten indien $\partial_k T_k = 0$ en exact indien $T_k = \partial_{k+1} T_{k+1}$ for $k = 0 \ldots n-1$. Het is duidelijk dat exacte simplices gesloten zijn en we definieren de bijbehorende $\mathbb{Z}$ modulen $G_k(S_n)$ en $E_k(S_n)$, waarbij $E_n(S_n) = \{0\}$ en $G_0(S_n)$ is $\mathbb{Z}^V$ waarbij V het aantal punten of vertices is in S_n. Omwille van het voorgaande hebben we dat $E_k(S_n) \subseteq G_k(S_n)$ en we definieren de homologie-klassen $H_k(S_n)$ als het quotient

$$H_k(S_n) = \frac{G_k(S_n)}{E_k(S_n)}$$

wat niks anders is dan het $\mathbb{Z}$ moduul van $E_k(S_n)$ equivalentieklassen in $G_k(S_n)$. Hier, twee gesloten simplices T_k, Y_k zijn equivalent wanneer $T_k - Y_k \in E_k(S_n)$ en de lezer noteert dat $H_k(S_n)$ niet afhangt van de niet nul coefficienten van de n simplices in S_n en dus effectief een functie is van het simpliciaal complex gedefinieerd door S_n. Zover de algemene theorie voor simpliciale complexen, we komen nu tot de erg belangrijke deeltheorie van topologische ruimten A die homeomorf zijn aan een simpliciaal complex S_n; hier bestaat de meest belangrijke stap erin aan te tonen dat $H_k(A)$ goed gedefinieerd kan worden vermits homeomorfe simpliciale sommen dezelfde homologie-modulen definieren. De lezer die wil kan trachten dit zelf te bewijzen als een moeilijke oefening maar het statement zelf moet voor iedereen intuitief duidelijk zijn. De dimensie van $H_k(S_n)$ wordt het k-de Betti getal b_k genoemd van het simpliciaal complex S_n; de lezer maakt nu de volgende oefeningen, neem een boloppervlak en toon aan dat $b_2 = 1, b_1 = 0, b_0 = 1$. De twee torus T_2 wordt gevormd door een vierkant te nemen en tegengestelde zijden aan elkaar te plakken, toon hier aan dat $b_2 = 1, b_1 = 2, b_0 = 1$. In het algemeen definieert men het Euler getal van een twee dimensionaal simpliciaal complex S_2 als

$$\chi(S_2) = D - L + V$$

waar D het aantal driehoeken is en L het aantal lijnstukken. Men kan aantonen dat het Euler getal een topologische invariant is; bereken dat het Euler getal van het boloppervlak gelijk is aan $2 = b_2 - b_0 + b_1 = 1 - 0 + 1$ en dat van de torus $0 = 1 - 2 + 1$. In het algemeen toont men aan dat

$$\chi(S_n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i V_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b_{n-i}$$

waarbij V_i het aantal i dimensionale sub-simplices is. Om aan de berekening van de dimensie van de homologie klassen te beginnen, noteer dat een element van $H_k(S_n)$ correspondeert met een gesloten k dimensionaal oppervlak dat niet tot een punt vervormd kan worden. Wat betreft b_1 op het boloppervlak is het duidelijk dat elke gesloten kromme tot een punt herleid kan worden, terwijl op de twee torus of autoband er twee fundamentele cirkels bestaan. We gaan verder met devolgende oefening: neem twee, twee dimensionale oppervlakken A_2 en B_2 en knip uit beiden een cirkelschijf. Plak nu de overblijfselen aan elkaar langs de rand van de cirkel, dan bekomen we een nieuwe topologische

ruimte die we $A_2 \diamond B_2$ noemen. Toon aan dat $\diamond$ associatief en commutatief is met eenheidselement het twee dimensionaal boloppervlak S^2. Bereken dat het Euler getal van het n-voudig crossproduct van T_2 gelijk is aan $2-2n$; meer algemeen is

$$\chi(A_2 \diamond B_2) = \chi(A_2) + \chi(B_2) - 2.$$

Later gaan we het begrip varieteit bestuderen en een van de belangrijkste resultaten uit de topologie is dat elke gesloten, compacte, samenhangende en orienteerbare twee dimensionale varieteit homeomorf is met S^2 of een n-voudig product $T_2 \diamond T_2 \diamond \ldots \diamond T_2$. Dit betekent dat gesloten, compacte, samenhangende en orienteerbare twee dimensionale varieteiten volledig gekarakteriseerd zijn, topologisch, door het Euler getal. Voor gesloten varieteiten toont men aan dat $b_{n-i} = b_i$, de zogenaamde Betti dualiteit door een notie van dualiteit $\star$ te definieren zodat $S_n^\star$ homeomorf is aan S_n en $H_k(S_n)$ bijectief wordt afgebeeld op $H_{n-k}(S_n^\star)$. Je kunt jezelf amuseren door $\star$ te vinden als de natuurlijke veralgemening van devolgende operatie op een eendimensionaal S_1: beeldt elke rechte r af op een punt $r^\star$ en elk punt p op een rechte $p^\star$ zodat $r^\star, s^\star$ verbonden worden door $p^\star$ als en slechts als p behoort tot r, s. $S_1^\star$ is een gesloten simpliciaal complex als S_1 dat is, maar kan een verschillend Euler getal hebben indien S_1 geen varieteit is. Dus de varieteits voorwaarde is echt nodig en Betti dualiteit geldt dus niet voor gesloten simpliciale complexen. Toon aan dat twee cirkels die een gemeenschappelijk punt hebben, een voorbeeld leveren van zo'n ruimte. De notie van varieteit is dus wel echt speciaal en ons resultaat in twee dimensies is niet veralgemeenbaar naar hogere dimensies toe; drie dimensionale varieteiten zijn zeer moeilijk te classificeren en het Euler getal volstaat bijlange na niet. Hier stoppen we wat betreft simpliciale homologie; nu gaan we op een hoger plan redeneren. De ganse simpliciale homologie kan samengevat worden als een ketting van operaties $\partial_k : Z_k(S_n) \to Z_{k-1}(S_n)$ met $\partial_0 : Z_0(S_n) \to 0$ en $\partial_{k+1}\partial_k = 0$. Dit noemen we een chain en deze objecten genieten vele mooie abstracte eigenschappen die veel primitiever zijn dan het ruimtelijk concept waarmee we vertrokken zijn. Een beginpunt voor hogere wiskunde dus!

Het is duidelijk, vanuit het simpliciaal standpunt, dat topologische ruimten van dimensie n volledig en uniek geklassificeerd worden aan de hand van de Betti getallen. Later bestuderen we Betti getallen vanuit het standpunt van vectorvelden, akin Morse theorie, alsook de gesloten differentiaalvormen die volledig bepaald worden aan de hand van de cohomologie.

Oefening: bewijs het vermoeden van Poincaré.
Het vemoeden van Poincaré is dat elke n dimensionale compacte, gesloten topologische ruimte $\mathcal{M}$ die padsamenhangend is waarvoor de eerste homologieklasse triviaal is, homeomorf is aan de n dimensionale sfeer.

- Toon aan $\mathcal{M}$ padmetrizeerbaar is, met andere woorden een padmetriek d toelaat.
- Neem een willekeurig punt p en toon aan dat voor voldoend kleine r, het

oppervlak $L_r := \{x|d(p,x) = r\}$ homeomorf is aan de $n-1$ dimensionale sfeer S^{n-1}.

- Toon aan dat er een eerste kritisch punt r_0 bestaat waarvoor L_{r_0} geen sfeer meer is.
- Oftewel is L_{r_0} een punt in welk geval we de stelling bewezen hebben oftewel is het een gesloiten compacte $n-1$ dimensionale topologische ruimte verkregen uit de voorgaande door het identificeren van een eindig aantal punten of het contracteren van $n-2$ sferen tot een punt.
- Toon aan dat de opeenvolgende samenhangende componenten bekomen door het opblazen of splitten van deze punten niet contacteerbaar zijn tot een punt, tenzij het een $n-1$ sfeer betreft.
- Vervolgens, om de topologische ruimte te sluiten moeten de componenten, verschillend van een S^{n-1}, aaneengeplakt worden wat leidt tot een niet triviale eerste homologie wat verboden is.
- Bijgevolg zijn alle gespleten componenten sferen en is samenvoegen verboden. Conclusie: $\mathcal{M}$ is een n sfeer.

Simpliciale gravitatie.
Simpliciale metrische ruimten zijn erg eenvoudig en volledig gekarakteriseerd door afstanden $d(v_0v_1)$ op de lijnstukken (v_0v_1). Men heeft devolgende operatoren: $x_w(v_0 \dots v_i) = (wv_0 \dots v_i)$ en $\partial_w(wv_0 \dots v_i) = (v_0 \dots v_i)$ indien geen enkel van de v_j gelijk is aan w. Indien de laatste voorwaarde geschonden is hebben we het nulresultaat en $\partial_w(w) = \mathbf{1}$, $x_w\mathbf{1} = (w)$ waarbij $\mathbf{1} = ()$ het lege simplex is; hieruit volgt dat $(x_w)^2 = 0$ alsook $(\partial_w)^2 = 0$. Men verifieert dat $\partial = \sum_{w\in S} \partial_w$ wat letterlijk aantoont dat ∂_w de geschikte lokale afgeleide vormt gedefinieerd door de randoperator ∂. Het lege simplex is inderdaad de eenheid ten aanzien van het kruisproduct $*$ gedefinieerd door

$$(v_0 \dots v_i) * (w_0 \dots w_j) = (v_0 \dots v_i w_0 \dots w_j).$$

Men verifieert eenvoudig dat $x_w x_v = -x_v x_w$ en idem voor de operatoren ∂_v, ∂_w. Bijgevolg spannen de creatieoperatoren van een vertex een Grassmann algebra op; bovendien geldt op de vectorruimte van simplices dat

$$\partial_v x_w + x_w \partial_v = \delta(v,w)$$

zodat de ∂_v fermionische annihilatie operatoren voorstellen. Bosonische lijn operatoren worden dan gevormd aan de hand van

$$\partial_{(vw)} = \partial_w \partial_v$$

en deze operator voldoet aan

$$\partial_{(vw)}(yz) = \delta(v,y)\delta(w,z) - \delta(v,z)\delta(w,y)$$

wat een georienteerde afgeleide oplevert. De simplex algebra is gedefinieerd door polynomen opgespannen door monomen die formele producten zijn van $(v_0 \dots v_j)$ voor elke $j : 0 \dots n$; let op, het formeel product is *niet* het kruisproduct wat impliceert dat $\mathbf{1}$ niet de eenheid meer is. Vermits op algemene ruimten birelaties een evaluatie verdienen via de metriek d is de functie-algebra daar gelimiteerd tot monomen van $(v_0 v_1)$ gegeven dat de andere simplices geen onafhankelijke veranderlijken opleveren. Het is makkelijk in te zien dat vermits $\mathbf{1}$ bosonisch is en ∂_v, x_w fermionische afleidingsoperatoren zijn op de functie-algebra, men bekomt

$$\partial_v((w)Q) = \partial_v((x_w\mathbf{1})Q) = \partial_v x_w(\mathbf{1}Q) - \partial_v(\mathbf{1}x_wQ) = (k+1)\delta(v,w)\mathbf{1}Q - x_w(\mathbf{1}\partial_vQ) - \partial_v(\mathbf{1}x_wQ)$$

wat reduceert tot

$$(k+1)\delta(v,w)\mathbf{1}Q - (x_w)\partial_vQ - \mathbf{1}x_w\partial_vQ - \mathbf{1}\partial_v x_wQ = \delta(v,w)\mathbf{1}Q - (x_w)\partial_vQ$$

waarbij k de graad is van de monoom Q, met andere woorden het aantal factoren. Dit volgt onmiddelijk uit de Leibniz regel vermits de operator

$$x_w\partial_v + \partial_v x_w = \delta(v,w)$$

bosonisch is. Dus, de even simplex variabelen gedragen zich bosonisch en de oneven gevallen fermionisch. Inderdaad,

$$\partial_v((wz)Q) = \partial_v((x_w(z))Q) = \partial_v(x_w((z)Q) + ((z)x_wQ)) = -x_w\partial_v((z)Q) - (z)(\partial_v x_wQ)$$

wat reduceert tot

$$= x_w((z)\partial_vQ) - (z)(\partial_v x_wQ) = (wz)\partial_vQ.$$

Inderdaad, gewone afgeleiden van een functie zijn gedefinieerd aan de hand van de infinitisemale intervallen $(x-|\epsilon|, x+|\epsilon|)$ waarbij $f(v+\epsilon, v-\epsilon)$ geidentificeerd wordt met de coordinatenfunctie $f(x)$. Dit is logisch vermits de $v\pm\epsilon$ fermionisch, en onafhankelijk, zijn en intervallen $(v-\epsilon, v+\epsilon) \sim x$ bosonisch zijn. Noteer dat producten van de vorm $(v-\epsilon)(v+\epsilon)$ verder afgeleid kunnen worden zodat uiteindelijk

$$\partial_x f(x) = \mathbf{L}\left[\partial_{(v-\epsilon,v+\epsilon)} f(v-\epsilon, v+\epsilon)\right]$$

waarbij $\mathbf{L}$ alleen monomen weerhoudt die exclusief van de lijnstukken afhangen. Dit fenomeen treedt duidelijk op in de veelterm $(vw)^2$ wiens (vw) afgeleide gelijk is aan

$$2(vw) - 2(v)(w).$$

Teneinde de gewoonlijke commutatie-relaties op de functie algebra gegenereerd door (vw) te bekomen definieren we

$$\widehat{x}_{(vw)}Q := x_{(vw)}x_{\mathbf{1}}Q$$

waarbij Q een veelterm-functie is op de lijnstukken (r,s) en $x_{(vw)}$ is een bosonische Leibniz operatie gedefinieerd door

$$x_{(vw)}(v_0 \dots v_j) = (vwv_0 \dots v_j).$$

Per definitie heb je dat

$$x_{(vw)}(rs) = 0$$

als en slechts als r of s gelijk is aan v, w alsook

$$(x_{(vw)} + x_{(rs)})((vw) + (rs)) = 2(vwrs)$$

en dit laatste verdwijnt tenzij (r, s) de overstaande zijde is van eenzelfde tetraeder wat we vanaf nu zullen verbieden en in het bijzonder niet van toepassing is op geodeten. Voor geodeten

$$\gamma(v_0 v_i) := (v_0 v_1) + (v_1 v_2) + \ldots (v_{i-1} v_i)$$

hebben we dus

$$x_{\gamma(v_0 v_i)} := \sum_{j=1}^{i} x_{(v_{j-1} v_j)}$$

en alzo

$$x_{\gamma(v_0 v_i)} \gamma(v_0, v_i) = 0.$$

Vervolgens definieren we afgeleiden

$$\partial_{\gamma(v_0, v_i)} := \sum_{j=1}^{i} \partial_{(v_{j-1} v_j)}$$

en beschouwen de operator

$$\widehat{\partial}_{\gamma(v_0, v_i)} = \mathbf{L} \circ \partial_{\gamma(v_0, v_i)}$$

en je berekent dat

$$\widehat{\partial}_{\gamma(v_0, v_i)} \widehat{x}_{\gamma(v_0, v_i)} - \widehat{x}_{\gamma(v_0, v_i)} \widehat{\partial}_{\gamma(v_0, v_i)} = 1$$

op de functie algebra gegenereerd door monomen Q van de vorm $(\gamma(v_0, v_i))^k$ waarbij $k > 0$. We hebben dus nu een middel om gewoon aan fysica te gaan doen; in het bijzonder,

$$\mathbf{E} P(\gamma(v_0, v_i)) = P(\sum_{j=1}^{i} d(v_{j-1} v_j))$$

is de evaluatie functie. Breidt deze theorie verder uit en implementeer de Fourier-transform uit hoofdstuk veertien op conische tangente ruimtes. Hint: integreer in "hyperbolische" of "sferische" coordinaten door de $n-1$ sfeer te vervangen door het gepast level oppervlak $H^{n-1}(\epsilon, v_0) = \{x | d(v_0, x) = \epsilon\}$ voor ϵ voldoende klein zodat $H^{n-1}(\epsilon, v_0)$ in de ster omgeving van v_0 ligt. Zie hoofdstuk dertien voor meer informatie hieromtrent.

Betti getallen.
Geef een voorbeeld van twee georienteerde ruimtes met dezelfde Betti getallen en ontwikkel het homologie concept verder teneinde deze identificaties op het niveau van de Betti getallen te vermijden (zeer moeilijk).

Chapter 6

Lineaire ruimten en operatoren.

De lezer doet er goed aan het pad naar meer specializering in dit boek te overlopen: we zijn vertrokken van verzamelingenleer en daar mag echt erg veel, dan zijn we iets beperkter gaan kijken naar topologie en simpliciale homologie toe om uiteindelijk op de notie varieteit te botsen. Deze heeft erg bijzondere topologische eigenschappen en de volgende twee hoofdstukken zijn gewijd aan het pad naar de varieteit in de meest algemene zin van het woord. Het voordeel van meer gespecifieerde structuren is uiteraard dat je er meer kunt over zeggen, dat ze controleerbaar zijn; hierin anticipeert de wiskundige dikwijls een onbewezen stabiliteitsresultaat, dat structuren die bijna aan die spelregels voldoen ook ongeveer dezelfde eigenschappen genieten. Dat is de werkelijke kracht van subtiele vereenvoudiging, dat zij ons toelaat dingen te begrijpen die niet gelden vanuit een hoger standpunt. Albert Einstein praatte hierover in de termen dat de dingen zo eenvoudig als mogelijk voorgesteld moesten worden maar niet te eenvoudig; te veel beperkingen lopen namelijk het risico dat je veel dingen mist terwijl te weinig beperkingen je dikwijls met het probleem confronteren dat zelfs de meest simpele waarneming niet meer "verklaarbaar" is. Wetenschap is de kunst om deze zeer fijne grens beter en beter af te tasten, stukje per stukje; geen dogmatische zekerheid, die heb je nooit, maar met rede en intelligentie "snuffelen".

In deze filosofie zijn lineaire ruimten te specialistisch maar we willen varieteiten bekijken als iets wat eruit ziet als een lineaire ruimte "op kleine schaal". Dus passen we nu een omgekeerde strategie toe, we keren eerst het "eenvoudige" geval binnenstebuiten vooraleer het monster in haar volle glorie te ontmaskeren. Een lineaire ruimte is een bi-moduul over de reeele of complexe getallen; het woord "bi" slaat op het gegeven dat de scalaire vermenigvuldiging zowel langs links als rechts kan gebeuren en dat beiden gelijk zijn aan elkaar. We noemen de lineaire ruimte eindig dimensionaal wanneer de dimensie over het veld eindig is en

oneindig dimensionaal anders. De dimensie is nog steeds goed gedefinieerd als het aantal basis vectoren gegeven dat het bestaan van een basis aangetoond kan worden uit het keuze axioma van de verzamelingenleer.

Een lineaire afbeelding $A : V \to W$ tussen twee lineaire ruimten over hetzelfde veld is een functie die voldoet aan

$$A(r.v + s.w) = r.A(v) + s.A(w)$$

waarbij het punt telkens de scalaire vermenigvuldiging noteert. Evidenterwijs heeft men dat $A(0) = 0$ en dat $A(v) = A(w)$ als en slechts als $A(v - w) = 0$. Dus de zogenaamde kern van A, genoteerd door $\mathrm{Ker}(A) = \{v|A(v) = 0\}$ meet de afwijking van injectiviteit van A; elk beeldpunt $A(w)$ heeft als inverse $w + \mathrm{Ker}(A)$. De kern zelf is een vectorruimte, een zogenaamde deelruimte van V. Op dezelfde manier heeft men dat het zogenaamde beeld

$$\mathrm{Im}(A) = \{A(v)|v \in V\}$$

een deelruimte is van W. Het is nu vanzelfsprekend dat

$$\mathrm{Im}(A) \cong \frac{V}{\mathrm{Ker}(A)}$$

met andere woorden beide ruimten zijn isomorf. Inderdaad,

$$A : \frac{V}{\mathrm{Ker}(A)} \to \mathrm{Im}(A) : w + \mathrm{Ker}(A) \to A(w)$$

is lineair en bijectief wat de betekenis is van een isomorfisme. Een triviaal gevolg van deze stelling is dat

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(V)$$

waarbij "dim" staat voor de dimensie. Lineaire afbeeldingen kunnen voorgesteld worden ten opzichte van basissen e_i van V en f_j van W respectievelijk. Dit gaat als volgt

$$A(e_i) = \sum_{j=1}^{m} A_i^j f_j$$

j noemen we de rij-index en i de kolom-index; ten opzichte van een algemene vector $v = v^i e_i$ geeft dit

$$A(v) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} A_i^j v^i) f_j.$$

De samenstelling van twee lineaire afbeeldingen $A : V \to W$ en $B : W \to Z$ resulteert dan in het matrix product

$$(BA)_i^j = \sum_{k=1}^{m} B_k^j A_i^k$$

waarbij m de dimensie is van W. Voortaan laten we de sommatie-tekens weg wat bekend staat als de Einstein conventie; dus

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^j v^i$$

wordt genoteerd als

$$A_i^j v^i.$$

Een 2×3 matrix, oftewel een matrix met 2 rijen en 3 kolommen wordt voorgesteld als

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

en in een matrix product BA moet de kolom-dimensie van B gelijk zijn aan de rij-dimensie van A. Toon aan als een oefening dat

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 13 \\ 19 & 19 \end{pmatrix}.$$

Bewijs voor jezelf dat indien A, B 2×2 matrices zijn dat dan in het algemeen

$$AB - BA \neq 0$$

waarbij 0 hier staat voor de gepaste nulmatrix. Dit resultaat toont aan dat de matrixvermenigvuldiging in het algemeen niet-commutatief is en aldus hebben we een niet-commutatieve ring geconstrueerd vanuit een veld. Je kan je dus terecht afvragen of onze niet-conventionele, niet-commutatieve getalstelsels zoals de quaternionen en Clifford algebra's voorstelbaar zijn als matrices over de complexe getallen. Het antwoord is ja en er bestaan zelfs voorstellingen in verschillende dimensies: toon aan dat de reeele quaternionen geschreven kunnen worden als

$$q = \begin{pmatrix} a+ib & ic-d \\ ic+d & a-ib \end{pmatrix}$$

waarbij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Een andere schrijfwijze in termen van de Pauli matrices is

$$q = a.1 + ic.\sigma_1 + id.\sigma_2 + ib.\sigma_3.$$

Nu dat we een aantal essentiele kenmerken van matrixrekening gesnapt hebben komen we tot een niet onbelangrijk vraagstuk: bestaat er een basis e_i in V zodanig dat lineaire operatoren $A : V \to V$ een speciale, uiterst eenvoudige matrixvoorstelling hebben ten opzichte van e_i? Uiteraard is dit wat vaag geformuleerd maar probeer nu eens voor jezelf duidelijk te maken dat een willekeurige $n \times n$ matrix A bijna altijd kan geschreven worden als ODO^{-1} waarbij $OO^{-1} = 1_n = O^{-1}O$ en $D_i^j = \lambda_i \delta_i^j$ met $\delta_i^j = 1$ als en slechts als $i = j$ en nul anders. D is een zogenaamde diagonaal $n \times n$ matrix en λ_i zijn eigenwaarden die voldoen aan

$$A(Oe_i) = \lambda_i(Oe_i)$$

met andere woorden Oe_i is een eigenvector van A met eigenwaarde λ_i. O noemen we een invertiebele of omkeerbare $n \times n$ matrix. De redenering is echt poepsimpel hoor: in het algemeen is bijna elke matrix O invertiebel zodat O effectief n^2 vrijheidsgraden heeft; verder reduceert de afbeelding $O \to ODO^{-1}$ exact n dimensies indien alle λ_i in D verschillend zijn vermits $VDV^{-1} = ODO^{-1}$ impliceert dat $(V^{-1}O)D = D(V^{-1}O)$ zodat $V = OD'$ met D' diagonaal en daarom is een generieke D "orbit" $n^2 - n$ dimensionaal. Vermits het aantal vrijheidsgraden in D ook n is hebben we in totaal n^2 vrijheidsgraden en dus een "generieke" $n \times n$ matrix. Als oefening controleer je elke bewering in deze redenering. Vooraleer we verder gaan, bestuderen we eerst het effect van een basisverandering op de matrixvoorstelling van A. Zij $e'_i = O(e_i)$ dan is

$$A'^i_j e'_i = A(O(e_i)) = A(O^j_i e_j) = A^k_j O^j_i e_k$$

en aldus $A'^i_j = (O^{-1})^i_k A^k_l O^l_j$. Dus, generiek, bestaat er een basis ten opzichte van dewelke de matrixvoorstelling van A diagonaal is. Toon aan dat deze n eigenwaarden uniek zijn alsook de eigenvectoren (op een reeel getal na) insien alle λ_j verschillend zijn. Zijn er uitzonderingen op deze regel? Uiteraard! Bewijs dat de matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

voldoet aan $N^2 = 0$ en daarom niet diagonalizeerbaar is. De redenering gaat als volgt: veronderstel dat dit wel het geval is dan moet elke eigenwaarde nul zijn en aldus $N = 0$ in strijd met het gegeven. Deze uitzondering is botweg de enige ook in hogere dimensies en men kan hieruit de Cartan klassificatie uit afleiden. In twee dimensies leest die dat elke matrix A door geschikte keuze van basis uniek één van de volgende twee voorstellingswijzen heeft:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indien je dit resultaat, alsook de gepaste uitbreiding naar hogere dimensies toe, graag zou bewijzen wacht dan even tot we de notie van determinant gezien hebben die je toelaat het bestaan van eigenwaarden af te leiden. Een $n \times n$ matrix A kan nog op een andere manier bekeken worden dan de voorstelling van een lineaire afbeelding ten opzichte van een basis; het is te zeggen, men kan A unterpretereb als eeb geordende collectie van n kolom vectoren $A = (v_1, \ldots, v_n)$. Deze zienswijze laat toe A te bekijken als de notatie voor een simplex of *de* meerdimensionale kubus opgespannen door v_i. De determinant $\det(A)$ berekent het volume alsook de orientatie van die kubus indien de basisvectoren e_i loodrecht op elkaar staan. We leiden de vorm van $\det(A)$ af uit de voorwaarden waaraan het volume moet voldoen; ten eerste is det multilineair in de kolommen, het is te zeggen:

$$\det(v_1, \ldots, v_{i-1}, a.v_i + b.w_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) =$$

$$a\det(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)+b\det(v_1,\ldots,v_{i-1},w_i,v_{i+1},\ldots,v_n)$$

alsook nilpotentie wat betekent dat indien $v_i = v_j$ dan moet de determinant nul geven. Deze laatste voorwaarde drukt gewoon uit dat indien bepaalde assen samenvallen dan definieert de matrix een lager dimensionaal geheel. Finaal leggen we de normalizatie conditie op dat $\det(1_n) = 1$. Deze drie voorwaarden leggen de derminant volledig vast: uit de eerste en tweede voorwaarde leidt je af dat de determinant volledig antisymmetrisch is, het is te zeggen $\det(v_1,\ldots,,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_n) = -\det(v_1,\ldots,,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_n)$. Samen met de derde en eerste conditie bekom je dan dat

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) A^1_{\sigma(1)}\ldots A^n_{\sigma(n)}$$

waarbij σ een zogezegde permuatie is en sign het teken ervan. Omwille van de anti-symmetrie mag elke index slechts éénmaal voorkomen zodat een permutatie een bijectie is van $\{1,2,\ldots,n\}$ naar zichzelf en sign noteert dan het even of oneven karakter van de omwisselingen die men moet doorvoeren om van de eenheid te komen tot σ. Je toont aan dat de permuaties een niet commutatieve groep vormen S_n met $n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$ elementen en we geven het bewijs dat sign goed gedefinieerd is. Dit is een beetje technisch; noteer met (ij) de permutatie die i en j omwisselt van plaats dan is

$$\begin{aligned}(ik)(ij) &= (jk)(ik)\\ (ik)(jl) &= (jl)(ik)\\ (ik)(ij) &= (ij)(jk)\end{aligned}$$

voor verschillende i,j,k,l. Allereerst is het duidelijk dat elke permutatie te schrijven is als een product van dergelijke omwisselingen; gegeven een niet triviaal product van dergelijke omwisselingen voor de eenheid dan is het een koud kunstje om aan te tonen dat deze een even aantal van deze bevat door gebruik te maken van de hierbovenstaande regels. Inderdaad, gegeven $\sigma = l(ik)s(jk)$ waarbij l,s producten zijn van omwisselingen en l geen omwisseling bevat met de index k, toon dan aan dat je deze string kan herschrijven als $\sigma = ls'$ waarbij s' ook niet de index k bevat en evenveel omwisselingen heeft dan s. Op deze manier toon je aan dat σ een even aantal omwisselingen heeft. Hieruit volgt dat twee verschillende producten voor eender welke permutatie altijd verschillen op een even aantal omwisselingen. Dus de functie sign is goed gedefinieerd; toon aan dat de determinant van een 2×2 matrix gegeven is door

$$\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = ad-bc.$$

Toon nu de volgende eigenschappen aan

- $\mathrm{sign}(\rho\sigma) = \mathrm{sign}(\rho)\mathrm{sign}(\sigma)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dit laatste geldt vermits

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)(AB)^1_{\sigma(1)}\dots(AB)^n_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{m_1,\dots,m_n} \mathrm{sign}(\sigma)A^1_{m_1}\dots A^n_{m_n}B^{m_1}_{\sigma(1)}\dots B^{m_n}_{\sigma(n)}\end{aligned}$$

en in dit laatste product moet $m_1,\dots,m_n$ zelf een permutatie zijn, de gevallen waar dit niet zo is tellen op tot nul. Dit is makkelijk in te zien als volgt: veronderstel dat $m_i = m_j$ dan heb je voor elke σ dezelfde term met tegengesteld teken door de permutatie $\sigma(ij)$ te nemen. Dus we hebben dat

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{\sigma,\rho\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)A^1_{\rho(1)}\dots A^n_{\rho(n)}B^{\rho(1)}_{\sigma(1)}\dots B^{\rho(n)}_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma,\rho\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma\rho)A^1_{\rho(1)}\dots A^n_{\rho(n)}B^{1}_{\sigma(1)}\dots B^{n}_{\sigma(n)} \\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

In het bijzonder geldt dan dat $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. Dus de determinant van $A = (v_1,\dots,v_n)$ is verschillend van nul als en slechts als de v_i een basis vormen als en slechts als A invertiebel is. Toon aan dat de inverse van

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gegeven wordt door

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bestudeer de determinant voor 3×3 matrices en probeer een gelijkaardige formule te ontwikkelen voor de inverse van een matrix.

Nu komen we terug tot het bestuderen van het Cartan classificatie probleem en in het bijzonder het aantonen van het bestaan van eigenwaarden λ. λ is een eigenwaarde als en slechts als er bestaat een eigenvector v_λ zodat

$$A(v_\lambda) = \lambda v_\lambda.$$

Een andere manier om dit te zeggen is dat de kern van de operator $A-\lambda 1_n$ niet nul is wat dan weer waar is als en slechts als

$$\det(A-\lambda 1_n) = 0.$$

Het is hier dat determinanten nuttig worden omdat deze formule kan geinterpreteerd worden als een nulpuntsvergelijking voor een veelterm van n-de graad. Zoals we weten is deze veelterm volledig factorizeerbaar over $\mathbb{C}$ en hebben we dus in het algemeen n verschillende complexe eigenwaarden wat aantoont dat bijna elke matrix diagonalizeerbaar is; iets wat we al wisten. Werk nu eens

uit in twee dimensies wat er kan gebeuren als de twee complexe eigenwaarden samenvallen.

De aandachtige lezer heeft ondertussen al lang opgemerkt dat de determinant van een matrix een basisinvariant is; het is te zeggen

$$\det(O^{-1}AO) = \det(O)^{-1}\det(A)\det(O) = \det(A)$$

wat aantoont dat je peilt naar een eigenschap van de geassocieerde operator. Daarom merk je onmiddellijk op dat elke coefficient in de eigenwaarde veelterm $\det(A - \lambda 1_n)$ een invariant is van de operator. In het bijzonder heb je dus dat de invariant behorende bij de $n-1$ de macht in λ gelijk is aan $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$ waarbij het spoor Tr gegeven is door

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_i^i.$$

Controleer bij wijze van oefening op een expliciete manier dat het spoor inderdaad een invariant is en bestudeer de hogere orde invarianten. Tracht deze te schrijven in termen van het spoor; bijvoorbeeld toon aan in twee dimensies dat

$$2\det(A) = (\mathrm{Tr}(A))^2 - \mathrm{Tr}(A^2).$$

Toon aan dat indien je de eigenwaarde veelterm neemt en hierin λ vervangt door de matrix A zelf dat dan de resulterende matrix de nul matrix is. Dit is de stelling van Cayley Hamilton (hint: onderstel eerst dat A diagonalizeerbaar is en gebruik dan de definitie van een eigenwaarde als nulpunt van de eigenwaarde veelterm) en deze leest in twee dimensies als

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)1_2 = 0.$$

Toon finaal aan dat $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ en dat er daarom geen paar matrices A, B bestaan zodat

$$AB - BA = 1_n$$

een formule die bekend staat als de bosonische Heisenberg relatie. Zoek in twee dimensies daarintegen wel een paar matrices zodat

$$AB + BA = 1_2$$

hetgeen bekend staat als de fermionische Heisenberg relatie. Bosonen hebben dus een oneindig aantal dimensies nodig terwijl Fermionen leven in dimensies $n = 2^d$ waarbij hier $d = 1$. Tot slot definieren we de notie van transpositie A^T en complex toegevoegde $\overline{A}$ van een matrix A

$$(A^T)^i_j = A^j_i,\ (\overline{A})^i_j = \overline{A^i_j}.$$

Toon aan dat

$$(AB)^T = B^T A^T, (A^T)^T = A, (rA + sB)^T = rA^T + sB^T, (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

alsook gelijkaardige eigenschappen voor de complex toegevoegde. In het bijzonder is voor

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

ofwel rijen en kolommen worden omgedraaid. Toon aan dat

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

voldoet aan $N^T N + N N^T = 1_2, N^2 = 0$ en we noemen N een fermionische creatie-operator. Dit is voldoende voor je eerste kennismaking met dit onderwerp; in hetvolgende hoofdstuk gaan we hier veel dieper op in.

Oefeningen op Hermitische projectie operatoren.

- Zij P, Q Hermitische projectie operatoren wat wil zeggen dat $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $P^\dagger = P, Q^\dagger = Q$. Toon dan aan dat $P + Q$ een Hermitische projectie operator is als en slechts als $PQ = QP = 0$. Toon aan dat hetzelfde geldt voor PQ als en slechts als $PQ = QP$.

- Twee Hermitische projectie operatoren P, Q zijn orthogonaal als en slechts als $PQ = 0$; we zeggen dat $P \leq Q$ indien $QP = PQ = P$. Toon aan dat $\leq$ een partiele orde definieert op de verzameling van Hermitische projectie operatoren. In het bijzonder $P \leq Q$ en $Q \leq P$ impliceert dat $P = Q$. Ook, $P \leq Q$ en $Q \leq R$ leidt tot $P \leq R$.

- We noemen de verzameling van projectie operatoren op een vectorruimte, uitgerust met $\leq$, een rooster. Toon aan dat voor elke P, Q er een minimale projectie operator $P \vee Q$ bestaat zodat $P, Q \leq P \vee Q$ en elke R zodat $P, Q \leq R$ voldoet aan $R \leq P \vee Q$. Aan de andere kant bestaat een maximale projectie operator $P \wedge Q \leq P, Q$. Toon aan dat $\vee, \wedge$ voldoen aan de regel van de Morgan:

$$P \wedge (R \vee Q) = (P \wedge R) \vee (P \wedge Q).$$

- Toon aan dat het rooster een uniek minimum en maximumum heeft gegeven door 0 en 1 respectievelijk.

- Toon aan dat er minimale niet nul projectoren bestaan die we atomen noemen. Elke projectie operator kan geschreven worden als een som van orthogonale atomen (alle atomen staan loodrecht op elkaar).

Quantum logica.
Gegeven dat in de voorgaande oefening $\vee$ en $\wedge$ kunnen geinterpreteerd worden als “of” en “en” respectievelijk, is het mogelijke quantale logica op te zetten door

Hermitische projectie operatoren te gebruiken als proposities. Denk hierover na.

Niet commutatieve Quantum logica of quantum topologie.
We veralgemenen de operaties $\wedge$ and $\vee$ naar een context toe waarbinnen deze niet meer commuatatief zijn. Het is nauurlijk $\wedge$ en $\vee$ te bekijken als afbeeldingen $\wedge, \vee : P \times P \to P(x,y) \to x \wedge y$ waarbij P de ruimte is van proposities ofwel de lineaire ruimte van operatoren op een Euclidische ruimte. Definieer de mapping $S : P \times P \to P \times P : (x,y) \to (y,x)$ en beschouw $\wedge^{'(S,V)} := V \circ \wedge \circ S \circ V$ en $\vee^{'(S,V)} = W \circ \vee \circ S \circ V$ waarbij $V : P \times P \to P \times P$ invertiebel is alsook $W : P \to P$. Opdat $^{'(S,V)}$ zou voldoen aan $\left(\wedge^{'(S,V)}\right)^{'(S,V)} = \wedge$ is het nodig en voldoende dat $W^2 = 1$ alsook $S \circ V \circ S = 1$. We hebben dus een notie van dualiteit en kijken vervolgens naar de zelfduale bewerkingen:

$$\wedge^{'(S,V)} = \wedge, \vee^{'(S,V)} = \vee.$$

Het is natuurlijk eerst S symmetrische logica's op te stellen; deze zijn gegeven door

$$\wedge \circ S = \wedge, \vee \circ S = \vee.$$

Dit kan door bijvoorbeeld R te kiezen zodat

$$R \circ S = S \circ R$$

waarbij

$$\wedge = T \circ \wedge_c \circ R$$

en

$$W \circ T = T, R \circ V = R.$$

Dit kan alleen zijn indien T of R niet invertiebel zijn zodat we met logica met "informatieverlies" te maken hebben. We hebben hier gebruik gemaakt van de eigenschap dat $\wedge_c \circ S = \wedge_c$ waarbij deze laatste de klassieke "en" voorstelt. 'Werk nu deformaties op de de Morgan regel uit; het is te zeggen

$$a \wedge (b \vee c) = T(a \wedge_c (b \vee c))R = T(a \wedge_c (T'(b \vee_c c)R'))R.$$

Het is vervolgens natuurlijk een transformatie T' - $(\wedge_c, R)$ compatiebel te noemen indien $(a \wedge_c (T'd))R = T'(a \wedge_c d)R = ((T'a) \wedge_c d)R$. Evenzo is het natuurlijk R' - $(\wedge_c, R)$ compatiebel te noemen in de zin dat

$$(a \wedge_c (b \vee_c c)R')R = (a \wedge_c (b \vee_c c))RR'.$$

Om nog verder te gaan moeten we onderstellen dat

$$(a \wedge_c (b \vee_c c))RR' = ((a \wedge_c b) \vee_c (a \wedge_c c))R'R.$$

Onder die vooorwaarde hebben we dat het voorgaande reduceert tot

$$TT'(a \wedge_c (b \vee_c c)R')R = TT'((a \wedge_c b) \vee_c (a \wedge_c c))R'R = T((a \wedge_c b) \vee (a \wedge_c c))R$$

en het is duidelijk dat teneinde de de Morgan regel te recupereren er een split van T, R over $\vee$ moet zijn wat intrinsiek nonsensikaal is omdat zulk criterium vereist dat de componenten afzonderlijk ook van het gepaste type zijn. Dit is zo voor R, doch niet voor T; we noemen T $\vee$-compatiebel indien

$$T(a \vee b) = (Ta) \vee (Tb)$$

wat zich vertaalt in

$$TT' = T'T$$

en

$$T(a \vee_c b) = (Ta) \vee_c (Tb).$$

Dus de de Morgan regel wordt gerecupereerd indien $R = 1$ wat een veel te zware eis is. Ik nodig de lezer uit dit schema verder uit te werken alsook concrete matrix representaties te vinden van niet commutatieve quantum logica's.

Waarheidsevaluatoren ω
Het materiaal dat hier gepresenteerd wordt is een uitbreiding van nota's die ik van Rafael Sorkin ter inzage gekregen heb; in klassieke Booleaanse logica heb je dat een waarheidsevaluator ω gegeven wordt door een homomorfisme van de algebra der proposities $P, \vee_c, \wedge_c$ naar $\mathbb{Z}_2, +, .$ alwaar 0 wordt geinterpreteerd als vals en 1 als waar en $\vee_c$ de zogenaamde exclusieve of is in de zin dat $a \vee_c b$ waar is als en slechts als juist één van beide waar is. Het is te zeggen

$$\omega(a \vee_c b) = \omega(a) + \omega(b),\ \omega(a \wedge_c b) = \omega(a).\omega(b).$$

Om inzxicht te krijgen in de rol van waarheidsfuncties, laat ons een klassiek systeem beschrijven op een "kwantum mechanische" manier. Het betrefty het week, "de zon schijnt", gemodelleerd door $|l\rangle$, of "het is donker" gegeven door $|d\rangle$. Quantum mechanisch heb je dus een complexe twee dimensionele Hilbert ruimte opgespannen door de extremale vectoren $|l\rangle, |d\rangle$. Neem nu een algemene toestand

$$|\psi\rangle = \alpha|l\rangle + \beta|d\rangle$$

en beschouw de waarheidsfunctionalen ω die slechts afhankelijk zijn van $\frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2+|\beta|^2}$, $\frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2+|\beta|^2}$ wat reduceert tot een parameter $0 \leq \lambda \leq 1$ vermits

$$\frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} + \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1.$$

Wanneer alle waarheidsevaluatoren slechts afhangen van deze parameter kan het complexe vlak gereduceerd worden tot het lijnstuk dat beide extremale vectoren met elkaar verbindt. Een voorbeeld van zo'n evaluator is bijvoorbeeld

$$\omega_\epsilon^l : [0, 1] \to \mathbb{Z}_3$$

gegeven door

$$\omega_\epsilon^l(\lambda|l\rangle + (1 - \lambda)|d\rangle) = \chi(\lambda + \epsilon - 1) + 2\chi(\lambda - \epsilon)\chi(1 - \epsilon - \lambda).$$

ω^l is dus verbonden aan de vraag of het licht is en ϵ is de tolerantie van de waarnemer. Deze waarheidsevaluator zegt "ja", gegeven door 1, wanneer $1-\epsilon \leq \lambda \leq 1$, onbepaald of "vaag" wanneer $\epsilon \leq \lambda \leq 1-\epsilon$ en nee, gegeven door 0, wanneer $0 \leq \lambda \leq \epsilon$. Hier χ is de zogenaamde karakeristieke functie op de reeele getallen gegeven door $\chi(x) = 1$ als $x \geq 0$ en nul anders. Het punt is dat we vertrokken zijn van een meer quantum beschrijving van het weer en door een bepaling van de mogelijke vragen, die niet quantum mechanisch zijn vermits ω^l_ϵ geen lineaire afbeelding is, gekomen zijn tot een klassieke interpretatie. Dit suggereert dat het verschil tusse kwantum en klassiek vooral schuilt in de vragen die je kunt stellen en niet zozeer in de Schroedinger dynamica.

De meeste fysici zouden opperen op dit moment dat we in onze beschrijving nog steeds geen voldoend onderscheid gemaakt hebben tussen klassieke en quantum logica aldaar $\wedge_q, \vee_q$ ook commutatief, assiociatief zijn en $\wedge_q$ distributief is ten opzichte van $\vee_q$. In onze algemene setting zijn $\wedge$ en $\vee$ noch commutatief, noch assiociatief vermits

$$(a \wedge b) \wedge c = T^2((a \wedge_c b)R \wedge_c)R \neq T(a \wedge_c T(b \wedge_c c)R)R = a \wedge (b \wedge c)$$

en evenzo voor $\vee$. Het verschil tussen kwantum en klassieke logica ligt erin dat in het klassieke geval $\mu(a|b)\mu(b) = \mu(b|a)\mu(a)$ aldaar dit niet waar is in het quantum mechanische geval. Hier μ is de kansmaat dat de uitspraak waar is; met andere woorden, de waarheidsbepalingen van a en b hangen af van de volgorde waarin deze geschieden. Dit is zover niet in rekening gebracht aldaar een homomorfisme op de geassocieerde bewerkingen $\vee_{c,q}, \wedge_{c,q}$ geen onderscheid maakt tussen de volgorde van de factoren. Dus klassiek is de taak het bepalen van $\omega_c(a \wedge_c b)$ *gegeven* het ongeordend koppel $\{\omega_c(a), \omega_c(b)\}$. Quantum mechanisch is het zo dat de *realiteit* $\omega_q(a|b)$ gegeven het geordend koppel $(\omega_q(a), \omega_q(b))$ als elementen van $\mathbb{Z}_2$ verschillend is van deze van $\omega_q(a|b)$ gegeven het geordend koppel $(\omega_q(b), \omega_q(a))$. Dit is zo omdat quantum mechanica een uitspraak verleent over de verschillende probabiliteiten van beide vraagstellingen. Dus in quantum theorie, de correcte vraag is, "wat is de kans van de realiteit ω_q?". Bovendien is het *niet* zo dat

$$\mu_{|v\rangle}(a|b) \neq \frac{\mu_{|v\rangle}(a \wedge_q b)}{\mu_{|v\rangle}(b)}$$

vermits $\wedge_q$ commutatief is en $a \wedge_q b = 0$ voor verschillende ééndimensionale Hermitische projectoren a, b op een Hilbertruimte $\mathcal{H}$. De correcte formule is

$$\mu_{|v\rangle}(a|b) = \frac{\mathrm{Tr}(|v\rangle\langle v|ab)}{\mathrm{Tr}(|v\rangle\langle v|b)}$$

en hierbij speelt de niet commutativiteit van a an b duidelijk een rol. Dus de redenering die we gemaakt hebben in quantum mechanica is deze van het kiezen van een ontologische mapping $\kappa : P \to \mathbf{L}(\mathcal{H})$ van de proposities met een ja of nee antwoord in de gewoonlijke zin van het woord, gegeven de toestand van het systeem, naar de Hermitische projectie operatoren op de Hilbertruimte van

toestanden. De klassieke Lagrange formule

$$\mu(a|b)\mu(b) = \mu(b|a)\mu(a)$$

waarbij μ bepaald wordt door een toestand van het systeem wordt hierbij opgegeven vermits $\wedge_q$ a la Von Neumann geen goed alternatief biedt. De vraagstelling nu is of we een niet commutatieve $\wedge$ kunnen vinden alsook een geassocieerde consistente verzameling van realiteiten

$$\omega_q^\rho : P \to \mathbb{Z}_2 \times [0,1]$$

gehecht aan dichtheidsmatrices ρ gedefinieerd op $\mathcal{H}$, zodat indien

$$\omega_q^\rho(a) = (1, \lambda)$$

en

$$\omega_q'^\rho(a) = (0, \lambda')$$

dat dan

$$\lambda = 1 - \lambda'.$$

Het is dan duidelijk dat ω_q niet altijd een homomorfisme is; vooraleer we verder gaan is het belangrijk $\vee_q$ goed te begrijpen. Het is dus duidelijk dat we in kwantum mechanica een uitgebreide ontologie toelaten: we stellen ons niet alleen de vraag "wat is de kans dat $a \wedge_c b$ juist is als a en b juist zijn maar wat de kans is dat $a \wedge_q b$ juist is gegeven dat a na b juist bevonden werd door experimentele verificatie. Er is echter geen experiment verbonden aan $a \wedge_q b$ wat in de Von Neumann setting wel het geval is en een adekwate beschrijving oinmogelijk maakt. Het juiste antwoord is makkelijk $a \wedge b$ wordt voorgesteld door de niet Hermitische operator ab wat logisch is gegeven het niet operationeel karakter van de gelijktijdigheid van beide experimenten. In het algemeen toon je aan dat

$$a \wedge_q b = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(ab + ba)\right)^n$$

en daarom is $\wedge$ goed gegeven door bijvoorbeeld

$$R(a,b) = (1, \frac{ab}{\mathrm{Tr(ab)}})$$

tenminste toch voor eendimensionale projectoren a, b. T wordt dan bepaald op de rank 1 matrices door

$$T(|v\rangle\langle w|) = \frac{\mathrm{Tr}(|v\rangle\langle w|)}{\mathrm{Tr}(|v\rangle\langle v|)\mathrm{Tr}(|w\rangle\langle w|)}|v\rangle\langle w|$$

en voldoet aan

$$T(\lambda|v\rangle\langle w|) = T(|v\rangle\langle w|)$$

wat een conforme invariantie beduidt. Dus voor rank één projectoren,

$$a \wedge b = T \circ \wedge_q \circ R(ab) = ab.$$

Vervolgens hebben we dat

$$\omega_q^\rho(a) = (1, \mathrm{Tr}(\rho a))$$

of

$$\omega_q^\rho(a) = (0, 1 - \mathrm{Tr}(\rho a))$$

voor elke mogelijks niet Hermitische rank één projector. Het is dan duidelijk dat per definitie

$$\omega_{q,1}^\rho(a|b) := \frac{\pi_2(\omega_{q,1}^\rho(a \wedge b))}{\pi_2(\omega_{q,1}^\rho(b))}$$

de kans bepaalt dat a na b gemeten wordt gegeven b. Hier π_j is de projectie op de j-de factor en $\omega_{q,1}^\rho$ is de extremale functionaal gegeven door $\pi_1(\omega_{q,1}^\rho) = 1$. Werk deze theorie verder uit en bepaal een geschikte $\vee$ operatie. Hint: deze is *niet* gegeven door $a \vee b = a + b$ gegeven dat $\vee_q$ niet toelaat de projectie van a op b, zoals onderandere gegeven door $\mathrm{Tr}(ab)$, te bepalen wat nodig is om de som te verkrijgen. Daarom schendt elke gedeformeerde quantum logica in onze opzet de de Morgan regel. Filosofisch gezien is het moeilijk een fysische betekenis te hechten aan het niet meten van een observabele b vermits dit in strijd is met de compleetheidsassumptie van de quantum mechanica. Men meet of men meet niet en dit is serieuze oppositie tot het al dan niet *zijn*. Beter zou dus zijn gebruik te maken van de klassieke regel

$$\neg(a \vee_c b) = (\neg a) \wedge_c (\neg b)$$

en aldus, gebruik makende van $\neg\neg = 1$,

$$a \vee b = \neg((\neg a) \wedge (\neg b)).$$

In quantum mechanica, $\neg(a)$ is gegeven door $1 - a$ en aldus bekomen we

$$a \vee b = 1 - (1 - a) \wedge (1 - b)$$

en deze logica voldoet duidelijk niet aan de de Morgan regel gegeven dat

$$a \wedge (b \vee c) = a - a \wedge ((1 - b) \wedge (1 - c)) = a - a(1 - b)(1 - c) = ab + ac - abc$$

terwijl

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 1 - (1 - ab)(1 - ac) = ab + ac - abac.$$

Algemene oefening.
Zoek matrix representaties van gedeformeerde logica's in in termen van commutatieve, maar niet associatieve, logica's. Het is te zeggen

$$\wedge = (\tilde{\wedge}_{ijk})_{i,j,k:1\ldots n}$$

waarbij

$$\tilde{\wedge}_{ijk}(a_j, b_k) = \tilde{\wedge}_{ijk}(b_k, a_j)$$

S symmetrische logica's zijn op een productruimte $\times_n P$ met P elementaire proposities. Klassificeer daartoe eerst de S symmetrische deformaties op algemene ruimten. Zoek vervolgens niet commutatieve topologieen of quantum logica's.

Chapter 7

Hilbert ruimten en enkele belangrijke stellingen.

Tot hiertoe zijn we stilzwijgend geweest over het onderwerp van topologieen op lineaire ruimten alsook op ruimten van lineaire operatoren. De reden is erg simpel, al deze ruimten zijn verzamelingtheoretisch equivalent aan $\mathbb{R}^n$ en op deze zijn alle "natuurlijke" topologieen equivalent aan de product metrische topologie. In een aftelbaar oneindig aantal dimensies bestaan er echter een aantal verschillende natuurlijke kandidaat topologieen welke we verder zullen bestuderen in een vroeg stadium van dit hoofdstuk. We zullen echter beginnen met vlakke meetkunde en bestuderen hoe dit samenhangt met kanstheorie alsook topologie: de filosofie is dat vlakke meetkunde deze concepten voorafgaat in een welbepaalde zin en dat met name continuiteit een relatief begrip wordt dat verabsoluteert in een eindig aantal dimensies gegeven dat alle topologieen daar equivalent of hetzelfde zijn.

Er zijn verschillende manieren om hetgeen wat volgt aan te brengen maar ik geloof dat de presentatie hieronder de beste alsook meest efficiente is. Cruciaal aan vlakke meetkunde is het gegeven dat de ruimte een lineaire ruimte is, dit is niet langer waar wanneer we gekromde meetkunde gaan bestuderen. Dit gegeven heeft er tweeduizend jaar lang voor gezorgd dat we het georienteerd lijnstuk tussen twee punten x, y konden karakteriseren aan de hand van de vector $y - x$ die dan "gebonden" wordt verondersteld in het punt x. Je ziet dat we het woord punt gebruikt hebben in een zin die verschillend is van een vector, maar wiskundig gezien zijn het allemaal vectoren gegeven dat een lineaire ruimte een voorkeurspunt heeft gegeven door het neutraal element 0, ook wel de oorsprong genoemd van deze. Deze geprefereerde oorsprong is erg lang voorwerp geweest van theologisch en filosofisch debat: is de aarde het centrum van het heelal dat eeuwig stil staat? Of is het de zon of een ander lichaam in de kosmos? Newton en consorten waren de eersten die hier paal en perk aan stelden: zij introduceerden het begrip van een affiene ruimte door translaties toe te laten.

Inderdaad, de afbeelding $x \to x + a$ commuteert niet met de optelling vermits

$$(x + y) + a \neq (x + a) + (y + a).$$

Ze laat echter wel het verschil ongemoeid

$$(y + a) - (x + a) = y - x$$

zodat nu vectoren een wezenlijk verschillende status krijgen dan punten. In Newton's wereld staat niks stil en dat was op zich een grote verdienste. Wiskundigen zoals Gauss, Riemann en Cartan zijn nog verder gegaan: de moderne cosmos heeft geen translatie-symmetrie en laat zich dus niet beschrijven in de taal der affiene ruimten. De invoering van deze inzichten in de natuurkunde is de grote verdienste van Albert Einstein en de relativiteitstheorie is bij verre een superieur verklaringsschema wat betreft het universum zoals we het nu waarnemen. De Euclidische ruimte of een (on)eindig dimensionale vlakke meetkunde is gedefinieerd door een reeele vectorruimte $\mathcal{H}$ alsook een scalair product $\langle v|w\rangle$ waarbij $v, w \in \mathcal{H}$. Het scalair product tussen v en w wordt verondersteld gelijk te zijn aan het product van de georienteerde lengte van de projectie van w op v met de lengte van v. Deze grootheid voldoet, bij het maken van een simpele tekening, aan:

$$\begin{aligned} \langle v|w\rangle &= \langle w|v\rangle \\ \langle v|aw + bu\rangle &= a\langle v|w\rangle + b\langle v|u\rangle \\ \langle v|v\rangle &\geq 0 \text{ en er is gelijkheid als en slechts als } v = 0. \end{aligned}$$

Een scalair product bepaalt dus de notie van loodrechte stand; het feit dat wij hier op aarde een voorkeursbegrip hebben voor een welbepaalde loodrechte stand is een *fysisch* gegeven. Albert Einstein heeft ontdekt dat dit inherent is aan de beschrijving van het gravitationele veld. Het zou best zo kunnen zijn dat een alien ons gravitationeel veld anders ervaart dan wij en onze vallijnen niet bestempelt als loodrecht op het aardoppervlak. Men kan ook spreken over complexe meetkunden, in dat geval definieert men op exact dezelfde wijze een sesquilineaire vorm waarbij nu $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|v\rangle}$ en de complexe toevoeging als gewoonlijk gegeven is door $\overline{a + bi} = a - bi$.

Bijvoorbeeld, $\mathbb{C}$ is een ééndimensionale Hilbertuimte met scalair product $\overline{v}w$. Zoals gezegd in de inleiding heeft een Hilbertruimte bepaalde topologische eigenschappen; om deze te definieren tonen we eerst aan dat een scalair product canonisch een metriek d definieert. Hiertoe bewijzen we eerst dat de grootheid $||v||$ gegeven door

$$||v|| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

een zogenaamde norm defnieert wat een veralgemening is van het begrip modulus van een complex getal. We tonen eerst hetvolgend triviaal resultaat aan

$$|\langle v|w\rangle| \leq ||v||||w||$$

wat betekent dat de lengte van de projectie van w of v vermenigvuldigd met de lengte van v kleiner of gelijk is aan het product van de lengtes van v en w, triviaal dus. Het formeel bewijs gaat als volgt:

$$0 \leq ||v + \lambda w||^2 = ||v||^2 + |\lambda|^2 ||w||^2 + 2\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle w|v\rangle\right)$$

waarbij $\mathrm{Re}(a + ib) = a$ het reeel deel is van het complexe getal $z = a + bi$. Je controleert dat het reeel deel van het complexe getal z kan geschreven worden als $\frac{1}{2}(z + \overline{z})$ terwijl het imaginaire deel gelijk is aan $-i\frac{1}{2}(z - \overline{z})$. De modulus van een complex getal is gedefinieerd als

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

en voldoet aan

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + (z\overline{z'} + \overline{z}z')$$

waarbij de laatste term op een factor twee na gelijk is aan

$$aa' + bb'$$

en de absolute waarde hiervan is naar boven begrensd door $|a|\,|a'| + |b|\,|b'|$. Het kwadraat van deze laatste uitdrukking is gelijk aan

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + 2\,|a|\,|a'|\,|b|\,|b'| \leq \left(a^2 + b^2\right)\left(a'^2 + b'^2\right) = |z|^2\,|z'|^2$$

en bijgevolg hebben we dat

$$|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

en aldus

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

een formule die bekend staat als de driehoeksongelijkheid. Bijgevolg kunnen we terug een metriek definieren op de complexe getallen door

$$d(z, z') = |z - z'|\,.$$

Nu keren we terug naar het bewijs van onze ongelijkheid; je merkt op dat we λ zodanig kunnen kiezen dat

$$\mathrm{Re}\left(\overline{\lambda}\langle w|v\rangle\right) = -\,|\lambda|\,|\langle v|w\rangle|$$

terwijl, in het algemeen, het linkerlid steeds groter of gelijk aan is dan het rechterlid. Daarom hebben we dat

$$0 \leq ||v||^2 + |\lambda|^2 ||w||^2 - 2\,|\lambda|\,|\langle v|w\rangle|$$

wat een veelterm ongelijkheid is van tweede graad in de positieve veranderlijke $|\lambda|$. Aan deze ongelijkheid is voldaan als en slechts als de veelterm hoogstens

één nulpunt bevat wat betekent dat de discriminant kleiner of gelijk moet zijn aan nul

$$0 \geq 4\left|\langle v|w\rangle\right|^2 - 4||v||^2||w||^2$$

wat onze bewering aantoont en gelijkheid geldt als en slechts als $w = -\lambda v$. Bijgevolg,

$$||v+w||^2 \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2\left|\langle v|w\rangle\right| \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v||||w|| = (||v|| + ||w||)^2$$

en dus gehoorzaamt de norm de driehoeksongelijkheid. Bijgevolg heeft elke Hilbertruimte $\mathcal{H}$ een canonische metrische topologie gedefinieerd door

$$d(v,w) = ||v-w||$$

en we eisen dat $\mathcal{H}$ compleet is in deze topologie. Dit axioma is uiterst belangrijk voor de theorie van lineaire operatoren maar vooraleer we hieraan toekomen, laat ons beginnen met een aantal observaties te maken. Twee niet-nul vectoren v, w staan loodrecht op elkaar als en slechts als $\langle v|w\rangle = 0$ en we noemen v genormeerd indien $||v|| = 1$. Omdat we het keuze axioma naar de prullenbak verwezen hebben beperken we ons tot Hilbertruimten met een aftelbare basis en per constructie kan men hier een orthonormale basis $(e_i)_{i\in I}$ uit distilleren waarbij per definitie $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ met δ_{ij} gelijk aan 0 als $i \neq j$ en 1 anders. De aandachtige lezer merkt de gelijkenis op met het symbool δ^i_j dat echter een basis invariant is waar δ_{ij} dat niet is. Voor eindig dimensionale Hilbertruimten, met $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, impliceert dit dat

$$\langle v|w\rangle = \sum_{i,j=1}^n \overline{v^i} w^j \delta_{ij}$$

wat een veralgemening is van het standaard inproduct in driedimensionale Euclidische meetkunde. Toon aan dat onder een basistransformatie $e'_i = O^j_i e_j$ we hebben dat $\delta'_{ij} = \langle e'_i|e'_j\rangle = \overline{O}^k_i O^l_j \delta_{kl}$. Oefening: definieer Hilbertruimten over de quaternionen.

Laat ons eerst enkele algemene constructies bestuderen die doorgevoerd kunnen worden met reeele of complexe Hilbertruimten; de lezer is geadviseerd deze te veralgemenen naar quaternionische Hilbertruimten toe. In de quantum mechanica zijn de volgende twee operaties van belang: het tensorproduct $\otimes$ en de directe som $\oplus$. Gegeven twee Hilbertruimten $\mathcal{H}_i$, het tensorproduct $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ is opnieuw een Hilbertruimte die als volgt gedefinieerd is: men begint met vectoren $v_1 \otimes v_2$ waar $v_i \in \mathcal{H}_i$ en neemt vervolgens eindige formele sommen $\sum_{i=1}^n z_i v^i \otimes w^i$ hiervan. Vervolgens deelt men de corresponderende lineaire ruimte door de volgende equivalentie relatie

$$\begin{aligned} z(v\otimes w) &\equiv (zv)\otimes w \equiv v\otimes(zw) \\ v\otimes w_1 + v\otimes w_2 &\equiv v\otimes(w_1+w_2). \end{aligned}$$

We definieren $\mathcal{H}$ als de lineaire ruimte van deze equivalentie klassen en completeren het in de metrische topologie gedefinieerd door het scalair product

$$\langle v_1 \otimes w_1 | v_2 \otimes w_2 \rangle := \langle v_1 | v_2 \rangle \langle w_1 | w_2 \rangle.$$

Op een gelijkaardige manier kan men de directe som $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ definieren, maar deze keer leest de equivalentie relatie

$$\begin{aligned} z(v \oplus w) &\equiv (zv) \oplus (zw) \\ v_1 \oplus w_1 + v_2 \oplus w_2 &\equiv (v_1 + v_2) \oplus (w_1 + w_2) \end{aligned}$$

en het scalair product is gedefinieerd door

$$\langle v_1 \oplus w_1 | v_2 \oplus w_2 \rangle := \langle v_1 | v_2 \rangle + \langle w_1 | w_2 \rangle.$$

Je controleert dat een basis voor $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gegeven is door $v_i \otimes w_j$ waar v_i een basis is van $\mathcal{H}_1$ en w_j van $\mathcal{H}_2$. Een basis voor $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ is gegeven door $v_i \oplus 0, 0 \oplus w_j$.

In een eindige vectorruimte definieert een basis dus een scalair product en de afbeelding van de basissen naar de Hilbertruimten toe is surjectief. Basissen die verbonden zijn door een transformatie O waarvoor geldt

$$\overline{O}_i^k O_j^l \delta_{kl} = \delta_{ij}$$

bepalen hetzelfde beeld en omgekeerd, basissen die hetzelfde scalair product bepalen zijn verbonden door zo'n transformatie. Je contoleert bij wijze van oefening dat deze matrices een groep vormen genaamd $U(n)$ in het complexe geval en $O(n)$ in het reeele, de unitaire groep en orthogonale groep in n dimensies. De hierbovenstaande formule leest in matrix taal

$$O^H O = 1$$

waarbij $O^H = (\overline{O})^T = \overline{(O^T)}$. Toon aan dat in twee dimensies de unitaire matrices gegeven zijn door

$$O = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

met $a, b \in \mathbb{C}$. Deze groep heeft dus drie reeele parameters; bepaal een gelijkaardige voorstelling voor $O(2)$. Gegeven lineaire operatoren $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_3$ en $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_4$ dan kunnen we operatoren

$$A \oplus B : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

en

$$A \otimes B : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4$$

definieren aan de hand van

$$A \oplus B(v_1 \oplus v_2) = A(v_1) \oplus B(v_2)$$

en

$$A \otimes B(v_1 \otimes v_2) = A(v_1) \otimes B(v_2).$$

Denk nu even na en overtuig je van het feit dat het tensorproduct $\otimes$ dient om gescheiden systemen samen te stellen; het is te zeggen functies in n reeele veranderlijken $f_k : (x_1, \ldots, x_n) \to \mathbb{C}$ en m (reeele) veranderlijken $g_k : (y_1, \ldots, y_m) \to \mathbb{C}$ definieren functies in $n + m$ (reeele) veranderlijken door

$$F = \sum_k a_k (f_k \otimes g_k) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C} : (x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m) \to \sum_k a_k f_k(x_1, \ldots, x_n) g_k(y_1, \ldots, y_m).$$

Hier mag $\mathbb{R}^{n+m}$ niet bekeken worden in de vectorruimte zin maar in de vezamelingtheoretische zin; in de vectorruimte taal geldt dat $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$. Het is een resultaat uit de analyse dat veel functies $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$ geschreven kunnen worden als $\sum_k a_k (f_k \otimes g_k)$; met andere woorden, we hebben een complexe Hilbertruimte van functies $L_2(\mathbb{R}^{n+m})$ die gelijk is aan $L_2(\mathbb{R}^n) \otimes L_2(\mathbb{R}^m)$.

Je maakt nu de volgende oefeningen: zij $A : V \to V$ en $B : W \to W$ operatoren op eindig dimensionale vectorruimten, toon dan aan dat

$$\mathrm{Tr}(A \oplus B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B),\ \mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$$

en

$$\det(A \oplus B) = \det(A)\det(B),\ \det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$$

waarbij $n = \dim(V)$ en $m = \dim(W)$. Indien V, W bovendien Hilbertruimten zijn, bewijs dan dat

$$(A \oplus B)^H = A^H \oplus B^H,\ (A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H.$$

Toon aan dat de bewerkingen $\oplus, \otimes$ associatief zijn met $\{0\}, \mathbb{C}$ als eenheidselement respectievelijk; noteer met $\otimes_{\mathcal{F}}$ de afbeelding op de ruimte van Hilbertruimten gedefinieerd door $\otimes_{\mathcal{F}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$. Construeer een $i_{\mathcal{F}}$ zodat $i_{\mathcal{F}} \circ (\otimes_{\mathcal{F}}) = \mathrm{id}$ waarbij id de identiteitstransformatie is. Toon aan dat $\otimes_{\mathcal{F}}$ niet surjectief is tenzij $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ wat aantoont dat er geen $p_{\mathcal{F}}$ bestaat zodat $(\otimes_{\mathcal{F}}) \circ p_{\mathcal{F}} = \mathrm{id}$. Doe hetzelfde voor $\oplus_{\mathcal{F}}$ en merk op dat noch $\oplus, \otimes$ commutatief zijn. Hier hebben we dus een voorbeeld van een afgeleide bewerking die niet commutatief is en slechts een linker inverse heeft en geen rechterinverse. Introduceer nu het concept van een anti-Hilbertruimte $\mathcal{F}^{\otimes}$ als formeel rechterinverse voor $\mathcal{F}$, het is te zeggen

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{\otimes} = \mathbb{C}.$$

In dat geval is $i_{\mathcal{F}}$ gelijk aan $\otimes_{\mathcal{F}^{\otimes}}$ op het beeld van $\otimes_{\mathcal{F}}$. Doe hetzelfde voor $\oplus$ en borduur hier op voort door bijvoorbeeld het concept van niet-commutatieve vectorruimtes te bestuderen. Hiermee bedoelen we dat we de Hilbert ruimte $\mathcal{F}$

isomorf verklaren aan een deelruimte van een niet commutatieve Hilbert algebra, alsook zo voor de niet unieke $\mathcal{F}^{\otimes}$. Duidelijk is $\mathcal{F}^{\otimes}$ eendimensioneel en moet die ene dimensie er een (oneindig) aantal van $\mathcal{F}$ doden; hiervoor is een operationele niet commutativiteit vereist. Meer in het bijzonder, noteer met a_i bosonische annihilatie operatoren gedefinieerd door

$$a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} 1$$

en laat

$$\mathcal{F} \equiv \{v = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i a_i | \langle 0|vv^\dagger|0\rangle < \infty \,\text{met scalair product}\, \langle v|w\rangle = \langle 0|wv^\dagger|0\rangle\}$$

waarbij $|0\rangle$ de zogenaamde vacuum toestand is gedefinieerd door $a_i|0\rangle = 0$. $\mathcal{F}^{\otimes}$ is dan bijvoorbeeld gelijk aan

$$\{v = \lambda^j a_j^\dagger | \text{met scalair product}\, \langle v|w\rangle = \langle 0|v^\dagger w|0\rangle\}$$

zodat

$$v \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^{\otimes}$$

gegeven wordt door $\sum_i \lambda_i \mu_j a_i a_j^\dagger 1$. Het scalair product is gegeven door

$$\sum_i |\lambda_i|^2 |\mu_j|^2 \langle 0|a_j a_i^\dagger a_i a_j^\dagger|0\rangle$$

wat gelijk is aan $|\lambda_j|^2|\mu_j|^2$. Dus alle modes in $\mathcal{F}$ met $i \neq j$ worden monddood gemaakt en corresponderen met nul norm. Deze spoken moeten geelimineerd worden teneinde een ééndimensionele complexe vectorruimte over te houden.

Merk op dat een niet-commutatieve "som" ook verschijnt in Cantor's constructie van de ordinaal getallen. Noteer dat we het concept van een anti-verzameling ook al kunnen definieren hadden voor het Cartesisch product op het niveau van verzamelingenleer. Meer precies, gegeven een verzameling A, een anti-verzameling voldoet aan

$$A \times A^{\times} = \{1\}$$

welke de verzameling is met één element 1 en dus fungeert als neutraal element ten opzichte van $\times$. Een representatie bijvoorbeeld is gegeven door $A = \{x|x \in A\}$ en $A^{\times} = \{\omega_A^\star\}$ waarbij $\omega_A : A \to \{1\}$ de constante afbeelding is op 1 en $\star$ de dualiteitsrelatie is. Met andere woorden:

$$A \times \{\omega_A^\star\} = \omega_A(A) = \{1\}.$$

Later zul je begrijpen dat het concept van Hilbertruimte gebruikt wordt in de fysica om gescheiden deeltjes te beschrijven daar waar het concept van anti-Hilbertruimte gebruikt kan worden om deeltjes met elkaar te laten botsen en te verworden tot één nieuw deeltje of energiepakketje. Botsen en niet botsen kunnen weeral approximaties zijn te wijten aan de puntbeschrijving van een

deeltje, zoek, bij wijze van een erg moeilijke oefening, eens naar een wiskundig concept dat hiertussen ligt.

Met deze kennis kan je ruimschoots problemen uit de standaard vlakke meetkunde oplossen; hier zijn erg sterke stellingen mogelijk die in het algemeen geval helemaal niet geldig zijn omwille van topologische en metrische complicaties. De magie van de vlakke meetkunde schuilt helemaal in de vectorruimte structuur. Bijvoorbeeld, op een boloppervlak snijden elke twee "rechte" lijnen, gedefinieerd als de snijlijn van de bol met een vlak dat door het centrum gaat, mekaar in twee diametraal tegengestelde punten. In het tweedimensionaal vlak daarintegen bestaat er een voorkeursklasse van parallelle rechten gedefinieerd door de eigenschap dat ze mekaar niet snijden. In de driedimensionale Euclidische ruimte noemen we *translaties* van een tweedimensionale deelruimte een vlak, een ééndimensionale een rechte en een nuldimensionale een punt. In de Euclidische ruimte is er maar één nuldimensionale deelruimte en dat is het neutraal element $\{0\}$, ook wel de oorsrong genoemd. Een rechte wordt in parametervorm dus gegeven door $r = \{\lambda.v + a | \lambda \in \mathbb{R},\ v, a \in \mathbb{R}^3\}$ en een vlak door $vl = \{\lambda.v + \mu.w + a | \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ v, w, a \in \mathbb{R}^3\}$ waarbij de vectoren v, w altijd genormeerd en orthogonaal gekozen kunnen worden. Een rechte kan altijd geschreven worden als de doorsnede van twee vlakken en een vlak wodt volledig bepaald door een punt en haar loodvector. Om dit op een hoger niveau te begrijpen introduceren we het totaal anti-symmetrisch symbool ϵ_{ijk} waarbij $\epsilon_{123} = 1$ en $\epsilon_{ijk} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ waar dit laatste symbool de permutatie noteert die 1 afbeeldt op i, 2 op j en 3 op k. Dus, in deze notatie,

$$\det(A) = \epsilon_{ijk} A^1_i A^2_j A^3_k$$

voor een 3×3 matrix A. Hier i, j, k zijn indices ten opzichte van een orthonormale basis en alsdusdanig heeft het ϵ symbool een meetkundige betekenis (die van volume). 'Inderdaad, $\delta^{ik}\epsilon_{klm} v^l w^m = (v \times w)^i$ is een vector die per definitie loodrecht staat op de vectoren v, w (gebruik de anti-symmetrie) en δ^{kl} is de inverse van het δ_{ij} symbool,het is te zeggen

$$\delta^{ik}\delta_{kj} = \delta^i_j,\ \delta_{ik}\delta^{kj} = \delta^i_j.$$

De lengte in het kwadraat

$$(v \times w)^2 = \epsilon_{lmn}\delta^{li}\epsilon_{ijk} v^m v^j w^n w^k = (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}) v^m v^j w^n w^k$$

wat gelijk is aan

$$v^2 w^2 - (\langle v | w \rangle)^2$$

en dit heeft de meetkundige interpretatie van oppervlakte van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren v, w. Dus we hebben expliciet een eenheidsvector geconstrueerd

$$n = \frac{v \times w}{||v \times w||}$$

loodrecht op de tweedimensionale deelruimte opgespannen door v, w en met een orientatie zodat v rechtshandig draait in w. Het vlak

$$vl = \{\lambda.v + \mu.w + a | \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ v, w, a \in \mathbb{R}^3\}$$

bestaat dan precies uit de punten x die voldoen aan de vergelijking

$$\langle n | x - a \rangle = 0$$

wat een lineair systeem is in x. Indien $x = (x_1, x_2, x_3)$ is deze vergelijking van de vorm

$$n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0.$$

Geef de loodrichting op het vlak $2x - 3y + z - 12 = 0$ en bepaal het punt in het vlak dat het dichtst bij de oorsprong ligt.

Andere belangerijke vergelijkingen betreft de zogenaamde kwadratische vergelijkingen waarvan het meest symmetrische voorbeeld gegeven is door het bolloppervlak: dit is gedefinieerd als de plaats van alle punten x die zich op een vaste afstand r van het punt a bevinden. De relevante vergelijking luidt aldus

$$||x - a||^2 = r^2$$

of in coordinaten

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2.$$

Op dezelfde manier is de vergelijking van een cirkel gegeven door

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Toon op twee verschillende manieren aan dat de doorsnede van een bol met een vlak leeg is, een punt of een cirkel. Bewijs dat hetzelfde geldt voor de doorsnede van twee bollen. Deze eigenschappen gelden allemaal niet voor de gekromde meetkundes die we later gaan bestuderen. Later zullen we het concept van hoek bestuderen alsook een paar stellingen formuleren voor driehoeken in algemene gekromde ruimten, waarvan het vlakke geval speciaal is. Er gelden erg gesophisticeerde resultaten in de vlakke meetkunde welke de lezer zou willen bestuderen, oude boeken doen hier een uitstekende dienst doch ik ben de mening toegedaan dat het immens veel belangrijker is te verstaan hoe algemene meetkunde "echt" werkt in plaats van een specialist te worden in het oplossen van lineaire en kwadratische vergelijkingen. Toon aan dat het aantal simplices $a(n)$ in hetwelke een n dimensionale kubus onderverdeeld kan worden gelijk is aan $n!$. Dit is makkelijk in te zien door de coefficienten $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ te ordenen van klein naar groot; het is te zeggen $\lambda_{i_1} \geq \lambda_{i_2} \geq \lambda_{i_n}$. Er zij zo'n $n!$ mogelijkheden en elke mogelijkheid definieert een n dimensionaal simplex door $\lambda_{i_k} \to \lambda_{i_k} - \lambda_{i_{k+1}}$ voor $k = 1 \ldots n-1$ en $\lambda_{i_n} \to \lambda_{i_n}$. Vermits de determinant van deze afbeelding 1 is bewaart ze dus het volume wat aantoont dat elke geordende regio het volume

heeft van een simplex. Een ander bewijs verloopt via integralen die we later zullen zien; je merkt op dat het volume van een n dimensionaal simplex met lengte r gelijk is aan $r^n b(n)$ en dus is

$$b(n+1) = b(n) \int_0^1 dr r^n = \frac{b(n)}{n+1}$$

en aldus is $b(n) = \frac{1}{n!}$. Daarom is het aantal simplices in een kubus gelijk aan $n!$.

Zover wat betreft de studie van Hilbertruimten, nu komen we tot de behandeling van de theorie van lineaire operatoren alsook topologieen op ruimten van operatoren. Dit onderwerp was erg belangrijk in de oude formulering van quantum mechanica door Heisenberg, Jordan en consorten en berust vooral op een éénmans inspanning door Von Neumann. Laten we eerst een tweetal topologieen bestuderen op een algemene Hilbertruimte $\mathcal{H}$ vooraleer over te stappen naar de ruimte van (begrensde) operatoren. Op $\mathcal{H}$ hebben we reeds de norm topologie bestudeerd en je bewijst nu devolgende twee resultaten:

- Een verzameling in een eindig dimensionale Hilbertruimte is compact in de normtopologie *als en slechts als* ze gesloten en begrensd is; dus we hebben het omgekeerde van een algemener resultaat voor metrische ruimten waar we bewezen hebben dat een compacte ruimte gesloten en begrensd is.

- In een oneindig dimensionale Hilbertruimte met aftelbare orthonormale basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hebben we dat de eenheidsbol niet compact is in de normtopologie. Hint: toon aan in één lijntje dat de rij $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente deelrij heeft. Een Hilbertruimte met aftelbare basis noemen we separabel of scheidbaar en dit zijn de enige die we bestuderen anders benodigen we het keuze axioma, dat in strijd is bewezen met de meer redelijke Peano axioma's.

We komen nu tot een zwakkere topologie die alle voordelen van het eindig dimensionale geval overhevelt naar het separabele geval. Deze topologie wordt gegenereerd door de lineaire functionalen ω welke lineaire afbeeldingen zijn van $\mathcal{H}$ naar $\mathbb{C}$, een ééndimensionale bril dus waarmee je de Hilbertruimte bekijkt. De ruimte van lineaire functionalen is opnieuw een vectorruimte die we de algebraisch duale noemen; wij zijn echter alleen geinteresseerd in die functionalen die continue zijn met betrekking tot de normtopologie. Deze vormen opnieuw een vectorruimte welke we de topologisch duale $\mathcal{H}^\star$ noemen. Toon aan dat in een eindig dimensionale Hilbertruimte de topologisch en algebraisch duale samenvallen. Een belangrijk resultaat omtrent continue functionalen is dat ze begrensd zijn, het is te zeggen dat

$$|\omega(v)| \leq C||v||$$

voor een bepaalde $C > 0$; omgekeerd toon je aan dat elke begrensde lineaire functionaal continue is in de norm topologie. Ik zal hier een formeel bewijs

van geven en je moet goed opletten hoe de argumentatie gemaakt wordt: je zult immers dergelijke redeneringen zelf moeten maken in de hiernavolgende oefeningen. We redeneren als volgt: we tonen aan dat indien de functionaal niet begrensd is dat hij dan ook niet continue is. Veronderstel dus dat er een reeks van genormeerde vectoren v_n bestaat zodat $\omega(v_n) \to \infty$ in de limiet voor n naar ∞. Door het nemen van een deelrij kunnen we onderstellen dat $\omega(v_n) > n^2$ en de rij van vectoren $w_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n^2} v_n$ convergeert naar $w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} v_n$ welke een eindige norm heeft (omdat de reeks $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ convergeert) terwijl $k < \omega(w_k) \to \infty$ wat in strijd is met de continuiteit.

Vermits een continue lineaire functionaal een ééndimensionale bril geeft op een Hilbertruimte moet zij dus overeenstemmen met een projectie op een vector v; het is te zeggen

$$\omega(w) = \langle v|w\rangle$$

met $||v|| < \infty$ en je moet dit bij wijze van oefening aantonen. Geometrisch gezien is dit evident gegeven dat ω volledig bepaald is door haar kern $W = \{w|\omega(w) = 0\}$ en de actie op haar normale loodvector $\frac{v}{||v||}$. Dit motiveert de volgende definitie, de verzamelingen

$$\mathcal{O}_{\epsilon;v_1,\ldots,v_n}(w) = \{w' |\, |\langle w - w'|v_i\rangle| < \epsilon \,\text{voor}\, i = 1 \ldots n\}$$

zijn open omgevingen van w in de dimensies bepaald door v_j en vormen een basis voor de *zwakke* of $\star$-topologie.

Open omgevingen van w in de zwakke topologie controleren dus de norm van de projectie nan de verschilvector $w - w'$ opeen eindig dimensionale deelruimte en laten de componenten loodrecht op die deelruimte ongemoeid. Vermits de normtopologie alle dimensies controleert is zij dus sterker in het separabele geval; in het bijzonder is elke open verzameling in de zwakke topoloie open in de norm topologie wat formeel volgt uit de ongelijkheid

$$|\langle w - w'|v_i\rangle| \leq ||w - w'||||v_i||.$$

Het is dus evident dat dezelfde resultaten gelden in de zwakke topologie voor separabele Hilbertruimten dan voor de normtopologie in het eindig dimensionaal geval. In het bijzonder geldt dus dat een verzameling compact is in separabele Hilbertruimten in de zwakke topologie als ze gesloten is in de zwakke topologie en begrensd in de norm. Toon aan dat indien een verzameling begrensd is in de norm dat ze dan gesloten is in de norm topologie als en slechts als ze dit is in de zwakke topologie. Dit is evident omdat de begrensdheid een oneindig aantal dimensies controleert zodat effectief er maar een eindig aantal overschieten en die worden gecontroleerd door de zwakke topologie. Dus de eenheisbol is gesloten en compact in de zwakke topologie wat bekend staat als de stelling van Hahn-Banach. Het omgekeerde is ook waar, een verzameling die compact is in de zwakke topologie is altijd begrensd in de norm.

We draaien nu ons hoofd richting operator topologieen voor lineaire afbeeldingen

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ alsook gaan we enkele belangrijke stellingen bewijzen omtrent operatoren die een bijzondere metrische functie hebben zoals bijvoorbeeld de unitaire operatoren uit het vorige hoofdstuk. In het bijzonder vragen we ons af wanneer we een orthonormale basis van eigenvectoren vinden en wat de eventuele beperkingen zijn op de eigenwaarden. Er zijn vele topologieen voorhanden op welbepaalde klassen van operatoren welke allemaal equivalent zijn in het eindig dimensionale geval; we beginnen met de supremum norm-topologie:

$$||A||_{\sup} = \sup_{||v||=1} ||Av||.$$

In het geval deze eindig is, is de operator A begrensd en de ganse theorie van begrensde operatoren is gegoten in het kader van de $C^\star$-algebra's. We gaan hier niet verder op in omdat de interessante operatoren uit de fysica allemaal onbegrensd zijn. Twee andere topologieen zijn belangrijk, de sterke en zwakke $\star$ topologie. De eerste wordt gedefinieerd aan de hand van de open omgevingen

$$\mathcal{O}_{\epsilon;v_1,\ldots v_n}(A) = \{B|\ ||(B-A)v_k|| < \epsilon \text{ voor } k = 1 \ldots n\}$$

waar de laatste open omgevingen

$$\mathcal{O}_{\epsilon;v_1,\ldots v_n,w_1,\ldots,w_n}(A) = \{B|\ \ |\langle (B-A)v_k|w_k\rangle| < \epsilon \text{ voor } k = 1 \ldots n\}$$

heeft. Je toont aan dat beide topologieen aan de Hausdorff eigenschap voldoen en dat de zwakke-$\star$ topologie zwakker is dan de sterke.

We introduceren eerst enkele belangrijke noties voor lineaire operatoren op separabele Hilbertruimten. Zoals je kunt raden duiken hier enkele subtiliteiten op die we in het voorgaande hoofdstuk niet ontmoet hebben omdat een eindig aantal dimensies immens veel eenvoudiger zijn. Bijvoorbeeld hebben algemene operatoren A een domein $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, welk we dicht veronderstellen in de norm topologie, waarop A goed gedefinieerd is. De toegevoegde operator $A^\dagger$ van A is dan gedefinieerd als volgt: beschouw de deelruimte $\mathcal{D}^\star$ van vectoren v zo dat

$$|\langle v|Aw\rangle| < C(v)||w||$$

voor alle $w \in \mathcal{D}$. Dan hebben we dat de functionaal $w \to \langle v|Aw\rangle$ continue uitgebreid kan worden tot gans $\mathcal{H}$ omdat $\mathcal{D}$ dicht is. We weten dan dat er een vector z bestaat zo dat

$$\langle v|Aw\rangle = \langle z|w\rangle$$

en we definieren $A^\dagger v = z$ en het is eenvoudig te controleren dat $A^\dagger$ een lineaire operator is. Daarom is het domein van $A^\dagger$ gelijk aan $\mathcal{D}^\star$. De volgende gevallen zijn buitengewoon belangrijk:

- $A = A^\dagger$ en $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\star = \mathcal{H}$ in welk geval de operator zelftoegevoegd is,

- $AA^\dagger = A^\dagger A$ en $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\star = \mathcal{H}$ in welk geval de operator normaal is,

- $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ en $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\star = \mathcal{H}$ in welk geval de operator unitair is,

- $P^2 = P = P^\dagger$ en $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\star = \mathcal{H}$ in welk geval de operator een Hermitische projectie is.

Je controleert dat in het eindig dimensionale geval $A^\dagger = A^H$ en dat unitaire operatoren gewoon veralgemeningen zijn van elementen uit $U(n)$. Bepaal ook het domein van de operator gegeven door $Ae_n = ne_n$ voor $n \in \mathbb{N}$ waar e_m een orthonormale basis is en toon aan dat dit dicht is in $\mathcal{H}$; toon aan dat $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^\star$ en dat $A = A^\dagger$ op $\mathcal{D}$. We werken nu naar twee verschillende stellingen toe: de eerste betreft de uitbreiding van een bijzondere klasse van operatoren tot Hermitische operatoren, waar een uitbreiding van een operator een nieuwe operator is met een groter domein die samenvalt met de oude operator op diens domein. Een tweede resultaat zegt dat een normale operator ontbonden kan worden in Hermitische projectie operatoren in de zwakke $\star$ topologie.

Het belang van de eerste stelling ligt letterlijk in de tweede; deze zegt, in het eindig dimensionaal geval, dat elke normale matrix diagonalizeerbaar is en dat de eigenvectoren loodrecht op elkaar staan. Dit laatste aspect is van primordiaal belang om een kans theoretische interpretatie te krijgen van vlakke meetkunde zoals dat gebruikelijk is in de kwantum mechanica. Toon aan, bij wijze van oefening, dat in een eindig aantal dimensies Hermitische operatoren reeele eigenwaarden hebben, unitaire operatoren eigenwaarden die op de eenheidscirkel liggen in het complexe vlak en finaal normale operatoren kunnen eender welke complexe eigenwaarde hebben. Zoals gezegd is er een verband tussen unitaire en zelftoegevoegde operatoren en in die zin is het makkelijker eerst de vraag te stellen naar unitaire uitbreidingen van zogenaamde partiele isometrieen V met een domein $\mathcal{D}$ dat niet noodzakelijk dicht is. Een partiele isometrie is gedefinieerd door de eigenschap dat

$$\langle V(v)|V(w)\rangle = \langle v|w\rangle$$

voor alle $v, w \in \mathcal{D}$. Bij continuiteit kunnen we V dus uitbreiden tot de sluiting $\overline{\mathcal{D}}$ van $\mathcal{D}$ wat resulteert in een lineair homeomorphisme tussen $\overline{\mathcal{D}}$ en $\overline{\mathrm{Im}(V)}$ waar $\mathrm{Im}(V) = \{Vw|w \in \mathcal{D}\}$ het beeld is van V. Het is duidelijk dat alleen in het geval dat het orthogonaal complement $\mathcal{D}^\perp = \{w|\langle w|v\rangle = 0\ \forall v \in \mathcal{D}\}$ dezelfde dimensie heeft dan het orthogonaal complement $(\mathrm{Im}(V))^\perp$ dat we een uitbreiding kunnen bekomen aan de hand van een unitaire operator $W : \overline{\mathcal{D}}^\perp \to (\mathrm{Im}(V))^\perp$ wat de unitaire operator $U = V \oplus W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definieert en deze is duidelijk een unitaire uitbreiding van U. De lezer noteert dat voor een deelruimte W, $W^\perp$ gesloten is in de zwakke en daarom ook in de norm topologie; de deelruimte $W^{\perp\perp} := (W^\perp)^\perp$ is bovendien de zwakke sluiting van W.

Je merkt dus op dat een partiele isometrie veel unitaire uitbreidingen kan hebben indien de dimensies van de orthogonale complementen hetzelfde zijn of helemaal geen indien dit niet het geval is. Nu komen we terug tot het verband tussen

Hermitische en unitaire operatoren; Von Neumann kende de zogenaamde Cayley transformatie tussen Hermitische en unitaire operatoren in eindig dimensionale Hilbert ruimten. Hier wordt een zelftoegevoegde operator A afgebeeldt op

$$U = (A - i1)(A + i1)^{-1}$$

waarbij $(A \pm i1)$ invertiebel is in een eindig aantal dimensies vermits het stelsel $Av = \mp iv$ geen niet nul oplossing heeft. Je ziet dit in door te observeren dat

$$\mp i||v||^2 = \langle v|Av\rangle = \langle Av|v\rangle = \pm i||v||^2$$

wat impliceert dat $v = 0$. Bovendien commuteert $(A + i1)$ met $(A - i1)$ wat tot gevolg heeft dat U unitair is zoals een korte berekening bevestigd. Von Neumann vroeg zich af welke voorwaarden op A gesteld zouden moeten worden zodat U een partiele isometrie is. In dat geval kan men deze uitbreiden tot een unitaire operator die een Hermitische operator definieert aan de hand van de omgekeerde Cayley transformatie:

$$A = -i(U + 1)(U - 1)^{-1}.$$

De operator $A \pm i1$ moet injectief zijn zodat een inverse genomen kan worden wat de voorwaarden $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^\star$ en $A = A^\dagger$ op $\mathcal{D}$ suggereert zodat het voorgaande argument nog steeds doorgaat; deze zijn de definierende eigenschappen van een symmetrische operator. In het separabele geval is het echter niet noodzakelijk zo dat $A \pm i1$ surjectief is. De Cayley transformatie is dus een lineaire afbeelding

$$U : \mathrm{Im}(A + i1) \to \mathrm{Im}(A - i1)$$

en we moeten nu drie zaken aantonen : (a) controleer dat U een partiele isometrie is (b) sluit de operator $\mathrm{Im}(A \pm i1)$ en finaaal (c) controleer of $\mathrm{Im}(A + i1)^\perp$ en $\mathrm{Im}(A - i1)^\perp$ dezelfdee dimensie hebben. Betreffende (a) merk je op dat

$$\langle U(A+i1)v|U(A+i1)w\rangle = \langle (A-i1)v|(A-i1)w\rangle = \langle Av|Aw\rangle + i\langle v|Aw\rangle - i\langle Av|w\rangle + \langle v|w\rangle$$

en deze laatste uitdrukking is met behulp van de symmetrie van A gelijk aan

$$\langle Av|Aw\rangle + \langle v|w\rangle = \langle (A + i1)v|(A + i1)w\rangle$$

voor alle $v, w \in \mathcal{D}$. Gewoonlijk, in de literatuur, sluit men de operator A vooraleer de Cayley transformatie te maken alhoewel dit niet nodig is; U extendeert triviaal tot een operator

$$U : \overline{\mathrm{Im}(A + i1)} \to \overline{\mathrm{Im}(A - i1)}$$

en we hebben (c) nodig om U uit te breiden tot een unitaire operator op $\mathcal{H}$. Deze laatste voorwaarde kan beter geformuleerd worden als

$$\mathrm{Im}(A \pm i1)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\dagger \mp i1).$$

Inderdaad,

$$\langle w|(A \pm i1)v\rangle = 0$$

voor alle $v \in \mathcal{D}$ is equivalent aan $w \in \mathcal{D}^\star$ en

$$\langle (A^\dagger \mp i1)w|v\rangle = 0.$$

Dit is waar als en slechts als $(A^\dagger \mp i1)w = 0$ vermits $\mathcal{D}$ dicht is in $\mathcal{H}$; bij definitie is $\mathrm{Ker}(B) = \{w|Bw = 0\}$ wat het gewenste resultaat oplevert.

We hebben net ons eerste belangrijke resultaat bewezen: symmetrische, dicht gedefinieerde operatoren hebben zelftoegevoegde uitbreidingen als en slechts als de dimensies van $\mathrm{Ker}(A^\dagger \mp i1)$ gelijk zijn aan elkaar. Nu werken we naar ons tweede belangrijk resultaat betreffende normale operatoren A: er bestaat een projectiewaardige maat $dP(z)$ op het complexe vlak zodat in de zwakke $\star$ topologie geldt dat

$$A = \int_{\mathbb{C}} z\, dP(z).$$

Hier komen we voor de eerste maal een integraal tegen, iets wat we in volledig detail in het volgende hoofdstuk gaan bestuderen; we zullen hier slechts raken aan de meest fundamentele definities. Stel nu even dat je dergelijk resultaat wil bekomen dan is de operator $(A - z1)$ niet invertiebel indien $dP(z) \neq 0$; logisch gezien hebben we drie mogelijkheden:

- $(A - z1)$ is niet injectief, noch surjectief; in dit geval behoort z tot het discreet spectrum,

- $(A - z1)$ is niet injectief, maar surjectief; in dit geval behoort z tot het residuaal spectrum,

- $(A - z1)$ is injectief, maar niet surjectief; in dat geval behoort z tot het continue spectrum.

Voor normale operatoren hebben we dat het residuaal spectrum leeg is wat we nu even gaan bewijzen. Noteer dat als A normaal is, dat dan $A_z = A - z1$ ook deze eigenschap heeft; bovendien is A injectief als en slechts $A^\dagger$ het is, wat bewezen kan worden door te stellen dat $Av = 0$ als en slechts als $A^\dagger v = 0$. Let op dat surjectiviteit van A niet impliceert dat $A^\dagger$ surjectief is. Veronderstel dat z tot het residuaal spectrum behoort, dan hebben we dat

$$\langle v|A_z w\rangle = 0$$

voor alle w impliceert dat $v = 0$ omwille van de surjectiviteit van A_z. Maar dan is $\mathrm{Ker}(A_z^\dagger) = \mathrm{Ker}(A_z) = 0$ wat een contradictie is. Dus we hebben bewezen dat het residuaal spectrum leeg is. In het geval dat z tot het discreet spectrum behoort bestaat er een unieke Hermitische projectie operator P_z op

$\mathrm{Ker}(A_z)$. P_z commuteert met A, $AP_z = P_zA = zP_z$ vermits $\langle v|AP_zw\rangle = z\langle v|P_zw\rangle = \langle \overline{z}P_zv|w\rangle = \langle A^\dagger P_zv|w\rangle = \langle v|P_zAw\rangle$ en dezelde commutatie relaties gelden tussen $A^\dagger$ en P_z gegeven dat de laatste Hermitisch is. Bovendien, stel dat $z \neq z'$ en beide behoren tot het discrete spectrum, dan geldt dat $P_zP_{z'} = 0$ wat volgt uit

$$zP_zP_{z'} = AP_zP'_z = z'P_zP_{z'}.$$

Dit lijkt al sterk op het resultaat dat we willen behalen in de zin dat op separabele Hilbertruimten het discreet spectrum hoogstens uit een aftelbaar aantal punten bestaat. We geven het voorbeeld van een begrensde lineaire operator voor dewelke men kan bewijzen dat het spectrum compact is. Gegeven dat $Ae_n = \frac{1}{n}e_n$ waar $n > 0$ en e_m een orthonormale basis: het discreet spectrum is gegeven door $\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}_0\}$ en 0 behoort tot het continue spectrum gegeven dat bijvoorbeeld de vector $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e_n$ niet behoort tot het beeld van A. Dus het continue spectrum kan "maat nul" hebben en niet bijdragen tot de spectrale decompositie.

Het continue spectrum is duidelijk leeg voor normale operatoren op eindig dimensionale Hilbertruimten en de lezer zou nu makkelijk moeten kunnen aantonen dat

$$A = \sum_{z\in\sigma_d(A)} zP_z$$

waar $\sum_{z\in\sigma_d(A)} P_z = 1$ en $\sigma_d(A)$ noteert het discreet spectrum bestaande uit de eigenwaarden van het vorige hoofdstuk. De volgende notatie is handig: gegeven een éénheidsvector v, definieer door

$$P = vv^\dagger$$

de operator $Pw = v\langle v|w\rangle$. Bewijs dat P een rank één Hermitische projector is en in geval $AP = zP$ hebben we dat $Av = zv$ wat impliceert dat v een eigenvector is. De ganse complexiteit betreffende integralen ligt dus in de behandeling van het continue spectrum in een oneindig aantal dimensies. We zullen de constructie hier niet in haar volste algemeenheid geven vermits dit enkele technische complicaties met zich zou meebrengen die de aandacht alleen maar van het hoofd idee zou afleiden. Noteer ook dat we hier van het fundamenteel theorema van de algebra gebruik gemaakt hebben hetwelk we slechts zullen bewijzen in hoofdstuk negen over complexe analyse. Dit laatste zegt dat elke veelterm over $\mathbb{C}$ van graad n precies n complexe nulpunten heeft en dus factoriseerbaar is.

Indien z tot het continue spectrum behoort hebben we, in het bijzonder, dat het beeld van de eenheidsbol onder A_z geen open omgeving van de oorsprong bevat. Anders zou A_z surjectief zijn: dus er bestaat een rij van eenheidsvectoren v_n zodat

$$||A_zv_n|| \to 0$$

in de limiet voor n naar ∞. Dus elementen in het continue spectrum geven aanleiding tot benaderende eigenvectoren. We hebben dat $\mathrm{Im}(A_z)^\perp$ nul is vermits

A_z injectief is en daarom is $\mathrm{Im}(A_z)$ dicht in $\mathcal{H}$. Bovendien hebben we dat als $z \neq z'$ dan

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle v_n | w_m \rangle = 0$$

waar $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondeert met A_z en $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $A_{z'}$ hetgeen lijkt op de eigenschap van Hermitische projectoren voor het discreet spectrum.

We komen nu tot de constructie van de spectrale maat: gegeven een meetbare deelverzameling $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$, we definieren $P_\mathcal{O}$ als de kleinste Hermitische projectie operator met de eigenschap dat als $z \in \sigma(A) \cap \mathcal{O}$ en $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een reeks van (benaderende) eigenvectoren voor z, dan $||P_\mathcal{O}(v_n) - v_n|| \to 0$ in de limiet voor $n \to \infty$. Een meetbare verzameling is geconstrueerd als volgt:

- elke open verzameling is meetbaar,
- het complement van een meetbare verzameling is meetbaar,
- de oneindige unie van meetbare verzamelingen is meetbaar.

We komen terug tot de behandeling van de fijne aspecten van maattheorie in hetvolgende hoofdstuk en geven nu intuitie mee omtrent het verdere verloop van het bewijs. Het is duidelijk dat

$$P_\mathcal{O} P_\mathcal{V} = P_{\mathcal{O}\cap\mathcal{V}}$$

en je moet dit bewijzen. Gegeven een aftelbare partitie $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van $\mathbb{C}$ door middel van meetbare verzamelingen[1] definieren we de sommen

$$A_{(B_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n P_{B_n}$$

waar $z_n \in B_n$. De integraal is dan gedefinieerd door het verfijnen van de partitie en de rest van het bewijs bestaat erin aan te tonen dat de som convergeert in de zwakke-$\star$ topologie naar de integraal zowel als naar A. Het eerste deel is waar per definitie, terwijl het laatste volgt uit het bestaan van een limiet voor separabele Hilbertruimten. De stelling is dus niet strictu sensu bewezen voor niet separabele Hilbertruimten daar we ons zouden moeten beroepen op het keuze axioma hetgeen verworpen geweest is in het hoofdstuk betreffende verzamelingenleer.

Deze uiterst belangrijke stelling, gekend als de spectraal stelling, laat toe functies van normale operatoren te definieren gegeven een meetbare $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en normale operator A. We hebben dat

$$f(A) := \int_\mathbb{C} f(z) dP(z)$$

[1] Een partitie voldoet aan de eigenschap dat $B_n \cap B_m = \emptyset$ voor $n \neq m$ en $\cup_{n=0}^{\infty} B_n = \mathbb{C}$.

waar we de spectrale decompositie

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dP(z)$$

gebruikt hebben. Er zijn twee belangrijke veralgemeningen van deze stelling: de eerste bestaat erin de complexe getallen te vervangen door de quaternionen $\mathbb{RQ}$ en quaternion bi-modulen te beschouwen met een quaternion waardig scalair product wat een natuurlijke veralgemening is van het begrip complexe Hilbertruimte. De spectraal stelling wordt op een gepaste manier veralgemeend. Een tweede veralgemening bestaat erin de voorwaarde

$$\langle v|v\rangle \geq 0$$

te laten vallen en toe te laten dat deze grootheid negatief wordt. Later bestuderen we eindig dimensionale voorbeelden van zogenaamde Nevanlinna ruimten in het kader van Lorentziaanse meetkunde. Dit beeindigt onze studie van lineaire ruimten en dito functies; zoals gewoonlijk is er wel wat meer te vertellen maar dit zijn toch de belangrijkste resultaten. We gaan nu over naar de algemene analyse van functies die de basis vormt voor de niet-lineaire meetkunde en cosmologie.

Oefeningen op Von Neumann extensies van lineaire operatoren.
Neem de operator $i\frac{d}{d\theta}$ op de ruimte van *differentieerbare* functies op de eenheidscirkel S^1 met lengte 2π. Toon aan dat deze operator essentieel zelftoegevoegd en dicht gedefinieerd is op de Hilbertruimte van kwadratisch integreerbare functies op de cirkel. Bijgevolg heeft deze een unieke Von Neumann extensie. Als een bijkomende oefening, toon aan dat

$$\left[i\frac{d}{d\theta}, \theta\right] = i((2\pi - 1)\delta(\theta) + 1)$$

waarbij $\delta(\theta)$ gedefinieerd is door

$$\int d\theta\, \delta(\theta) f(\theta) = f(0)$$

voor elke continue functie f op de eenheidscirkel.

Maak nu dezelfde studie voor $i\frac{d}{dx}$ op het begrendsde lijninterval $[a, b]$ door randvoorwaarden $f(a) = f(b) = 0$ op te leggen in de randpunten wat betreft de domein functies $\mathcal{D}$. Toon aan dat de operator op $\mathcal{D}$ symmetrisch is en bereken het toegevoegd domein $\mathcal{D}^\star$ (differentieerbare functies op het interval zonder de randcondities). De sluiting van $i\frac{d}{dx}$ vergt dus enige randcondities. Teneinde deze te berekenen, bereken de kern van de operatoren $\frac{d}{dx} \pm 1$. Deze is van de vorm $a_{\mp N} e^{\mp x}$ waarbij $a_{\mp N}$ een vaste normeringsconstante is. Er is dus een eenparametergroep van unitaire afbeeldingen gegeven door

$$U(\theta) : a_{-N} e^{-x} \to e^{i\theta} a_{+N} e^{x}$$

welke een een eenparameter familie van zelftoegevoegde Von Neumann extensies geeft.

Delta Dirac distributies.
Zij $x \in \mathbb{R}$ een reeele veranderlijke en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continue functie, dan definieren we een distributie $\delta(x)$ aan de hand van

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

De integraalvoorstelling van de $\widehat{\delta}$ lineaire functionaal op de complexe vectorruimte van complexwaardige functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$\widehat{\delta}(f) = f(0)$$

is de zwakke limiet van een reeks continue functionalen bepaald door

$$g_n := n\chi_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$$

waarbij

$$\chi_A(x) = 1$$

als en slechts als $x \in A$ en nul anders. Meer precies

$$\widehat{\delta}(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) f(x) := \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x)$$

waarbij dit laatste een formele notatie is. Evenzo kan men $\widehat{\delta}_z$ definieren aan de hand van $\int_{\mathbb{R}} \delta(x - z) f(x) = f(z)$. Toon aan dat

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - z)\delta(x - y) dx = \delta(y - z)$$

door te stellen dat

$$\int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}} \delta(x - z)\delta(x - y) dx f(z) = \int_{\mathbb{R}} dx \delta(x - y) \int_{\mathbb{R}} \delta(x - z) f(z) dz$$

voor elke continue functie $f(z)$. zij f, g twee continue functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$ die alleen verschillen van nul op een compacte verzameling zodat

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$$

goed gedefinieerd is. Toon aan dat dit een scalair product bepaalt en definieer $L^2\mathbb{R}, dx$ als de Hilbertruimte gedefinieerd door dit scalair product door de vervolledigingte nemen in de functieruimte van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{C}$. Definieer vervolgens devolgende lineaire operator $X(f)$ door

$$(X(f))(x) = xf(x).$$

Toon aan dat deze dicht gedefinieerd is, essentieel zelftoegevoegd (deficientie indices gelijk en nul) en dat het spectrum alleen bestaat uit het continue gedeelte hetwelk gans $\mathbb{R}$ is. Finaal, de projectieve maat P is gegeven door

$$P((a,b)) = \chi_{(a,b)}$$

en

$$(dP(z)f)(x) = \delta(x-z)f(z)dz$$

zodat finaal

$$(X(f))(x) = \int_{\mathbb{R}} z\delta(x-z)f(z)dz = xf(x).$$

Heisenberg vergelijkingen.
In de traditionele quantum fysica hebben we een zogenaamd Heisenberg paar (X,P), gemodelleerd aan de hand van Hermitische operatoren op een Hilbertruimte, zodat

$$[P,X] = i1.$$

Hierin neemt men de zogenaamde Schroedinger representatie op $L^2(\mathbb{R},dx)$ waarbij X de operator is van de voorgaande oefening en

$$P = i\frac{d}{dx}.$$

Kijk verder in hoofdstuk tien om te bepalen dat de eigenwaarden k gans $\mathbb{R}$ beslaan en de corresponderende eigenvectoren gegeven worden door e^{-ikx}. Dit is de zogenaamde Fourier transformatie.

Chapter 8

Meer dimensionale analyse.

In dit hoofdstuk bestuderen we speciale functies $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; in het bijzonder definieren we de differentiaal Dg, vectorvelden, duale velden, algemene tensor velden, de uitwendige afgeleide en algemene integratie theorie. Al deze zaken kunnen veralgemeend worden naar de oneindig dimensionale context waar men de zogenaamde Fréchet afgeleide definieert, maar we vermijden deze situatie met haar inequivalente topologieen. Het is zeer belangrijk vlot te kunnen omspringen met tensor calculus in termen van index manipulatie alsook een diep begrip te hebben voor de feometrische betekenis van algebraische relaties. De gesophisticeerdheid van de calculus, in het bijzonder het Lie haakje, is volledig te wijten aan de structurele eigenschappen van de ruimte $\mathbb{R}^n$. We komen hierop op terug in hoofdstuk vijftien wanneer we de status van de torsietensor bediscussieren; in algemene ruimten is het begrip torsie omwisselbaaar met "gedeformeerd" Lie haakje; het laatste moet dan gezien worden als een soort vectorruimte calibratie vermits het dezelfde symmetrie heeft dan de torsie tensor, alhoewel het geen tensor is, maar bovendien aan de Jacobi identiteit voldoet wat niet het geval is voor algemene torsie tensoren. In wat volgt, is de norm die we gebruiken de standaard norm geassocieerd aan een reeel scalair product. De coordinaten in $\mathbb{R}^m$ geassocieerd aan een orthonormale basis worden genoteerd door x'^{μ}, x'^{ν} waar deze met betrekking tot een orthornormale basis in $\mathbb{R}^n$ genoteerd worden door x^{α}, x^{β}. Gegeven $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de notatie $g^{\mu}(x^{\alpha})$ heeft dus een eenduidige betekenis en we beginnen met het definieren van *partiele* afgeleiden $\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$. Deze zijn vastgelegd door de voorwaarde dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x + he_{\alpha}) - f(x) - \partial_{\alpha} f(x)h||}{h} = 0$$

waar h een reeel getal is. In het geval $n = m = 1$ is er maar één partiele afgeleide die we de afgeleide noemen; toon hetvolgende aan

- $\partial_x x^n = nx^{n-1}$ voor $n \geq 1$,
- $\partial_x c = 0$ voor een constante c,

- $\partial_x y^m = 0$ voor een andere variabele y.

Bewijs nu dat indien alle partiele afgeleiden bestaan in een punt x, dat f dan continue is in dat punt. Meer algemeen, de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is differentieerbaar als en slechts als er een lineaire afbeelding $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bestaat zodat

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - Df(x)h||}{||h||} = 0$$

voor $h \in \mathbb{R}^n$. Het is kinderspel om aan te tonen dat $Df(x) = \partial_\alpha f(x) dx^\alpha$ waar $dx^\alpha(h) = h^\alpha$ en bijgevolg bestaan alle partiele afgeleiden in x als de afgeleide bestaat in datzelfde punt. Het omgekeerde is niet noodzakelijk waar: neem bijvoorbeeld een continue functie in twee veranderlijken met de beperkingen $f(x,0) = x^2, f(0,y) = y^2$ en $f(x,x) = |x|$ voor x, y voldoende dicht tegen nul. Dan bestaan alle partiele afgeleiden maar niet de totale afgeleide zoals je makkelijk kunt verifieren. Men kan hetvolgende theorema bewijzen: als alle partiele afgeleiden bestaan in een *omgeving* van x en continue zijn in die omgeving dan bestaat de totale afgeleide in x. Je kunt proberen dit bewijs zelf te leveren.

Je kunt evidenterwijs meerdere partiele afgeleiden nemen van een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en men toon hetvolgende belangrijk resultaat aan: als alle tweede orde afgeleiden $\partial_\alpha \partial_\beta f$ bestaan en continue zijn dan hebben we dat

$$\partial_\alpha \partial_\beta f = \partial_\beta \partial_\alpha f$$

en je kunt dit vrij makkelijk bewijzen vanuit de definitie van de partiele afgeleide. Je weet nu dat de matrix

$$H^\alpha_\beta(x) = \delta^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \partial_\beta f(x)$$

symmetrisch is voor brave functies en dus heb je een compleet reeel spectrum van eigenwaarden. Definieer nu $\Delta(x)$ als het aantal positieve min het aantal negatieve eigenwaarden van $H^\alpha_\beta(x)$, de zogenaamde deficientie index van de Hessiaan, en noem een punt x kritisch indien $\partial_\alpha f(x) = 0$ voor alle α. Kritische punten en hun deficientie indices spelen een belangrijke rol en dragen topologische informatie zoals we later zullen zien wat zich uit in het werk van Brouwer en Morse. Finaal toon je aan dat de volgende regels gelden

- $\partial_\alpha(f \otimes g)(x) = (\partial_\alpha f) \otimes g(x) + f \otimes (\partial_\alpha g)(x)$,
- $\partial_\alpha(af + bg)(x) = a\partial_\alpha f(x) + b\partial_\alpha g(x)$,
- $\partial_\alpha(f(g(x))) = \partial_{g^\beta(x)} f(g(x)) \partial_\alpha g^\beta(x)$.

De eerste identiteit is gekend als de Leibniz regel, de tweede drukt lineariteit uit en de derde volgt uit de vorige twee.

We bestuderen nu differentieerbare veralgemeningen van topologische homeomorphismen: $g : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ is een C^n diffeomorphisme voor $n \in \mathbb{N}_0$

als en slechts als g is een homeomorphisme en voor elke $k \leq n$ de afgeleiden $D^k g$ en $D^k g^{-1}$ bestaan. In het vervolg bestuderen we hoofdzakelijk C^2 of C^∞ diffeomorphismen maar uitzonderingen kunnen zich voordoen. Het is natuurlijk om de afbeelding $f \circ g : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ te beschouwen welke we schrijven als

$$f^\mu(g^\beta(x^\alpha))$$

en we zijn geinteresseerd in het nemen van afgeleiden naar x^α en noteren met $x'^\beta(x^\alpha) = g^\beta(x^\alpha)$. De volgende regel heb je al bewezen

$$\partial_\alpha f(x'^\beta(x^\gamma)) = \partial'_\delta f(x'^\beta(x^\alpha))\partial_\alpha x'^\delta(x^\gamma)$$

waarbij we Einstein sommatie gebruikt hebben in de δ indices. Vaak wordt deze regel vertaald in

$$\partial_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}\partial'_\beta$$

hetgeen leidt tot de formule

$$\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} = \delta^\beta_\gamma$$

en idem voor x^α, x'^β omgewisseld. δ^β_γ is de tweede tensor die we ontmoeten en voldoet aan $\delta^\beta_\gamma = 1$ als $\alpha = \gamma$ en 0 anders. Op vectorruimte niveau kun je e_α identificeren met ∂_α zodat de basisvectoren een operationele betekenis verwerven. Definieer daarom

$$dx^\alpha(\partial_\beta) = \delta^\alpha_\beta$$

en vervolgens krijgt dx^α de status van element in $(\mathbb{R}^n)^\star$ de topologisch duale van $\mathbb{R}^n$. Onder een diffeomorphisme hebben we dat

$$dx'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}dx^\beta$$

zoals het hoort omdat

$$dx'^\alpha(\partial'_\beta) = \delta^\alpha_\beta$$

een invariant is onder locale diffeomorphismen van $\mathbb{R}^n$. We definieren nu vectorvelden als differentiaal operatoren

$$\mathbf{V}(x) = V^\alpha(x)\partial_\alpha$$

zodat onder een diffeomorphisme van $\mathbb{R}^n$ de volgende transformatiewet houdt

$$\mathbf{V}'(x') = V'^\alpha(x'(x))\partial'_\alpha = V^\alpha(x)\partial_\alpha$$

wat impliceert dat

$$V'^\alpha(x'(x))\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = V^\beta(x).$$

Evenzo definieren we duale velden

$$\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$$

die transformeren als

$$\omega'_\alpha \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \omega_\beta.$$

De vectorvelden $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ vormen een Lie-algebra wat betekent dat

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}] = \mathbf{VW} - \mathbf{WV} = \left(V^\alpha \partial_\alpha W^\beta - W^\alpha \partial_\alpha V^\beta\right) \partial_\beta$$

transformeert als een vectorveld. We kunnen nu tensor producten van vectoren en éénvormen definieren waarbij we alle vectoren links en éénvormen rechts zetten. Dit leidt tot voorwerpen zoals

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s}(x) \partial_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\alpha_r} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_s}$$

met devolgende transformatiewet

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \ldots \frac{\partial x'^{\alpha_r}}{\partial x^{\gamma_r}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \ldots \frac{\partial x^{\delta_s}}{\partial x'^{\beta_s}} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_r}_{\delta_1 \ldots \delta_s}(x).$$

We noemen dit object een (r, s) tensor met r contravariant en s covariant indices.

In de definitie van de determinant van een matrix kwamen we het fenomeen van antisymmetrisatie tegen en associeerden dit met de correcte wijze om volumes te berekenen. Nu gaan we lagere orde "determinanten" definieren die een overeenkomstige betekenis hebben voor lager dimensionale oppervlakten door terug gebruik te maken van antisymmetrizatie. In het bijzonder definieren we dus het "wedge" product van éénvormen dx^α, het heeft de eigenschappen van associativiteit, anti-symmetrie $dx^\alpha \wedge dx^\beta = -dx^\beta \wedge dx^\alpha$ en uiteindelijk $dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$ definieert een $(0, k)$ covariante tensor. Vanuit deze definities is het duidelijk dat

$$dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in S_k} \text{sign}(\rho) dx^{\alpha_{\rho(1)}} \otimes \ldots \otimes dx^{\alpha_{\rho(k)}}$$

en gegeven dat de dimensie van $\mathbb{R}^n$ gelijk is aan n, hebben we dat de ruimte van k-vormen gegeven is door $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Gegeven een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ we definieren de uitwendige afgeleide

$$df = \partial_\alpha f dx^\alpha$$

wat duidelijk coordinaat invariant is. Voor een k vorm

$$\mathbf{A} = A_{\mu_1 \ldots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}$$

heeft men dat

$$d\mathbf{A} = \partial_\mu A_{\mu_1 \ldots \mu_k} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}$$

hetgeen coordinaat onafhankelijk is gegeven dat tweede partiele afgeleiden symmetrisch zijn terwijl men het antisymmetrisch deel neemt ten gevolge van het $\wedge$-product. Bijgevolg gedraagt de ganse uitdrukking zich als een totale antisymmetrische $(0, k+1)$ tensor. Noteer dat de rand operator ∂ in simpliciale homologie en de uitwendige afgeleide beide voldoen aan

$$d^2 = 0$$

zoals de lezer kan verifieren. Dus d laat dezelfde constructie toe als die voor ∂ wat resulteert in de-Rahm cohomologie theorie. Je kunt direct aanvoelen waar dit naartoe gaat: als Ω_k een maat is voor kleine k dimensionale oppervlakken, dan is $d\Omega_k$ een maat voor $k+1$ dimensionale oppervlakten die alleen afhangt van de k-dimensionale rand. Dit is precies de inhoud van Stokes theorema dat we later zullen bestuderen in de context van Lebesgue integralen. Stokes theorema kan echter op een meta niveau bewezen worden als volgt (dit bewijs is geheel nieuw en nooit voorheen gepubliceerd bij mijn weten): gegeven een dualiteitsrelatie $\langle \Omega_k, S_k \rangle_k$ tussen k-vormen en k-simpliciale complexen die voldoet aan

- $\langle \Omega_k, S_k \cup T_k \rangle_k = \langle \Omega_k, S_k \rangle_k + \langle \Omega_k, T_k \rangle_k - \langle \Omega_k, S_k \cap T_k \rangle_k$ waarbij $S_k \cap T_k$ gelijkgesteld wordt aan $\emptyset$ indien het een lager dimensionaal simpliciaal complex is,
- $\langle \Omega_k, \emptyset \rangle_k = 0$ en $\langle a\Omega_k + b\Omega'_k, S_k \rangle_k = a\langle \Omega_k, S_k \rangle_k + b\langle \Omega'_k, S_k \rangle_k$,
- er bestaat een lineaire operator D_k die een k-vorm afbeeldt op een $k+1$-vorm zodat $\langle \Omega_k, \partial S_{k+1} \rangle_k = \langle D_k(\Omega_k), S_{k+1} \rangle_{k+1}$.

Je toont nu aan dat aan de derde voorwaarde voldaan is gegeven de eerste twee voorwaarden als en slechts als

$$|\langle \Omega_k, \partial S_{k+1} \rangle_k - \langle D_k \Omega_k, S_{k+1} \rangle_{k+1}| \leq M |\langle \Omega_k, \partial S_{k+1} \rangle_k|^{\frac{k+2}{k}}$$

voor een bepaalde $M > 0$, onafhankelijk van S_{k+1}, in de limiet $S_{k+1} \to \emptyset$. Deze voorwaarde noemen we de micro-rand voorwaarde. Vanuit de definitie van D_k en $\partial^2 = 0$ kun je nu afleiden dat $D_{k+1} D_k = 0$, en vermits d de enige lineaire operator is die men kan bedenken die coordinaat invariant is, moet $D_k = c_k d$ met c_k een reeele constante. Dus een gepaste notie van integraal voldoet aan de micro-rand voorwaarde met $D_k = d$. Er zijn verschillende kandidaten zoals de Riemann, Stieltjes en Lebesgue integraal. De filosofie achter de d operator is dat ze een k-vorm laat kruipen in de $k+1$-de dimensie op een manier zodat het $k+1$ volume alleen afhangt van de k dimensionele rand.

In de rest van dit hoofdstuk introduceren we de Lebesgue integraal die op een meer algemene klasse van functies werkt dan de differentieerbare functies. We behandelen dit op de meest algemene manier voor topologische ruimten X

uitgerust met een Hausdorff topologie $\tau(X)$. Banach en Tarski hebben erop gewezen dat zulke integratie theorie alleen zinvol is voor meetbare verzamelingen. Origineel verliep het argument via de Banach Tarski paradox dewelke *verkeerd* is alsook het bewijs ervan. Deze bestaat erin een eenheidssfeer op te delen in stukken die men kan assembleren tot twee eenheidssferen die hetzelfde zijn vanuit een oppervlakte perspectief hetgeen uiteraard niet kan. We herinneren de lezer eraan dat de Borel-Sigma algebra $\mathcal{B}(X)$ gedefinieerd door $\tau(X)$ gegenereerd wordt door de open verzamelingen $A \in \tau(X)$ door het nemen van complementen en oneindige unies en intersecties. Gegeven $\mathcal{B}(X)$, we definieren een maat μ aan de hand van de eigenschappen

- $\mu(A) \geq 0$ voor alle $A \in \mathcal{B}(X)$,
- $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ als voor alle $n \neq m$ geldt dat $A_n \cap A_m = \emptyset$,
- $\mu(\emptyset) = 0$.

We noemen de maat niet ontaard als en slechts als $\mu(B) > 0$ voor elke $B \in \tau(X)$, dus open verzamelingen hebben een niet nul volume. De constructie van de Lebesgue integraal is nogal uitgebreid en hangt af van sterke convergentie criteria dewelke ik bekritiseerd heb in het verleden. Een functie $f : X \to \mathbb{R}$ wordt meetbaar genoemd als en slechts als $f^{-1}(C)$, met $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, behoort tot $\mathcal{B}(X)$; dus, de inverse van een meetbare verzameling is meetbaar. Je toont aan dat een continue funtie meetbaar is door gebruik te maken van de constructie van meetbare verzamelingen uit open verzamelingen. Lebesgue splitst nu een functie in een positief en negatief deel $f = f^+ - f^-$ met $f^+ = \max\{f, 0\}$ en $f^- = \max\{-f, 0\}$ en de integraal voor meetbare, positieve functies is gegeven door:

$$\int f^{\pm}(x) d\mu(x) = \sup_{\text{partities } (A_n)_{n\in\mathbb{N}}} \sum_n \left(\inf_{x\in A_n} f^{\pm}(x) \right) \mu(A_n).$$

Voor een positieve continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ is de integraal niets anders dan de oppervlakte omsloten door de grafiek van f en de x as, mogelijk af gebakend door vertikale lijnen indien de integraal grenzen heeft. Deze oppervlakte wordt berekend door de x-as onder te verdelen in kleine intervalletjes en het minimum van de functie over dit interval te vermenigvuldigen met haar lengte. De integraal is dan de bovenlimiet van deze procedure door de intervalletjes kleiner en kleiner te kiezen zodat het minimum steeds groter wordt. Het verband tussen k-vormen $\Omega_k = \Omega_{\mu_1\dots\mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}$ en maten is dan gegeven door een open verzameling te schrijven als de limiet van een bedekking door k-dimensionale kleine kubussen gedefinieerd door vectoren $v_1 \dots v_k$ en $\int_{S_k} \Omega_k$ te schrijven als de limiet van $\sum_{\text{kubussen}} \Omega_{\mu_1\dots\Omega_{\mu_k}}(x_0) v_1^{\mu_1} \dots v_k^{\mu_k}$ waarbij x_0 het hoekpunt van de kubus is vanuit hetwelk de vectoren v_j aangrijpen. Duidelijk is deze definitie invariant onder coordinaten transformaties. Toon nu hetvolgende aan voor differentieerbare éénvormen $\Omega_1 = f dx$:

- $\int$ definieert een dualiteitsrelatie tussen éénvormen en ééndimensionale simplices die voldoet aan alle drie voorwaarden (en dus in het bijzonder de micro-rand voorwaarde); in het bijzonder geldt $\int_{[a,b]} df = f(b) - f(a)$,

- de ééndimensionale versie van Stokes theorema suggereert dat d en $\int$ elkaars inverse zijn; toon aan dat $d_x \int_{[a,x]} f(s)ds = f(x)dx$ en dus is $\int$ de rechter inverse van d wanneer men zich beperkt tot éénvormen; de kern van d is de verzameling van de constante functies en dus is $\int$ geen linker inverse wanneer men zich beperkt tot de functies,
- uit $d(fg) = dfg + fdg$ volgt dat $\int_{[a,b]} (g(x)\partial_x f(x) + f(x)\partial_x g(x))\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ wat de regel van partiele integratie is.

De regel van partiele integratie is erg belangrijk voor het berekenen van veel ééndimensionale integralen. Buiten Stokes theorema is er nog een belangrijke eigenschap van integralen dewelke invariantie is onder de actie van diffeomorphismen wat aantoont dat de dualiteits relatie intrinsiek is. We maken dit precies in het hoofdstuk over meetkunde.

Lebesgue veronderstelde dat de geassocieerde limieten over partities eindig zijn en stelde dat de integraal van f gegeven is door

$$\int f(x)d\mu(x) = \int f^+(x)d\mu(x) - \int f^-(x)d\mu(x).$$

De uitbreiding naar complexwaardige functies toe is evident en we behandelen nu twee belangrijke stellingen. De eerste is Fubini's theorema hetwelk we continue gebruiken wanneer we integralen berekenen: laat X, Y twee Hausdorff topologische ruimtes zijn uitgerust met een Borel-sigma algebra $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$, dan kun je $\mathcal{B}(X \times Y)$ definieren vanuit de producttopologie op $X \times Y$ gegenereerd door open vierkanten $A \times B$ met $A \in \tau(X)$ en $B \in \tau(Y)$. Duidelijk is $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ en hieruit kan je productmaten $\mu \times \nu$ definieren. Zij $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ een meetbare functie waarvoor geldt dat $\sup_{y \in Y} \left| \int_X f(x,y)d\mu(x) \right| < \infty$ en $\sup_{x \in X} \left| \int_Y f(x,y)d\nu(y) \right| < \infty$ dan is

$$\left| \int_{X \times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu)(x,y) \right| < \infty$$

en bovendien hebben we dat

$$\int_{X \times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu)(x,y) = \int_X d\mu(x) \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) = \int_Y d\nu(y) \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right).$$

Noteer dat het stellen van uniforme grenzen over de partiele integralen noodzakelijk is. Beschouw bijvoorbeeld de ruimte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ en de functie $f(x,y) = e^{-x^2 y}$ dan is

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 y} dx = \sqrt{\frac{\pi}{y}}$$

en

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-x^2 y} = \frac{1}{x^2}$$

wat niet uniform begrensd is. Dan heeft men dat

$$\int_{\mathbb{R}_0^+} dy \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 y} dx \right) = \infty = \int_{\mathbb{R}} dx \left(\int_{\mathbb{R}_0^+} e^{-x^2 y} dy \right)$$

waar in de eerste integraal de pool van $\sqrt{\frac{\pi}{y}}$ op $y = +\infty$ verantwoordelijk is voor de divergentie en waar in het laatste geval de pool op $x = 0$ van $\frac{1}{x^2}$ de oorzaak is voor de patologie.

Het tweede theorem is Lebesgues gedomineerde convergentie stelling welke als volgt gaat: veronderstel een rij van meetbare functies f_n die puntsgewijs convergeert naar een functie f zodat $|f_n| \leq g$ voor alle n en g is integreerbaar. Dan,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

en $\left| \int f_n d\mu \right| \leq \int g d\mu$. De bewijzen van deze stellingen zijn nogal saai en evident en de geinteresseerde lezer mag ze opzoeken in een goed boek. Je toont finaal aan dat de Lebesgue integraal voldoet aan de nodige dualiteitsvoorwaarden in elke dimensie zodat de toegevoegde operator van ∂ gegeven is door d.

Oefeningen: bereken enkele afgeleiden en integralen.

- Bereken $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \sin^2(\pi(x+y))$,
- bereken $\partial_x \partial_y \sin(xy + y^2)$,
- bereken alle oplossingen van $(\partial_x^2 - \partial_y^2) f(x,y) = 0$,
- bereken $\int_1^x \frac{1}{y^2+ay} dy$.

Chapter 9

Complexe analyse en hypercomplexe analyse.

Met complexe analyse bedoelen we analyse met functies in een complexe veranderlijke; deze is grappig genoeg eenvoudiger dan de analyse van functies in één veranderlijke omdat een complexwaardige functie in één complexe veranderlijke gezien kan worden als een gesloten éénvorm in twee reeele veranderlijken en aldus kunnen we beroep doen op Stokes theorema. Dit is de magie van het getal i wanneer men analyse doet in de complexe veranderlijke $z = x + iy$. Zoals gezegd kan men z zien als een samenstelling van twee reeele veranderlijken x, y wat suggereert over te stappen naar de variabelen $z, \overline{z}$. Men kan dus de partiele differentialen

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right), \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right)$$

definieren met de eigenschappen

$$\frac{\partial}{\partial z} z = 1, \ \frac{\partial}{\partial z}\overline{z} = 0$$

en omgekeerd. Daarom voldoet een functie in een complexe veranderlijke z, $f(z)$ aan de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0$$

tenminste wanneer de eerste partiele afgeleiden naar x, y bestaan. Een complexwaardige functie in z kan geinterpreteerd worden als een eenvorm op $\mathbb{R}^2$ door middel van de formule

$$f(z) = \mathrm{Re} f(z) + i\mathrm{Im} f(z)$$

waar de afbeelding gebeurt in een vast coordinatenstelsel. De transformatie eigenschappen van $f(z)$ onder $z \to z(z')$ komen niet overeen met de gepaste transformatie wetten van de eenvorm wat betekent dat de afbeelding van complexe functies in één complexe veranderlijke naar eenvormen op $\mathbb{R}^2$ niet canonisch is. Dit kan verstaan worden vanuit het voorbeeld $f(z) = z$ en $z = z'^2$; dus

$f(z'^2) = (x'^2 - y'^2) + 2ix'y'$ waar $\frac{\partial x}{\partial x'} = 2x'$, $\frac{\partial y}{\partial x'} = -2y'$, $\frac{\partial y}{\partial x'} = 2y'$ en $\frac{\partial y}{\partial y'} = 2x'$ zodat

$$\mathrm{Re}f'(z') \neq \frac{\partial x}{\partial x'}\mathrm{Re}f(z'^2) \pm \frac{\partial y}{\partial x'}\mathrm{Im}f(z'^2)$$

waar $f'(z') = f(z'^2)$. Desalniettemin, indien men noteert dat $\mathbf{F}(z) = \mathrm{Re}f(z)dx - \mathrm{Im}f(z)dy$, dan bekom je dat de voorwaarde

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0$$

equivalent is aan

$$d\mathbf{F}(z) = 0, \partial^\alpha F_\alpha = 0$$

wat betekent dat de éénvorm gesloten is en nul divergentie heeft. Gebruik makende van $dz = dx + idy$ bekom je dat

$$f(z)dz = \mathbf{F}(z) + i(F_x dy - F_y dx).$$

Het imaginair deel is gesloten omdat $d(F_x dy - F_y dx) = (\partial^\alpha F_\alpha)\, dx \wedge dy = 0$ en dus is deze ganse complexwaardige éénvorm gesloten. Stokes theorema zegt dan dat

$$0 = \int_S d\mathbf{F}(z) + i\, d(F_x dy - F_y dx) = \int_{\partial S} f(z)dz$$

waar S eender welk oppervlak is in $\mathbb{R}^2$ waarop $df(z)$ bestaat. Bijgevolg hangt de integraal van f over elke geslte kromme alleen af van de homologie klasse binnen dewelke f analytisch is wat betekent dat

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0.$$

Nu tonen we aan dat indien $f(z)$ analytisch is, dat dan $\frac{\partial}{\partial z} f(z)$ bestaat en terug analytisch is. Duidelijk moeten we alleen aantonen dat de tweede partiele afgeleiden bestaan en continue zijn; in dat geval

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z) = 0.$$

Om dat te bewijzen merk je op dat

$$\lim_{|z-a| \to 0} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\partial}{\partial a} f(a)$$

wat volgt uit

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{(f(z) - f(a))(\overline{z - a})}{|z - a|^2} = \frac{(\mathrm{Re}f(z) - \mathrm{Re}f(a))(x - b) + (\mathrm{Im}f(z) - \mathrm{Im}f(a))(y - c)}{|z - a|^2}$$

$$\frac{-i(\mathrm{Re}f(z) - \mathrm{Re}f(a))(y - c) + i(\mathrm{Im}f(z) - \mathrm{Im}f(a))(x - b)}{|z - a|^2}$$

$$\sim \frac{\partial}{\partial a} f(a) \frac{|z-a|^2}{|z-a|^2}$$

waar we in de laatste stap $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z)$ gebruikt hebben. Door gebruik te maken van Stokes theorema en de limiet te nemen van erg kleine cirkels rond a, toon je aan dat

$$\int_{S^1(a,\epsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

waarbij $S^1(a,\epsilon)$ de cirkel met straal ϵ rond a is. Hieruit volgt het dat $f(a)$ een oneindig aantal maal afgeleid kan worden met betrekking tot a en dat alle afgeleiden dus analytisch zijn. Dit resultaat kan makkelijk veralgemeend worden tot

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi n i f(a)$$

waarbij γ een gesloten kromme is in een omgeving van a die n keer draait rond a.

Een van de belangrijkste eigenschappen van een analytische functie is dat deze geschreven kan worden als een convergerende machtreeks in een omgeving van a; meer specifiek,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

waarbij het rechterlid eindig is voor $|z-a| < \epsilon$. Het bewijs van deze bewering is vrij makkelijk en volgt uit

$$\int_{S^1(a,\epsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

Wanneer men dit n-keer differentieert met betrekking tot a krijgt men

$$n! \int_{S^1(a,\epsilon)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 2\pi i \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^n f(a)$$

waaruit vgolgt dat

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^n f(a) \right| \leq \frac{n!}{\epsilon^n} \max_{z \in S^1(a,\epsilon)} |f(z)| .$$

Vervolgens toon je aan dat

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^k f(a)(b-a)^n$$

wat volgt uit

$$f(b) - f(a) = (b-a) \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1(a,\epsilon)} \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)} = (b-a) \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1(a,\epsilon)} \frac{f(z)}{(z-a-(b-a))(z-a)}$$

$$= (b-a)\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1(a,\epsilon)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b-a)^{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{n+1} f(a)}{(n+1)!}.$$

Hier hebben we gebruikt dat

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

voor $|z| < 1$ zoals je direct kunt verifieren. Convergentie van de reeks volgt dan uit

$$\left|\frac{(b-a)^n\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^n f(a)}{n!}\right| \leq M\left(\frac{|b-a|}{\epsilon}\right)^n$$

zodat de reeks convergeert voor

$$|b-a| < \epsilon.$$

Een complexwaardige functie $f(z)$ wordt meromorf genoemt als en slechts als ze overal analytisch is met uitzondering van een aftelbaar aantal geisoleerde punten a_i zodat $f(z)(z-a_i)^{n_i}$ analytisch is met $\lim_{z\to a_i} f(z)(z-a_i)^{n_i} \neq 0$. We hebben dus dat

$$\int_{\gamma_j} f(z)(z-a_j)^{n_j-1}dz = 2\pi i \lim_{z\to a_j} f(z)(z-a_j)^{n_j}$$

waar γ_j een gesloten kromme is die rond a_j eenmaal windt. In het geval $n_j = 1$ noemen we a_j een pool en $\mathrm{res}(a_j) := \lim_{z\to a_j} f(z)(z-a_j)$ het residu; we hebben in dat geval dus

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{all poles } a_j \in S} m_j \mathrm{res}(a_j)$$

waar m_j het windgetal is van γ rond a_j. Deze formule is van extreem belang voor het berekenen van integralen van meromorfe functies en je maakt hier later een paar oefeningen op.

Je kunt deze analyse uitbreiden naar de hypercomplexe of Cliffordwaardige functies toe in de veranderlijke $x = x_0.1 + x^i.e_i$ waarbij $e_ie_j + e_je_i = 2\epsilon_i\delta_{ij}$ met $\epsilon_i = \pm 1$ en $i : 1 \ldots N$. x_0, x_i zijn in dit geval reeele getallen maar kunnen ook complex genomen worden. Cliffordwaardige functies in de veranderlijke x hoeven niet te voldoen aan een differentiaalvergelijking zoals dit het geval is voor de complexe analyse. Inderdaad, het is natuurlijk de Dirac operator $D = e^j\partial_j$ alsook de operatoren $\partial_x = \frac{1}{2N}(N\partial_0 + D)$ en $\partial_{x^\star} = \frac{1}{2N}(N\partial_0 - D)$, waarbij $e_i^\star = -e_i$, te definieren. Je controleert dan onmiddelijk dat $\partial_x(x) = 1, \partial_x(x^\star) = 0$ en omgekeerd voor $\partial_{x^\star}$. Je moet hier echter een beetje oppassen in de zin dat in termen van operatoren

$$D(\vec{x}F) = \sum_{ij} e^ie_j\partial_i(x_jF) = \sum_{ij} e^ie_j(\delta_i^jF + x^j\partial_iF) = N\,F + 2\sum_i x^i\partial_iF - \vec{x}(DF)$$

en dus in het algemeen

$$\partial_x(xF) = F + \mathbf{E}(F) + x\partial_{x^\star}F + \frac{1}{N}x_0(DF)$$

en evenzo

$$\partial_{x^\star}(x^\star F) = F + \mathbf{E}(F) + x^\star\partial_x F - \frac{1}{N}x_0(DF)$$

alsook

$$\partial_{x^\star}(xF) = -\mathbf{E}(F) + x\partial_x F - \frac{1}{N}x_0(DF).$$

Het is dus remarkabel dat gewisseld wordt tussen $x, x^\star$ en uitsluitend in een *commutatieve* Clifford algebra met één generator worden deze netjes gescheiden en geldt de Leibniz regel. $\mathbf{E} := \frac{1}{N}x^j\partial_j$ is de zogenaamde Euleroperator die wel voldoet aan de Leibniz regel en bovendien gehoorzaamt

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{N}\vec{x}, \mathbf{E}(x^\star) = -\frac{1}{N}\vec{x}.$$

Bijgevolg

$$\partial_{x^\star}x^2 = -\mathbf{E}(x) + x - x_0 = -\frac{1}{N}\vec{x} + x - x_0 = \frac{N-1}{N}\vec{x}$$

wat waar is vermits

$$x^2 = x_0^2 + \epsilon_j x_j^2 + 2x_0\vec{x}.$$

Ook geldt dat

$$\partial_x x^2 = x + \frac{1}{N}\vec{x} + x_0 = 2x - \frac{N-1}{N}\vec{x}$$

wat de gepaste schending van de Leibniz regel duidt. Het probleem resulteert uiteraard uit de mengeling van commutatieve en "'zuivere" Clifford coordinaten gegeven dat

$$D\vec{x}^2 = 2\vec{x}$$

en in het algemeen wel aan de Leibniz regel voldaan is vermits $\vec{x}^2$ een veelvoud van de eenheid is. Best is dus complexe Clifford algebra's te beschouwen en te resorteren tot de Dirac operator alsook reeele secties ervan; in relativiteitstheorie impliceert dit het Dirac beeld in plaats van het Pauli spinor beeld. Voortaan beschouwenn we dus functies in de vectorverandelijke $x := \vec{x} = x^j e_j$ met de x^j complex en is $x^\star$ gedefinieerd als

$$x^\star = -\overline{x}^j e_j.$$

We beschouwen dus functies waarvoor

$$\partial_{x^\star}F(x^0, x^j) = 0$$

wat niet impliceert dat $F(x^0, x)$. Bijvoorbeeld,

$$F(x^0, x^j) = f(x_i - x_j, x^k, x^0)(e_i + e_j)$$

met $k \neq \{i,j\}$ alsook het complex toegevoegde, voldoet aan de mastervergelijking. Teneinde deze vrijheidsgraden verder te elimineren beschouwen we een verzameling van N genormeerde reeele orthogonale operatoren A_k ten aanzien van het skalair product

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger GBG)$$

het is te zeggen

$$\langle A_k|A_j\rangle = \frac{1}{N}\delta_{kj}$$

waarbij $G^i_j = \epsilon_i\delta^i_j$ en geen Einstein sommatie plaatsgrijpt; verder is $g_{ij} = \epsilon_i\delta_{ij}$. Verder kun je ervoor zorgen dat deze N "orthogonale matrices" voldoen aan

$$A^r_{i,k}g^{kl}A^s_{j,l} = \frac{\epsilon_i+\epsilon_j}{4N}(\delta^r_i\delta^s_j + \delta^s_i\delta^r_j)$$

en je kunt makkelijk inzien dat je er niet meer dan N van dit type kunt vinden. Per afspraak is de matrix $(A_1)^i_j = \frac{1}{N}\delta^i_j$ en definieren we

$$\partial_{A_i} := \sum_{j,k} e^j A^k_{i,j}\partial_{x^k}.$$

De operator

$$D = \partial_{A_1}$$

blijft vast onder de veralgemeende *reeele* orthogonale transformaties gedefinieerd door het scalair product . De andere $N-1$ operatoren roteren onder elkander en we zoeken verder voor hogere rotatie-invarianten; bijvoorbeeld

$$\partial_{A_i}\partial_{A_j} + \partial_{A_j}\partial_{A_i} = A^r_{i,k}g^{kl}A^s_{j,l}\partial_{x^r}\partial_{x^s} = \frac{\epsilon_i+\epsilon_j}{2N}\partial_{x^i}\partial_{x^j}$$

waarvan de contractie met δ^{ij} gelijk is $\frac{1}{N}$ van de complexe d'Alembertiaan $\Box_g$. Een orthogonale g transformatie wordt omgezet in een Euclidische transformatie van de A_i naar een andere N dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^{N^2}$ opgespannen door N g-orthogonale matrices. Dit betekent echter niet dat elke functie van x in aanmerking komt; bijvoorbeeld

$$F(x) = xe_1x$$

is links monogeen in de zin

$$\partial_{x^\star}F(x) = 0$$

wat evident volgt uit de eigenschap

$$D^\star(xF(x^0,x^k,\overline{x}^0,\overline{x}^k)) = -\sum_{ij} x^j e^i e_j \partial_{\overline{x}^i}F(x^0,x^k,\overline{x}^0,\overline{x}^k) =$$

$$-2\sum_j x^j\partial_{\overline{x}^j}F(x^0,x^k,\overline{x}^0,\overline{x}^k) - xD^\star F(x^0,x^k,\overline{x}^0,\overline{x}^k).$$

Helaas,

$$D(xe_1x) = Ne_1x - xD(e_1x) + 2N\mathbf{E}(e_1x) = Ne_1x - 2xe_1 + Nxe_1 + 2e_1x = (N+2)e_1x + (N-2)xe_1.$$

Een bijzondere klasse van functies zijn machtreeksen $P(x)$ in x met reeele (complexe) coefficienten, deze gedragen zich net als de analytische functies voor complexe getallen. We werken deze theorie verder uit in de oefeningen.

Finaal toon je als oefening aan dat elke complexe veelterm van n de graad precies n nulpunten heeft; indien dit niet het geval zou zijn, dan bestaat er een veelterm $Q(z)$ zonder nulpunten; bijgevolg is de functie $\frac{1}{Q(z)}$ analytisch op gans het complexe vlak en geldt dus

$$\frac{1}{Q(a)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1(a,R)} \frac{dz}{Q(z)(z-a)}.$$

Neem nu de limiet voor R naar oneindig om aan te tonen dat het rechterlid nul is. Dit impliceert dat $Q(a)$ oneindig moet zijn wat niet kan.

Clifford analyse.
Bereken vooreerst dat

$$\partial_{A_i}(NA_j^c F(N(A_k^c), N(A_l^c)^\star)) = \sum_{p,q,r,s,t,v} Ne^r A_{i,r}^s \partial_{x^s}\left(x^p g_{pt} A_{j,v}^t g^{vq} e_q F(NA_k, NA_l^\star)\right)$$

waarbij $(A_j^c)_s^r = A_{j,p}^q g_{qs} g^{rp}$, gelijk is aan

$$\sum_{p,q,r,s,t,v} Ne^r e_q A_{i,r}^s g_{pt} A_{j,v}^t g^{vq}\left(\delta_s^p F + x^p \partial_{x^s} F\right) = (F + 2N\mathbf{E}(F))\delta_{ij} - NA_j^c \partial_{A_i} F.$$

Evenzo is

$$\partial_{A_i}(N(A_j^c)^\star F(N(A_k^c), N(A_l^c)^\star)) = -2\sum_k \overline{x}^k \partial_{x^k}(F)\delta_{ij} - N(A_j^c)^\star \partial_{A_i} F$$

en daarom

$$\partial_{A_i} P(NA_1^c) = 0 = \partial_{A_i^\star} P(NA_1^c) = 0 = \partial_{A_1^\star} P(NA_1^c)$$

voor alle $i = 2 \ldots N$. Zoals gewoonlijk is P een veeltermmet complexe coefficienten. Het is duidelijk dat veel meer functies voldoen aan deze eigenschappen, doch dat dit een minimale characterisering is. We stellen $P(NA_1^c)$ voor aan de hand van een cohomologieklasse door de differentiaalvormen

$$NdA_j^c = \sum_{k,l,r,t} g_{kt} A_{j,r}^t g^{rl} dx^k e_l$$

alsook hun $\star$ toegevoegden. In het reeele geval bestuderen we de $N-1$ vorm

$$N^{N-1} dA_2^c \wedge dA_3^c \ldots \wedge dA_N^c$$

waarbij we eerst het $\wedge$ product van k Clifford elementen definieren als

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \ldots \wedge e_{i_k} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{Sign}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} e_{i_{\sigma(2)}} \ldots e_{i_{\sigma(k)}}.$$

De bedoeling zou dan zijn dat de dx^k het standaard $\wedge$ product van de Clifford algebra erven; dit is echter onmogelijk omdat dan het onderstaand product symmetrisch is in de factoren dA^c_k,

$$N^{N-1} dA^c_2 \wedge dA^c_3 \ldots \wedge dA^c_N = N^{N-1} \sum_{i_2,\ldots,i_N,j_2,\ldots,j_N} \left(\prod_{k=2}^{N} (A^c)^{i_k}_{k,j_k} \right) e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_N} dx^{j_2} dx^{j_3} \ldots dx^{j_N}.$$

Teneinde meer overzicht in deze formule te krijgen gebruiken we de insertie $\mathbf{i}_j$ gedefinieerd door

$$\mathbf{i}_j(e_1 \ldots e_N) = e_1 \ldots e_{j-1} e_{j+1} \ldots e_N = (-1)^{j+1} e^j e_1 \ldots e_N$$

en idem voor de volumevorm

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^N.$$

Bijgevolg wordt onze formule

$$N^{N-1} \sum_{j,i_2 \ldots i_N} \left(\prod_{r=2}^{N} \sum_{\sigma \in S^N_j} \mathrm{Sign}(\sigma) (A^c)^{\sigma(r_j)}_{r,i_k} \right) \mathbf{i}_j(e_1 \ldots e_N) dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_N}$$

waarbij $\rho_j(r) := r_j = r-1$ als $r \leq j$ en r anders. S^N_j is de groep der permutaties op N elementen die het j-de element vasthouden; bij wijze van notatie is $\sigma'_j := \rho_j^{-1} \circ \sigma \circ \rho_j$. Dit zet geen zoden aan de dijk; veel beter is het symmetrische Clifford product te beschouwen

$$e_{i_1}.e_{i_2}.\ldots.e_{i_r} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S^r} e_{i_{\sigma(1)}} \ldots e_{i_{\sigma(r)}}$$

alsook het antisymmetrische op de differentiaalvormen. Dit leidt tot de skalaire grootheid

$$dA^c_j \wedge dA^c_k = \sum_{r,s,t,u} (A^c)^r_{j,t} g_{rs} (A^c)^s_{k,u} dx^t \wedge dx^u$$

en dit verdwijnt indien $j = k$ omwille van de antisymmetrie van $dx^t \wedge dx^u$. Het is hier misschien opportuun een andere basis A_j te kiezen, namelijk een die voldoet aan

$$(A^c)^r_{j,t} g_{rs} (A^c)^s_{k,u} = \frac{1}{N^2} (\lambda(g_{jt} g_{ku} - g_{kt} g_{ju}) + \delta_{kj} g_{tu}).$$

Dan hebben we dat

$$dA^c_j \wedge dA^c_k = \frac{2\lambda \epsilon_j \epsilon_k}{N^2} dx^j \wedge dx^k$$

en de lezer controleert of dergelijke Noldus-Verschelde normering bestaat. Bij drie indices gebeurt er echter niks speciaals:

$$dA_j^c \wedge dA_k^c \wedge dA_l^c = \sum_{r,s,t,u,v,w} e_r.e_s.e_v (A^c)^r_{j,t} (A^c)^s_{k,u} (A^c)^v_{l,w} dx^t \wedge dx^u \wedge dx^w$$

waarbij

$$e_r.e_s.e_v = \frac{1}{3}(g_{rs}e_v + g_{rv}e_s + g_{sv}e_r)$$

wat resulteert in

$$dA_j^c \wedge dA_k^c \wedge dA_l^c = \frac{1}{3}((dA_j^c \wedge dA_k^c) \wedge dA_l^c - (dA_j^c \wedge dA_l^c) \wedge dA_k^c + dA_j^c \wedge (dA_k^c \wedge dA_l^c))$$

enzovoort. Je kunt nu de uitwendige afgeleide van een Cliffordwaardige functie F op twee manieren definieren; oftewel

$$d_1 F := N \partial_{A_i} dA_i^c F + N \partial_{A_i^\star} d(A_i^c)^\star F$$

oftewel

$$d_2 F := N \partial_{A_i} F dA_i^c + N \partial_{A_i^\star} F d(A_i^c)^\star$$

en bereken dat

$$A_j^c dA_k^c + dA_k^c A_j^c = \sum_{r,t,u,v} (A_j^c)^r_t (A_k^c)^u_v x^t dx^v 2 g_{ru}.$$

Onder de Noldus-Verschelde normering reduceert dit tot

$$A_j^c dA_k^c + dA_k^c A_j^c = \sum_{t,v} \frac{2}{N^2}(\lambda(g_{jt}g_{kv} - g_{kt}g_{jv}) + \delta_{kj}g_{tv}) x^t dx^v = \frac{1}{N^2}(2\lambda\epsilon_j\epsilon_k(x^j dx^k - x^k dx^j) + \delta_{kj} d(g_{tv}x^t x^v)).$$

Voor $j \neq k$ hebben we dus dat

$$A_j^c dA_k^c + dA_k^c A_j^c = \frac{2\lambda\epsilon_j\epsilon_k}{N^2} L^{jk}$$

waarbij

$$L^{jk} = x^j dx^k - x^k dx^j$$

de angulaire momentum tensor voorstelt. Teneinde hebben we nog de afleiding

$$\partial_{A_k} \left(\sum_{r,t,u} (A_j^c)^r_t (A_k^c)^u_v x^t 2 g_{ru} \right)$$

nodig; deze is gegeven door

$$\sum_{p,q} e^p A^q_{k,p} \partial_{x^q} \left(\sum_{r,t,u} (A_j^c)^r_t (A_k^c)^u_v x^t 2 g_{ru} \right) = 2 \sum_{p,q,r,u} e^p A^q_{k,p} g_{ru} (A_j^c)^r_q (A_k^c)^u_v$$

en dit laatste is gelijk aan, in het geval $j = 1$,

$$\frac{2}{N} \sum_{p,q,r,u} e^p A^q_{k,p} g_{qu} (A^c_k)^u_v = \frac{2}{N^3} e_v.$$

Nu hebben we de eigenschap dat

$$P(x) = f(x^2) + g(x^2)x$$

met f, g skalaire veeltermen; vervolgens is

$$d_1 P(x) = f'(x^2) 2x dx + \partial_x (\frac{1}{N^2} g(x^2) d(x^2) - g(x^2) x dx) + \frac{2(N-1)}{N^3} g(x^2) dx =$$

$$2f'(x^2) x dx + \frac{4}{N^2} g'(x^2) x (x.dx) - 2g'(x^2) x^2 dx - g(x^2) dx + \frac{2}{N^2} g(x^2) dx$$

wat een Cliffordwaardige éénvorm oplevert met basiselementen $1, e_j, e_j e_k$. Dit levert dan op dat

$$d_1 \left(P(x) N dA^c_1 \right) = 4N^{-1} g'(x^2) x (x.dx) \wedge dA^c_1$$

wat verder uitgerekend kan worden als

$$4N^{-1} g'(x^2) \sum_{j,k,l,m} x^j (g_{jm} + e_{[j} e_{m]}) x^k g_{kl} dx^l \wedge dx^m = 4N^{-1} g'(x^2) e_{[j} e_{m]} x^j \left(\sum_{k,l} x^k g_{kl} dx^l \right) \wedge dx^m$$

wat een bi-Clifford getal oplevert. De uitwendige afgeleide

$$d_2 \left(P(x) dx \right) = 0.$$

Je onderzoekt nu veralgemeningen van Stokes theorem en cohomologie zoals bepaald in hoofdstuk elf op twee manieren: (a) ten eerste vanuit het standpunt van éénvormen voor verschillende d operatoren(bijvoorbeeld, definieer $d_3 F = N(\partial_{A_i} F).dA^c_i + N(\partial_{A^\star_i} F).d(A^c_i)^\star$) en (b) ontwikkel een theorie van gesloten k-vormen, met $k : 2 \ldots N$. Veel plezier ermee.

Chapter 10

Speciale functies.

De chronologie die we hier zullen aannemen is totaal verschillend van datgene wat je gewend bent in een standaard programma. Bijgevolg zijn de inzichten alsook de methodes die je zult verwerven een pak diepgaander dan standaard het geval is. We beginnen bij de exponentiele functie vermits zij de basis vormt voor de rest; e^x kan geintroduceerd worden op verschillende manieren en we zullen ze allen behandelen. Allereerst is e^{rx} een eigenfunctie van de operator ∂_x; het is te zeggen

$$\partial_x e^{rx} = re^{rx}.$$

De lezer merkt op dat de functie $f_n(rx) = \left(1 + \frac{rx}{n}\right)^n$ voldoet aan

$$\partial_x f_n(rx) = r f_{n-1}(rx)$$

dus het nemen van de limiet voor n naar oneindig produceert e^{rx}. Inderdaad

$$e^{rx} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{rx}{n}\right)^n$$

en je toont aan dat deze uitdrukking convergeert in twee stappen (a) voor positieve rx definieert $f_n(rx)$ een stijgende positieve rij en (b) het supremum is gegeven door

$$e^{rx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rx)^n}{n!}$$

hetgeen eindig is voor elke rx. Toon aan, vanuit de reeksontwikkeling, dat $\partial_x e^{rx} = re^{rx}$. Bovendien heb je dat

$$e^{r(x+y)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r(x+y)}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{rx}{n}\right)\left(1 + \frac{ry}{n}\right) - \frac{r^2xy}{n^2}\right)^n = e^{rx}e^{ry}$$

hetgeen ook makkelijk volgt uit $\partial_x e^{r(x+y)} = re^{r(x+y)}, \partial_x e^{rx}e^{ry} = re^{rx}e^{ry}$ en $e^{r(0+y)} = e^{ry} = e^{r0}e^{ry}$. Finaal toon je deze eigenschap aan vanuit de reeksontwikkelling; dit laatste suggereert dat de exponentiele functie goed gedefinieerd is voor elke complexe veranderlijke z en voldoet aan

- $e^{z+w} = e^z e^w$,
- $e^0 = 1$,
- $|e^{ix}| = 1$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.

Deze laatste eigenschap zegt dat de afbeelding $x \to e^{ix}$ de reeele as op de eenheidscirkel afbeeldt en de eerste formule reveleert dat een positieve x overeenkomt met de booglengte of hoek. Dus

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

waarbij

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

en

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Je controleert onmiddelijk dat $\partial_x \sin(x) = \cos(x), \partial_x \cos(x) = -\sin(x)$ en dus $\partial_x^2 \sin(x) = -\sin(x)$ en hetzelfde geldt voor $\cos(x)$. Uit de definitie van de modulus volgt dan onmiddelijk dat

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

en de regeltjes van Simpson volgen uit $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$:

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
- $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$.

We hebben dus in het algemeen dat elk complex getal voorgesteld kan worden als $z = re^{i\theta}$ waarbij $r \geq 0$ en $\theta = 0 \ldots 2\pi$ met 2π gelijk aan de lengte van de eenheidscirkel. Dit noemen we de polaire decompositie en deze kan veralgemeend worden naar normale operatoren:

$$A = |A|U$$

waarbij $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$ en U een partiele isometrie is. De exponentiele functie heeft een omgekeerde gegen door het natuurlijk logarithme $\ln(x)$; dit voldoet aav

$$x + y = \ln(e^{x+y}) = \ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y)$$

en aldus geldt voor een algemeen complex getal dat

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta.$$

Je merkt op dat deze definitie een discontunuiteit nalaat op de positieve reele as omdat de limiet langs boven gelijk is aan $\ln(x)$ en langs onder $\ln(x) + i2\pi$.

Dit fenomeen noemen we een singuliere snede wat erop neerkomt dat de functie niet eenduidig continue uitbreidbaar is tot die plaats. Afhankelijk van de keuze van referentiepunt op de cirkel kan deze snede steeds verlegd worden tot bijvoorbeeld de reeele negatieve as. Weg van de snede is ln analytisch zoals de lezer kan verifieren.

Vanuit de exponentiele functie kunnen we vele andere bijzondere functies definieren zoals de alpha, beta en gamma functie. Deze zijn standaard gedefinieerd aan de hand van speciale integralen. Zo is de gamma functie $\Gamma(x)$ voor $x \geq 0$ gedefinieerd als

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-s} s^x ds.$$

Toon aan dat

$$\Gamma(x+1) = (x+1)\Gamma(x)$$

voor $x > 0$ en $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(0)$. In het bijzonder is dus $\Gamma(n) = n!$ voor elk natuurlijk getal $n > 0$. Toon aan dat de gamma functie een unieke meromorfe uitbreiding heeft tot $\mathbb{C}$ met polen in $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Het is niet de bedoeling alle gedetailleerde eigenschappen van die functies te bestuderen en de geinteresseerde lezer kan ze opzoeken in Wikipedia. Punt is dat de basisfunctie gegeven is door de exponentiele.

Er zijn nog heel wat andere speciale functies die (benaderende) eigenfuncties zijn van zogenaamde differentiaaloperatoren; deze laatste zijn Hermitische uitbreidingen van dicht gedefinieerde, symmetrische operatoren op bepaalde functieruimten die gevormd zijn aan de hand van partiele afgeleiden. Meer bepaald zijn deze sommen van operatoren van de vorm

$$W^{i_1 \ldots i_k}(x) \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k}$$

waarbij $k \in \mathbb{N}$. Als voorbeeld heb je in één reele veranderlijke de zogenaamde Laguerre polynomen die eigenfuncties zijn van

$$-\partial_x^2 + \omega^2 x^2$$

met $\omega > 0$. Je kunt deze eenvoudig vinden door de operator $a = i\partial_x + i\omega x$ te definieren op de functieruinte waarvoor het inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int \overline{f(x)} g(x) dx$$

goed gesteld is. Je berekent dan door partiele integratie dat $a^\dagger = i\partial_x - i\omega x$ zodat

$$-\partial_x^2 + \omega^2 x^2 = a^\dagger a + \omega$$

en aldus zijn de eigenfuncties van de oorspronkelijke operator gelijk aan deze van $a^\dagger a$. Vindt nu Ψ zodat $a(\Psi) = 0$, dan zijn alle eigenfuncties gegeven door $(a^\dagger)^n(\Psi)$ hetgeen je bewijst uit $\left[a, a^\dagger\right] = 2\omega$. Bereken als oefening ook de

corresponderende eigenwaarden. Je moet je in dit soort redeneringen bekwamen, dit kom je vaak tegen in de fysica!

Clifford exponentiele functie.
Definieer de Clifford exponentiele functie vanuit verschillende perspectieven, bijvoorbeeld als een Clifford veralgemening van de machtsfunctie e^{ikx} of een "eigenvector" van de operator ∂_{A_1} met Cliffordwaardige eigenwaarden.

Chapter 11

Cohomologie en het de-Rahm isomorfisme.

Dit kleine hoofdstukje betreft opnieuw een diep inzicht tussen gesloten volumevormen en homologieklassen van simplices. Beter gezegd, we hebben de d operator en een integraal die voldoet aan de micro-randvoorwaarde zodat Stokes theorema voldaan is. We zijn geinteresseerd in het $\mathbb{R}$ moduul C_k van k-gesloten vormen Ω_k die voldoen aan $d\Omega_k = 0$ en die equivalent zijn op een exacte k vorm $d\Omega_{k-1}$; het verschil met standaard homologie theorie is dat d de dimensie laat toenemen daar waar ∂ het doet afnemen. Dit suggereert een dualiteit welke is dat $H_k^\star = C_k$; inderdaad,beschouw de actie van een element $\Omega_k \in C_k$ op een gesloten oppervlak $S_k \in H_k$ gedefinieerd door

$$\widehat{\Omega_k}(S_k) = \int_{S_k} \Omega_k$$

dan tonen we eerst aan dat dit goed gedefinieerd is. In het geval S_k equivalent is aan S_k' gegeven dat beide de rand vormen van T_{k+1} hebben we dat

$$\widehat{\Omega_k}(S_k) - \widehat{\Omega_k}(S_k') = \int_{T_{k+1}} d\Omega_k = 0$$

waar we hier Stokes theorema gebruikt hebben als wel als de geslotenheid van Ω_k. Ook hebben we dat

$$\widehat{\Omega_k + d\Omega_{k-1}}(S_k) = \widehat{\Omega_k}(S_k) + \int_{\partial S_k} \Omega_{k-1} = \widehat{\Omega_k}(S_k)$$

waar we Stokes theorema gebruikt hebben alsook het gegeven dat S_k geen rand heeft. Dit toont aan dat alles goed gedefinieerd is vermits de uitdrukking niet afhangt van de keuze van representanten van de equivalentieklassen. Nu tonen we aan dat de afbeelding injectief is; duidelijk vergt een niet triviaal gesloten k vorm $\Omega_k \in C_k$ het bestaan van een niet triviaal gesloten oppervlak S_k zodat

$\widehat{\Omega_k}(S_k) \neq 0$. Indien dit niet het geval zou zijn, dan is de integraal over elk k-oppervlak R_k met rand volledig bepaald door de rand wat betekent dat

$$\int_{R'_k} \Omega_k = \int_{R_k} \Omega_k$$

in het geval dat $\partial R_k = \partial R'_k$. Bovendien is de afhankelijkheid van de rand lokaal en additief net zoals dit is voor de integraal. Bijgevolg bestaat er een $k-1$ vorm Ω_{k-1} zodat $d\Omega_{k-1} = \Omega_k$. Finaal toon je surjectiviteit aan door te stellen dat voor elke niet triviale $S_k \in H_k$ er een gesloten, maar niet exacte, Ω_k bestaat zodat $\widehat{\Omega_k}(S_k) = 1$; dit toon je makkelijk aan door aan te tonen dat elke k-vorm Ω_k gedefinieerd op S_k uitgebreid kan worden op een manier zodat aan de vergelijking $d\Omega_k = 0$ voldaan is (in het algemeen bestaan er een oneindig aantal die daar aan voldoen). Dus hebben we bewezen dat de Betti getallen even goed vanuit cohomologie berekend kunnen worden in de plaats van simpliciale homologie. Dit beeindigt het onderwerp van dit hoofdstuk.

Chapter 12

Riemannse en Lorentziaanse meetkunde.

Het doel van dit hoofdstuk is de calculus van hoofdstuk acht uit te breiden naar de zogenaamde varieteiten; dit zijn ruimten die er lokaal uitzien als $\mathbb{R}^n$. In het bijzonder definieren we een C^n varieteit $\mathcal{M}$ als een topologische ruimte die er lokaal uitziet als $\mathbb{R}^n$; meer in het bijzonder bestaat er een bedekking met open verzamelingen $\mathcal{O}_\alpha$ die homeomorf afgebeeld worden $\phi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ met homeomorphismen ϕ_α op het beeld $\mathcal{V}_\alpha$ welk oftewel een open omgeving is van de oorsprong $\mathcal{W}_\alpha$ of de doorsnede is van deze met de halfruimte $\{x|x_n \geq 0\}$. In het laatste geval bevat $W_\alpha \cap \{x|x_n = 0\}$ een deel van de rand. In het geval $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ heeft men dat $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \to \phi_\beta(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta)$ een C^n diffeomorphisme is. We zullen steeds onderstellen dat een varieteit paracompact is, wat betekent dat het bedekt kan worden door een aftelbaar aantal compacte verzamelingen, en niet noodzakelijk samenhangend alhoewel deze onderstelling een standaard vereiste is in het klassiek werk van Hawking en Ellis. $\mathbf{V}$ is een vectorveld op $\mathcal{M}$ als en slechts als voor elke functie $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ en kaart $(\phi_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ op $\mathcal{M}$ geldt dat er een vectorveld $\mathbf{V}_\alpha$ op $\mathcal{V}_\alpha$ bestaat zodat

$$\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}_\alpha(f \circ \phi_\alpha).$$

$\mathbf{V}_\alpha$ wordt een lokale voorstelling van $\mathbf{V}$ genoemd in de kaart $(\phi_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$. Hieruit kun je duale velden definieren vanuit hun actie op vectorvelden alsook algemene tensorvelden. Evenzo kunnen we de notie van een k-vorm alsook de uitwendige afgeleide veralgemenen; we komen nu tot de definitie van een push forward, pull back en Lie afgeleide. Een diffeomorphisme $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ is een homeomorphisme zodat voor elke kaart $(\phi_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$ en kaart $(\phi_\beta, \mathcal{O}_\beta)$ zodat $\psi(\mathcal{O}_\alpha) \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ geldt dat

$$\phi_\beta \circ \psi \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathcal{V}_\alpha \to \phi_\beta \circ \psi(\mathcal{O}_\alpha) \subseteq \mathcal{V}_\beta$$

een C^n differentieerbare afbeelding is en evenzo is ψ^{-1}. Dit is gewoon een afspraak die we maken, dat de graad van afleidbaarheid van diffeomorphismen dezelfde is als die van de "kaart transformaties". Gegeven een diffeomorphisme

$\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ en functie $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ we definieren de push forward van f aan de hand van ψ als $(\psi^\star f)(x) = f(\psi^{-1}(x))$. De pullback is dan gedefinieerd als de push forward met ψ^{-1} en wordt genoteerd als $\psi_\star f$. Je veralgemeent de bovenstaande definities voor injectieve, differentieerbare afbeeldingen $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Gegeven een vectorveld $\mathbf{V}$ op $\mathcal{M}$, de push forward $\psi^\star \mathbf{V}$ is gedefinieerd aaan de hand van $\psi^\star \mathbf{V}(\psi^\star f)(\psi(x)) = \mathbf{V}(f)(x)$ en evenzo voor de pull back. Op dezelfde manier kunnen we, bij wijze van dualiteit, de push forward en pull back definieren van éénvormen alsook algemene tensorvelden. In een coordinatenvoorstelling leest dit:

$$(\psi^\star \mathbf{V})^\alpha(\psi(x)) = \frac{\partial y^\alpha(\psi(x))}{\partial x^\beta} V^\beta(x)$$

en de evidente veralgemening naar éénvormen en tensorvelden. We gaan nu het "verschil" meten van $\phi^\star \mathbf{V}$ met $\mathbf{V}$; vermits deze definitie coordinaat onafhankelijk moet zijn, zijn slechts infinitisemale verschillen toegelaten. Gegeven de éénparameterfamilie van diffeomorphismen ψ_t zodat $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$ voor t, s voldoende klein en $\psi_0 = \mathrm{id}$ de identiteitstransformatie. Bijgevolg definieren we de differentiaal

$$\frac{d\psi_s^\star f}{ds}|_{s=0}(x) = \mathbf{V}(f)$$

waar $V^\alpha(x) = \frac{dx^\alpha(\psi_{-s}(x))}{ds}|_{s=0}$. Dit vectorveld bepaalt volledig de diffeomorphismen ψ_s bij middel van

$$\frac{dy^\alpha(\psi_s(x))}{ds} = -V^\alpha(\psi_s(x)).$$

Dus, we hebben een verband tussen vectorvelden en éénparameterfamilies van diffeomorphismen; dit stelt ons in staat de Lie afgeleide van een algemeen tensorvectorveld te definieren

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(T)(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\psi_s^\star T(x) - T(x)}{s}$$

en we gaan nu de Lie afgeleide definieren van een vectorveld en eenvorm. Bij definitie hebben we dat $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(f)(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \psi_s^\star f(x) = \mathbf{V}(f)(x)$ en evenzeer

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{V}} \mathbf{W})(f)(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} (\psi_s^\star \mathbf{W})(f)(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \mathbf{W}(\psi_{-s}^\star f)(\psi_{-s}(x)) =$$

$$-\mathbf{W}\mathbf{V}(f)(x) + \mathbf{V}\mathbf{W}(f) = [\mathbf{V}, \mathbf{W}](f)(x).$$

Je merkt op dat

$$d(\psi^\star \Omega) = \psi^\star (d\Omega)$$

voor elke k-vorm Ω, daarom

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}} d = d \mathcal{L}_{\mathbf{V}}.$$

Dit kan ook aangetoond worden met behulp van

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}} = d i_{\mathbf{V}} + i_{\mathbf{V}} d$$

op de ruimte van k-vormen, waarbij $i_{\mathbf{V}}$ de contractie is met een vector $\mathbf{V}$ gedefinieerd als

$$i_{\mathbf{V}}\Omega_{\mu_1\ldots\mu_k}dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_k} = V^{\mu_1}\Omega_{\mu_1\ldots\mu_k}dx^{\mu_2}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_k}.$$

Maattheoretisch heb je dat per definitie $(\psi^\star\mu)(\psi(A)) := \mu(A)$ voor elke maat μ en meetbare verzameling A; daarom

$$\int_{\mathcal{B}} f d\mu = \int_{\psi(\mathcal{B})} (\psi^\star f)(\psi^\star d\mu)$$

wat we de covariantie eigenschap van de integraal noemen. Toon aan dat de definities van $\psi^\star\mu$ en $\psi^\star\Omega$ waarbij Ω een k-vorm is samenvallen en dat de integraal gegeven is door

$$\int_{\mathcal{M}} f\Omega.$$

Tot zover hebben we niks over meetkunde gezegd en ons uitsluitend geconcentreerd op calculus op varieteiten. Met andere woorden, we moeten een lokaal scalair product definieren dat afhangt van de varieteit coordinaten. Dus, we zijn geinteresseerd in $(0,2)$ covariante tensoren $h_{\alpha\beta}$ en $g_{\alpha\beta}$ die locale orthonormale basissen v_a en e_a produceren zodat

$$h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_b^\beta = \delta_{ab}$$

en

$$g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta = \eta_{ab}$$

waarbij η_{ab} de zogenaamde Minkowski metriek is gedefinieerd door

$$\eta_{11} = 1, \eta_{ij} = -\delta_{ij}; i,j = 2\ldots n$$

en alle andere componenten verdwijnen. Indien $n = 4$, e_a wordt een tetrad of vierbein genoemd; metrieken zoals δ_{ab} worden Riemanns genoemd en vormen een veralgemening van eindig dimensionale Hilbertruimten terwijl η_{ab} Lorentziaans genoemd wordt en niet-compacte null verzamelingen

$$\eta_{ab}v^a v^b = 0$$

definieert. Onze eerste taak bestaat erin aan te tonen dat deze meetkunden specificaties vormen van de gewoonlijke metrische en Lorentziaanse padmetrieken respectievelijk. In dat geval hadden we dat de kortste of langste lengte van een (tijdachtige) kromme gelijk is aan de afstand of pseudo-metriek respectievelijk. Vooraleer we aan dit resultaat toe zijn, moeten we iets zeggen over de causale structuutr gedefinieerd door η_{ab}. Een vector v^a wordt (a) causaal genoemd als en slechts als $\eta_{ab}v^a v^b \geq 0$ (b) nul of lichtachtig indien $\eta_{ab}v^a v^b = 0$ en (c) ruimtelijk indien $\eta_{ab}v^a v^b < 0$. Bovendien noemen we een causale vector v^a toekomst wijzend met betrekking tot het tetrad e_a als en slechts als $v^0 > 0$. In wat volgt veronderstellen we dat er een globaal goed gedefinieerd tetrad

bestaat wat bepaalde topologieeen uitsluit zoals de Mobius strip. Deze laatste is gevormd door een rechthoek te beschouwen, de korte randen vast te nemen en één component ervan 180 graden te draaien en vervolgens met de andere te identificeren. Deze onderstelling op $(\mathcal{M}, g)$ luidt dat deze tijdsorienteerbaar alsook orienteerbaar is.

Gegeven een differentieerbare kromme $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$, we zeggen dat deze toekomst wijzend en causaal is als en slechts als de raakvector aan elk punt dat is. De lengte van zulke kromme is gegeven door

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))} ds$$

en evenzo voor de lengte van elke kromme in een Riemannse meetkunde. We definieren $J^+(x)$ als de verzameling van punten y welke aan x verbonden kunnen worden door middel van een toekomstwijzende causale kromme beginnende in x. Gelijkaardig definieren we $J^-(x)$ als de verzameling van alle y welke kunnen verbonden worden aan x door middel van een toekomstwijzende causale kromme die begint in y. We bestuderen nu extremale krommen tussen twee punten x en y die vast zijn. Daarom moeten we een soort "differentiaal" met betrekking tot de kromme nemen en deze gelijk aan nul stellen; het resultaat is

$$0 = \delta L(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))}} \left(2 g_{\mu\nu} \delta\dot{\gamma}^\mu(s) \dot{\gamma}^\nu(s) + \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu(s) \dot{\gamma}^\nu(s) \delta\gamma^\alpha(s)\right)$$

en je moet deze vergelijking verder herschrijven, door gebruik te maken van $\delta\dot{\gamma}^\mu(s) = (\delta\gamma^{\dot{\mu}}(s))$, tot het reduceert tot de vorm

$$\int_a^b F(\gamma(s), \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s))_\mu \delta\gamma^\mu(s) ds.$$

Door op te merken dat deze uitdrukking moet verdwijnen voor alle $\delta\gamma^\mu(s)$ krijgt men de volgende vergelijkingen

$$\ddot{\gamma}^\mu(s) + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \dot{\gamma}^\alpha(s) \dot{\gamma}^\nu(s) = 0$$

waarbij $\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left(\partial_\nu g_{\kappa\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\nu\alpha}\right)$ het zogenaamde Christoffel symbool is. De parametrizatie s wordt de affiene parametrizatie genoemd gegeven dat de hierbovenstaande vergelijking invariant blijft onder transformaties $s \to bs + a$. Gegeven dat de integraal reparametrizatie invariant is alsook invariant onder coordinatentransformaties moet deze vergelijking transformeren als een vector onder coordinaten transformaties en de lezer kan het effect verifieren van een reparametrizatie. We compactificeren deze vergelijking als

$$\dot{\gamma}^\nu \nabla_\nu \dot{\gamma}^\mu = 0$$

waar

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} V^\kappa$$

voor elke vector V^μ. De lezer controleert dat $\dot\gamma^\mu(s)\partial_\mu = \frac{d}{ds}$ en dat $\nabla_\mu V^\nu$ transformeert als een $(1,1)$ tensor; ook hebben we dat $V^\nu\nabla_\nu W^\mu - W^\nu\nabla_\nu V^\mu - [V,W]^\mu = 0$ voor alle vectoren $\mathbf{V},\mathbf{W}$. De eerste eigenschap betekent dat de covariante afgeleide een meetkundige betekenis heeft terwijl de laatste zegt dat ze torsie-vrij is wat equivalent is aan

$$\Gamma^\mu_{\nu\kappa} = \Gamma^\mu_{\kappa\nu}.$$

De vergelijking $\dot\gamma^\nu\nabla_\nu\dot\gamma^\mu = 0$ staat bekend als de geodetische vergelijking en de geassocieerde krommen zijn geodeten. We breiden nu de definitie van de covariante afgeleide uit als volgt

$$\nabla_\mu f = \partial_\mu f$$

of in coordinatenvrije notatie,

$$\nabla f = df, \nabla\mathbf{V} = \nabla_\mu V^\nu dx^\mu \otimes \partial_\nu.$$

Met de notatie

$$\nabla_{\mathbf{V}} = V^\mu\nabla_\mu$$

breiden we de definitie uit

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{W}}(\omega(\mathbf{V})) &= (\nabla_{\mathbf{W}}\omega)(\mathbf{V}) + \omega(\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V})\\ \nabla_{\mathbf{W}}(S\otimes T) &= (\nabla_{\mathbf{W}}S)\otimes T + S\otimes(\nabla_{\mathbf{W}}T)\end{aligned}$$

waar ω een éénvorm is en S,T algemene tensoren. Vanuit de specifieke vorm van de Christoffel symbolen leest de lezer af dat $\nabla g = 0$ wat betekent dat de metriek covariant constant is. Het is duidelijk dat de geodeten de Lorentziaanse afstand maximalizeren in het geval ze causaal zijn en minimalizeren in het geval van een Riemannse metriek.

We bestuderen nu een aantal tensoren die men kan construeren uit de covariante afgeleide en contracties daarvan welke van primordiaal belang zijn in de geometrische analyse en algemene relativiteitstheorie. Het eerste geval betreft een $(1,2)$ tensorveld

$$\mathbf{T}(\mathbf{V},\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V} - [\mathbf{V},\mathbf{W}]$$

en de lezer controleert inderdaad dat $\mathbf{T}(\mathbf{V},\mathbf{W}) = -\mathbf{T}(\mathbf{W},\mathbf{V})$ en

$$\mathbf{T}(f\mathbf{V}+\mathbf{Z},\mathbf{W}) = f\mathbf{T}(\mathbf{V},\mathbf{W}) + \mathbf{T}(\mathbf{Z},\mathbf{W}).$$

Voor de metrische connectie, gedefinieerd door de Christoffel symbolen, heeft men dat de Torsie tensor verdwijnt en de lezer wordt uitgenodigd connecties met Torsie te bestuderen. Het tweede geval betreft een $(1,3)$ tensor veld genoteerd door

$$\mathbf{R}(\mathbf{V},\mathbf{W})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{V}}\nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{W}}\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{V},\mathbf{W}]}\mathbf{Z}$$

wat terug antisymmetrisch is in $\mathbf{V}, \mathbf{W}$. In componenten leest dit $R_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}$ en we kunnen indices verhogen en verlagen aan de hand van $g^{\alpha\beta}$ en $g_{\alpha\beta}$ respectievelijk. Vanuit de algemene Jacobi identiteit $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ voor operatoren, bekomen we, toegepast op de metrische connectie, dat

$$R_{[\mu\nu\alpha]}{}^{\beta} = 0, \nabla_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\kappa}{}^{\delta} = 0$$

waar de vierkante haakjes staan voor totale anti-symmetrizatie. Deze identiteiten worden de eerste en tweede Bianchi identiteit genoemd; bovendien controleer je door expliciete berekening dat

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^{\kappa} g_{\kappa\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Dit tensor veld staat bekend als de Riemann tensor en is van groot belang in de algemene relativiteitstheorie. De eerste contractie

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha}$$

is een symmetrische tensor genaamd de Ricci tensor en haar tweede contractie

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

is de Ricci scalar. De metrische tensor bepaalt een uniek volume element

$$dV(x) = \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

en je controleert dat deze uitdrukking coordinaatonafhankelijk is. Hieruit construeer je de zogenaamde Einstein-Hilbert actie

$$\int dV(x) R(x)$$

de variatie naar de metrische componenten welke de Einstein vergelijkingen produceert.

Ik moedig de lezer aan alle berekeningen te maken, bijvoorbeeld dat de Torsie en Riemann tensoren wel echt tensoren zijn en niet afhangen van afgeleiden van de vectorvelden. De Bianchi identiteiten worden geverifieerd vanuit Jacobi zonder een coordinaten berekening te maken, terwijl de resterende symmetrieen van de Riemann tensor wel degelijk afhangen van het metrische karakter van de connectie en dus een expliciete berekening vergen. Ook is het nuttig de Einstein vergelijkingen te vinden; spendeer hier gerust wat tijd aan vermits tensor calculus erg belangrijk is om te beheersen.

Oefeningen: Morse theorie.
We hebben ondertussen de Betti getallen bestudeerd vanuit het standpunt van de homologie en cohomologie via het de Rahm theorema. Nu bieden we een derde visie die argumenteert dat alle informatie in de vectorvelden vervat zit.

- Argumenteer dat alle topologisch informatie in een varieteit bevat is in de raakbundel van vectorvelden (simpel).
- Toon aan dat alle locale, topologische, informatie in een vectorveld gegeven is door de nulpunten $\mathbf{V} = 0$ en bepaalde karakteristieken van de matrices $\partial_{(\alpha} V^{\beta)}$ en $\partial_{[\alpha} V^{\beta]}$ in de kritische punten.
- De eerste mtrix is symmetrisch en heeft reeele eigenwaarden; toon aan dat de coordinaatinvarianten gegeven zijn door de indices n_-, n_0, n_+ die respectievelijkhet aantal negatieve, nul en positieve eigenwaarden noteren.
- De tweede matrix is anti-symmetrisch en heeft imaginaire eigenwaarden; toon aan dat een gelijkaardige topologische classificatie hier geldt.
- Indien lokaal geldt dat $V^\alpha = \delta^{\alpha\beta}\partial_\beta \Phi$, toon dan aan dat $\partial_{[\alpha} V^{\beta]} = 0$.
- Voor de laatste klasse van vectorvelden met alle $n_0 = 0$, toon aan dat er een natuurlijk verband bestaat tussen het aantal kritische punten N_i met $n_- = i$ en b_i, het i de Betti getal (hint: toon aan dat zulke punten lokaal een i dimensionale ruimte bepalen).
- Argumenteer dat er geen globale topologische invarianten bestaan die aan de somregels $b_i = b_i^1 + b_i^2$ voor $1 \leq i \leq n-1$ voor de geconnecteerde som en voor alle i in het geval van de disjuncte unie (simpel: zulke invarianten moeten gegeven worden door integralen en die benodigen een metriek).
- Toon aan dat alle vectorvelden evenveel informatie dragen (moeilijk).
- Finaal, $b_i = N_i$ wat het hoofdresultaat is van Morse theorie. Probeer deze formule te veralgemenen naar algemene vectorvelden (zeer moeilijk).

Einstein-Cartan theorie.
Veralgemeen de meetkunde hierboven door de introductie van een torsie tensor in de definitie van de connectie; het is te zeggen, definieer

$$\widehat{\nabla} = \nabla + T$$

waarbij T een $(1,2)$ tensorveld is dat antisymmetrisch is in de covariante indices en ∇ een gepaste symmetrische deformatie van de Christoffel connectie. In het bijzonder

$$2\widehat{\Gamma}^\gamma_{[\alpha\beta]} = T^\gamma_{\alpha\beta}$$

zoals het moet en

$$\nabla_\alpha g_{\beta\kappa} - T^\gamma_{\alpha\beta} g_{\gamma\kappa} - T^\gamma_{\alpha\kappa} g_{\beta\gamma} = 0$$

om te verzekeren dat

$$\widehat{\nabla}_\alpha g_{\beta\kappa} = 0.$$

Opdracht: bereken $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ en recupereer de Christoffel connectie door $T = 0$ te stellen. Bereken de Riemann tensor en torsie correcties tot de eerste en tweede Bianchi identiteit. Definieer opniew de Einstein actie $I(g,T)$ die nu afhangt van

g, T. Definieer de Einstein tensor $G^{\alpha\beta}$ en spin tensor $S_\kappa^{\alpha\beta}$ aan de hand van de variaties

$$G^{\alpha\beta}(x) = \frac{\delta I(g,T)}{\delta g_{\alpha\beta}(x)},\ S_\kappa^{\alpha\beta}(x) = \frac{\delta I(g,T)}{\delta T^\kappa_{\alpha\beta}(x)}.$$

Dit geeft twee vergelijkingen die de energie inhoud en rotatie van het universum bepalen aan de hand van gelijkaardige grootheden voor de materie sector. Vindt de gepaste vier behoudswetten van energie-momentum *plus* spin. Bepaal torsie correcties op parallel transport langs geodeten die de torsie alleen voelen aan de hand van symmetrische correcties in het Christoffel gedeelte. Bereken de laagste orde correcties tot de exponentiele afbeelding gedefinieerd in hetvolgende hoofdstuk.

Chapter 13

Dispersie van een bundel geodeten en het opblazen of ineenklappen van bollen.

In dit hoofdstuk gaan we verder in op globale geometrische eigenschappen van Riemannse en Lorentziaanse ruimtetijden. Het studie onderwerp bij uitstek betreft het gedrag van naburige geodeten met betrekking tot elkaar. Gaan ze uiteen of convergeren ze naar een punt; is er rotatie of expansie? Met andere woorden, we gaan de geodetische vergelijking eens nader onder de loep nemen en in het bijzonder bestuderen we willekeurige secties van geodeten, zowel in de Riemannse als Lorentziaanse context. Het is uiteraard mogelijk scherpere resultaten te boeken voor Riemannse meetkunden vermits deze op een natuurlijke manier compacte oppervlakken definieert. De Lorentziaanse meetkunde geniet niet dergelijke eigenschappen en laat alleen toe resultaten te verkrijgen met betrekking tot een tijdachtige kromme of wereldlijn. De Riemannse context is vrij goed begepen doch de Lorentziaanse laat nog heel wat vers onderzoek toe en relatief weinig resultaten zijn hier geboekt. Dus je kan je best uitgenodigd voelen een originele bijdrage tot de wiskunde te leveren en ik zal een paar van die open problemen aanhalen in dit hoofdstuk.

Om te beginnen verifieer je dat voor een geodeet $\gamma(s)$ de lengte van de raakvector $\mathbf{V}(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$ constant is. Inderdaad,

$$\frac{d}{ds}g(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)) = (\nabla_{\mathbf{V}(s)}g)(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)) + 2g(\nabla_{\mathbf{V}(s)}\mathbf{V}(s),\mathbf{V}(s)) = 0$$

omdat de metriek constant is en waarbij ook de geodetische vergelijking gebruikt wordt. In het Lorentziaanse geval kiezen we dus een parametrizatie zodat de lengte één is voor tijdachtige geodeten, nul voor nulgeodeten en min één voor ruimteachtige geodeten. Noteer met $T^\star\mathcal{M}_x$ de lineaire ruimte van alle vectoren

in x, dan definieren we de afbeelding

$$\exp_x : T\mathcal{M}_x \to \mathcal{M} : v \to \exp_x(v)$$

waarbij $\exp_x(v)$ het eindpunt is van de geodeet met affiene parameterlengte één zodat de raakvector in x gegeven is door v. Duidelijk is

$$\mathrm{D}\exp_x(0)(w) = w$$

waar $w \in TT^\star\mathcal{M}_{(x,0)} \sim T^\star\mathcal{M}_x$ wat gewoon betekent dat in eerste orde de metriek een globale Euclidische of Minkowski metriek is. Definieer $T^\star\mathcal{M} = \cup_{x\in\mathcal{M}} T^\star\mathcal{M}_x$, dan definieren we een topologie dewelke gelijk is aan de product-topologie $\mathcal{O}\times\mathcal{V}$ waar $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{M}$ en $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$. De exponentiele afbeelding is dan een lokaal diffeomorfisme wat betekent dat er een open omgeving $\mathcal{V}$ van 0 in $T^\star\mathcal{M}_x$ bestaat zodat

$$\exp_x : \mathcal{V} \to \exp_x(\mathcal{V})$$

een diffeomorphisme is. Gegeven twee punten x en y dan is het mogelijk dat deze verbonden zijn door meerdere geodeten te wijten aan een niet triviale topologie of door het bestaan van focale punten (denk aan een lens). We leiden nu de geodetische deviatievergelijking af: gegeven een éénparameter familie van geodeten $\gamma(s,t)$ waar $s : a\ldots b$ en $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ met als raakvectoren $\mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^\star$ en $\mathbf{Z} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\star$ dan is

$$[\mathbf{V},\mathbf{Z}] = 0$$

en bijgevolg

$$\nabla_V\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{V}}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{V} = \mathbf{R}(\mathbf{V},\mathbf{Z})\mathbf{V}$$

waar we in de eerste gelijkheid gebruikt hebben dat de connectie torsieloos is, terwijl de geodetische vergelijking $\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} = 0$ gebruikt is in de tweede vergelijking. De bovenstaande vergelijking is van de vorm

$$\ddot{\mathbf{Z}} + A(s)\dot{\mathbf{Z}} + B(s)\mathbf{Z} = 0$$

met A, B matrices en het punt duidt op afleiding naar s. Zulke vergelijking is van het Newtoniaanse type met A de frictie matrix en B de oscillatie frequentie ($B > 0$) of expansie factor ($B < 0$) in het kwadraat. Inderdaad, in één dimensie leest dit

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = 0$$

wat herschreven kan worden als

$$\ddot{h} + (b(s) - \frac{1}{2}\dot{a}(s) - \frac{1}{4}a^2(s))h = 0$$

met $h(s) = e^{\frac{1}{2}\int_0^s a(t)dt}z(s)$. Deze laatste is van het type

$$\ddot{h}(s) + c(s)h(s)$$

en we noemen $c(s)$ minus de expansie in het kwadraat indien het kleiner is dan nul en de oscillatie frequentie in het kwadraat indien het groter is dan nul.

Inderdaad voor c constant zijn de oplossingen $xe^{\sqrt{c}s} + ye^{-\sqrt{c}s}$ en $x\cos(\sqrt{-c}s) + y\sin(\sqrt{-c}s)$ respectievelijk waarbij x, y willekeurige reele constanten zijn. Zoals we straks zullen zien laat deze eenvoudige berekening toe een paar meetkundige eigenschappen te begrenzen.

Langs een geodeet kun je de notie van Fermi-Walker transport definieren van een tensor aan de hand van

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{T} = 0$$

waar $\mathbf{V}$ de raakvector is aan de geodeet. Je kunt makkelijk controleren dat Fermi-Walker transport de uitdrukking

$$g(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$$

constant houdt voor elke $\mathbf{Z}, \mathbf{W}$ langs eender welke geodeet. Je ziet hier dat transport van een vector het meetrekken is van een oneindig kleine meetstok langs de beweginskrommen van de waarnemer; dit meetrekken gebeurt krachtenloos en wordt uitsluitend bepaald door de relaties gelegd op ruimtetijd. Dit is dus een erg belangrijk fysisch begrip en een gedodeet kan dus geinterpreteerd worden als een krachtenloze vooruitstuwing doorheen ruimtetijd; Einstein zag dit als de beweging van een *vrije* waarnemer in een gravitationeel veld en dit is hoe de relativiteitstheorie geboren werd.

Een orthonormale basis die een verzameling is van n orthonormale vectorvelden e_a kan dus gezien worden als een lokaal referentiestelsel wat echter geen locaal coordinatenstelsel hoeft te bepalen vermits de vectoren e_a niet commuteren, $[e_a, e_b] \neq 0$. Een Lie algebra is gedefinieerd door te eisen dat

$$[e_a, e_b] = f_{ab}^c e_c$$

voor reeele *constanten* f_{ab}^c. Vermits parallel transport van een orthonormale basis een orthonormale basis is, definieert zij een rotatie of Lorentz transformatie door het getransporteerd referentiestelsel uit te schrijven ten opzichte van het locale. Het is te zeggen, we hebben een transformatie $\Lambda(x,w)_b^{a'}$ waar $w \in T^\star\mathcal{M}_x$ en b een (Lorentz) index is met betrekking tot $e_b(x)$ en a' een (Lorentz) index met betrekking tot $e^{a'}(\exp_x(w))$. Een Lorentz transformatie is een symmetrie van de Minkowski metriek wat betekent dat

$$\Lambda(x,w)_b^{a'}\Lambda(x,w)_d^{c'}\eta_{a'c'} = \eta_{bd}.$$

Je controleert dat deze een continue groep vormen van dimensie $\frac{n(n-1)}{2}$ en dat het 4 gescheiden componenten heeft in geval $n = 4$ welke bepaald worden door de transformaties $1, T, S, ST$ waar T staat voor de tijdsreversie en S voor de ruimte reversie. Het Euclidische geval, gegeven door de rotatie groep, hebben we reeds hiervoor bestudeerd.

Een ander nutig hulpmiddel om geodeten te bestuderen is Synge's functie, een

wiskundig object dat de kwadratische vorm

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2}(y-x)^{\mu}(y-x)^{\nu}\eta_{\mu\nu}$$

op Minkowski veralgemeent, waar x, y punten voorstellen in $\mathbb{R}^4$. De definitie luidt dat $\sigma(x,y)$ gelijk is aan *een* extremale waarde van

$$I(x,y) = \frac{1}{2}(t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}(s)}{ds}\frac{dx^{\nu}(s)}{ds}ds$$

waarbij $x^{\mu}(s)$ een kromme is die x met y verbindt. Je berekent dat de extremale waarden gegeven worden door de krommen voor dewelke $x^{\mu}(s)$ een geodeet is. Bovendien is deze uitdrukking invariant onder affine reparametrizaties $s \to as+b$ van de kromme en daarom kan men de variatie $\delta x^{\mu}(s)$ nemen zodanig dat de eindpunten t_0, t_1 vast zijn. Om je op weg te helpen,

$$\delta I(x,y) = (t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} g_{\mu\nu}\left(\frac{D}{ds}\frac{dx^{\mu}(s)}{ds}\right)\delta x^{\nu}(s)ds$$

waar

$$\frac{D}{ds} = \nabla_{\frac{d}{ds}}$$

en $\delta x^{\mu}(t_0) = \delta x^{\mu}(t_1) = 0$. Deze variatie verdwijnt als en slechts als

$$\frac{D}{ds}\frac{dx^{\mu}(s)}{ds} = 0$$

wat inderdaad de geodetische vergelijking is. Dus Syge's functie is gelijk aan

$$\sigma(x,y,w) = \frac{1}{2}g(w,w) = \frac{1}{2}\epsilon L^2(x,y,w)$$

waar $w \in T^{\star}\mathcal{M}$, $L(x,y,w)$ gelijk is aan de lengte van de geodeet vertekkende in x met raakvector w en eindpunt $\exp_x(w) = y$. Hier, $\epsilon = 1$ voor tijdachtige geodeten en -1 voor ruimteachtige. Veronderstellende dat w continue varieert wanneer x en y dat doen, besluiten we dat w alleen dient ter aanwijzing van het feit dat verschillende geodeten tussen x en y kunnen bestaan. De lezer controleert dat

$$\sigma(x,y,w)_{,\mu} := \partial^x_{\mu}\sigma(x,y,w) = -w_{\mu} = g_{\mu\nu}w^{\nu}, \sigma(x,y,w)_{,\mu'} := \partial^y_{\mu'}\sigma(x,y,w) = -g_{\mu'\kappa'}\Lambda^{\kappa'}_{\nu}(x,w)w^{\nu}.$$

Hieruit volgt dat

$$2g^{\mu\nu}\sigma(x,y,w)_{,\mu}\sigma(x,y,w)_{,\nu} = \sigma(x,y,w)$$

en idem voor de afgeleiden naar y.

De overblijvende presentatie in dit hoofdstuk betreft Riemannse meetkunde en de oefeningen gaan over originele uitbreidingen van deze stellingen naar

Lorentziaanse meetkunde toe. Laat ons beginnen met een algemene definitie: gegeven twee vectoren v, w, dan is de oppervlakte van het parallelogram opgespannen door v, w gegeven door $g(v,v)g(w,w) - (g(v,w))^2$ en we definieren de sectionele kromming $s(v,w)$ als

$$s(v,w) = \frac{g(R(v,w)v,w)}{g(v,v)g(w,w) - (g(v,w))^2}.$$

Een metriek is van constante sectionele kromming als en slechts als

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}).$$

Bijgevolg leest de Ricci tensor

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{n}g_{\mu\nu}$$

wat betekent dat elke ruimte van constante sectionele kromming een Einstein ruimte is. Je merkt op dat onder de afbeelding $g \to -g$ de Ricci tensor invariant blijft terwijl de Ricci scalar en sectionele kromming op hun tegengestelde afgebeeld worden. In het bijzonder is dit ook waar voor de Einstein actie in een even aantal dimensies. Het is duidelijk dat indien sectionele kromming alleen van belang is dat we ons kunnen richten op homogene en isotrope modelruimten van constante sectionele kromming. Deze zijn uiteraard uniek; deze modelruimten zijn maximaal symmetrisch waar een symmetrie vertegenwoordigd is door een diffeomorfisme $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ zodat $\psi^\star g = g$. In het geval we spreken over een éénparameterfamilie ψ_t van diffeomorfismen leidt dit tot

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}} g = 0$$

waarbij $\mathbf{V}$ het genererend vectorveld is. De lezer verifieert dat deze vergelijking herschreven wordt als

$$\nabla_{(\alpha} V_{\beta)} = 0$$

waar $V_\beta = g_{\beta\alpha}V^\alpha$ en de ronde haakjes staan voor symmetrizatie; het is te zeggen

$$Z_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} Z_{\alpha_{\sigma_{(1)}} \cdots \alpha_{\sigma(n)}}.$$

Deze vergelijking staat bekend als Killing's vergelijking en het is makkelijk in te zien dat er $\frac{n(n+1)}{2}$ zijn wat $\frac{n(n-1)}{2} + n$ parameters vrij laat waar n het aantal vrije parameters is in een punt; daarom noemen we een ruimte met $\frac{n(n+1)}{2}$ lineair onafhankelijke Killing velden maximaal symmetrisch. De Killing vergelijking en definitie van de Riemann tensor impliceren dat

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\alpha = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\alpha V^\gamma.$$

Meer algemeen, vanuit

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha V_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^\kappa V_\kappa$$

volgt dat

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma V_\alpha = -R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\kappa} V_\kappa$$

en gebruik makend van de symmetrieen van de Riemann tensor, heeft men

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V_\gamma = R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\kappa} V_\kappa.$$

We bestuderen nu de prototype *Riemannse* maximaal symmetrische ruimten met nul, positieve en negatieve sectionele kromming respectievelijk. Deze meetkunden zijn niet uniek en kunnen topologisch van elkaar veschillen: bijvoorbeeld, in twee dimensies, heeft men de vlakke cylinder, torus en vlak. Duidelijk kun je elke cylinder isometrisch inbedden in de ruimte $\mathbb{R}^2/T_{x,a}$ en idem voor de torus in $\mathbb{R}^2/\{T_{x,a}, T_{y,b}\}$ waar $T_{x,a}$ een translatie definieert over een afstand $a > 0$ in de x richting. In die zin is het vlak maximaal en je kunt aantonen dat elke vlakke meetkunde door knip en plakwerk van zulke quotienten gedefinieerd kan worden. Deze meetkunden worden vlak, sferisch en respectievelijk hyperbolisch genoemd.

Een, maar niet *de*, "maximale" vlakke ruimte is gegeven door $(\mathbb{R}^n, \delta_{\alpha\beta})$ waar de Kronecker $\delta_{\alpha\beta}$ naar een canonisch coordinatenstelsel refereert. Je wordt uitgenodigd een andere maximale vlakke ruimte te construeren, door twee vlakke ruimten te verbinden door een zogenaamd wormgat; concreet, knip een $n-1$ dimensionale torus uit twee $\mathbb{R}^n$ en verbindt deze aan de hand van een n dimensionale cylinder. Je weet reeds dat de $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionale symmetrie groep van $(\mathbb{R}^n, \delta_{\alpha\beta})$ gegeven is door $SO(n) \times \mathbb{R}^n$ waarbij $SO(n)$ de rotatie groep is bepaald door O^μ_ν zodat

$$O^\alpha_\mu O^\beta_\nu \delta_{\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu}$$

en $\mathbb{R}^n$ is de n-dimensionale translatie groep. De actie op $\mathbb{R}^n$ is gegeven door

$$((O, a)x)^\alpha = O^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha$$

en hieruit kun je de groepbewerking expliciet vinden. $SO(n)$ wordt gegenereerd door anti-Hermitische matrices A wat betekent dat $A^\dagger = -A$ wat impliceert dat de groep $\frac{n(n-1)}{2}$ dimensionaal is. Tussen elke twee punten x en y bestaat er exact een geodeet hetwelk het gewone lijnsegment is dat beide punten verbindt. De canonische volumemaat is gegeven door $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ hetgeen herschreven kan worden als

$$r^{n-1} dr \wedge \Omega_{S^{n-1}}$$

waar $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$ en $\Omega_{S^{n-1}}$ is de canonische volumemaat op de $n-1$ dimensionale bol welke gesloten is maar niet exact. Dit gegeven kan makkelijk bewezen worden vanuit de eigenschap dat ∂_r loodrecht staat op $S^{n-1}(r)$ alsook de scchalinsformule $d(rx, ry) = r d(x, y)$ voor elke $r > 0$. Daarom hebben ballen van straal r rond een punt x een volume gelijk aan

$$\frac{r^n}{n} \mathrm{Vol}(S^{n-1}).$$

Een andere belangrijke eigenschap die bewezen kan worden is dat de som van hoeken in een geodetische driehoek altijd gelijk is aan π.

Nu komen we tot een maximale modelruimte van positieve sectionele kromming, welke het n dimensionale boloppervlak is van straal r in $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta_{\alpha\beta})$; de symmetrie groep is $SO(n+1)$ hetwelk de correcte dimensie is. De afstand tussen twee punten x, y is gegeven door de booglengte van het segment van de cirkel bepaald door x, y en de oorsprong welk gegeven is door

$$\cos(\theta) = \frac{x^\alpha y_\alpha}{r^2}.$$

waar x, y $n+1$-dimensionale vectoren zijn. Omde meetkunde te begrijpen moet geen enkele berekening gemaakt worden; de meetkunde is immers volledig bepaald door de lengte parameter r; in het bijzonder impliceert dit dat de sfeer een constante sectionele kromming heeft van de vorm $\frac{a}{r^2}$ op dimensionele gronden. Een kleine berekening in twee dimensies onthult dat $a = -1$ en de lezer controleert dat

$$\int_{S^2} R\sqrt{h} = -2\pi\chi(S^2) = -4\pi$$

waarbij we eraan herinneren dat χ het Euler getal is; dit resultaat is geldig voor elke Riemannse metriek op de sfeer. Je lezer wordt uitgenodigd dit te bewijzen als een niet-triviale oefening (hint: toon aan dat de variatie van de dichtheid naar de metriek een totale afgeleide geeft), genaamd het Gauss-Bonnet theorema. Je ziet onmiddelijk in dat de geodetische expansie reduceert tot

$$\frac{d^2}{ds^2} Z = -\frac{1}{r^2} Z$$

wat oplossingen geeft van de vorm $Z(s) = b \sin\left(\frac{s}{r}\right)$ indien $Z(0) = 0$. Dit resultaat impliceert dat de som van de hoeken in een geodetische driehoek groter is dan π vermits geodeten terug convergeren. Noteer dat in de literatuur de Ricci kromming van de sfeer positief is omwille van een andere contractie in de indices en dus aldaar verschijnt een plus teken in het Gauss-Bonnet theorema.

Finaal komen we tot het model van de hyperbolische ruimte $\mathbb{H}^n(r)$, $r > 0$, die we kunnen afleiden uit *minus* $n+1$-dimensionale Minkowski als de ruimte

$$\mathbb{H}^n(r) = \{x | x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta} = r\}.$$

Deze ruimte is maximaal symmetrisch met als symmetrie groep $SO(n,1)$ wat de $n+1$-dimensionale Lorentz transformaties zijn; deze Riemannse ruimte heeft terug constante sectionele kromming welke gelijk is aan $\frac{1}{r^2}$ zoals een berekening in $n = 2$ aantoont. Geodeten expanderen dus volgens $b \sinh\left(\frac{s}{r}\right)$ en dus te kleiner de straal r des te sneller geodeten van elkaar verwijderen en dus te sneller het volume van een bal groeit. Het volume van zulke bal met straal s is gegeven door

$$V(s) = \int_0^s dt r^{n-1} \left(\sinh\left(\frac{t}{r}\right)\right)^{n-1} V(S^{n-1}).$$

Evenzo is dit in het sferische geval

$$V(s) = \int_0^s dt r^{n-1} \left(\sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)^{n-1} V(S^{n-1})$$

en als oefening bereken je deze integralen.

Uit alle overwegingen is het duidelijk dat hetvolgende resultaat waar is: als $(\mathcal{M}, h)$ een n-dimensionale Riemannse varieteit is met sectionele kromming kleiner of gelijk aan $R \in \mathbb{R}$ dan is het volume van eender welke bal met straal r kleiner of gelijk aan dat van dezelfde bal in de modelruimte $\mathbb{H}^n\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ of $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{-R}}\right)$ afhankelijk of $R > 0$ of $R < 0$ respectievelijk. De reden is evident: beschouw elke $x \in \mathcal{M}$ en neem de Euclidische sfeer met straal r op de tangente ruimte en warp die aan de hand van de exponentiele map. Dan zie je dat kleine ruimtehoekjes $\delta\Omega$ van radiale geodeten hoogstens een volume hebben van dat in de referentieruimte omdat er in het algemeen verdere compressie en rotatie is. Je kunt dit netjes opschrijven aan de hand van de geodetische expansie vergelijking.

Je kunt nu trachten een dergelijk resultaat te construeren voor zogenaamde Alexandrov sets in de Lorentziaanse meetkunde; voor zover ik weet is dit resultaat onbekend. De Alexandov set $A(x, y)$ voor $y \in J^+(x)$ is gegeven door

$$A(x, y) = J^+(x) \cap J^-(y)$$

het is dus de verzameling van punten die op een causale toekomst georienteerde kromme liggen tussen x en y. Je ziet dus dat er een verband lijkt te bestaan tussen globale krommingseigenschappen en topologie: dit is inderdaad zo en diepere resultaten kunnen geboekt worden (zie Milnor, Perelman). Topologie vanuit het differentieerbaar standpunt leidt tot zeer rijke inzichten zoals de Brouwer en Kakutani vaste puntstellingen, Morse theorie waaruit alle Betti getallen berekend kunnen worden aan de hand van de studie van kritische punten (die plaatsen van "pinshing" aanduiden) enzovoort.

Chapter 14

Gekromde ruimtetijd en het afbuigen en focussen van lichtstralen: een voorproefje van relativiteit.

Dit hoofdstukje vormt een beetje een uitzondering op de rest van dit boek in de zin dat we hier rechtstreeks toepassingen in de fysica aanraken en een korte introductie geven tot de algemene relativiteitstheorie van Einstein. Zoals gezegd kan deze bekomen worden vanuit het actieprincipe

$$\int_{\mathcal{M}} R\sqrt{-g}$$

voor een Lorentziaanse metriek g en varieteit zonder rand $\mathcal{M}$. Indien $\mathcal{M}$ een rand heeft moet de zogenaamde Hawking-York-Gibbons randterm toegevoegd worden om randtermen die verschijnen in de variatie van de Einstein-Hilbert actie te compenseren. Je berekent dat

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}$$

en

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\alpha\beta}} = R_{\alpha\beta} + g^{\gamma\kappa}\frac{\delta R_{\gamma\kappa}}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Deze laatste tensor $\frac{\delta R_{\gamma\kappa}}{\delta g^{\alpha\beta}}$ is apart symmetrisch onder de uitwisseling van α, β en γ, κ en kan dus niet de Riemann tensor bevatten; bijgevolg is het nul. Desalniettemin is de variatie van de Ricci tensor niet triviaal

$$g^{\gamma\kappa}\delta R_{\gamma\kappa} = \nabla_\alpha V^\alpha(\delta g_{\kappa\gamma})$$

waar het vectoveld $V^\alpha(\delta g_{\kappa\gamma})$ lineair afhangt van covariante afgeleiden van $\delta g_{\kappa\gamma}$. Tracht in te zien dat dit waat *moet* zijn zonder enige berekening te maken (hint: de scalar moet van tweede orde in de afgeleiden zijn en eerste orde in de variatie van het metrisch veld). Bijgevolg hebben we dat de variatie van de Einstein-Hilbert actie levert

$$\int (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \nabla_\alpha V^\alpha(\delta g_{\kappa\gamma}) \sqrt{-g}.$$

Deze laatste term kan echter herschreven worden in termen van

$$\int \partial_\alpha (\sqrt{-g} V^\alpha) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

hetgeen gelijkgesteld wordt aan de uitwendige afgeleide van een $n-1$ vorm. Deze verdwijnt echter omwille van Stokes theorema gegeven dat $\partial \mathcal{M} = \emptyset$. De *vacuum* Einstein vergelijkingen zijn dus

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0$$

en je wordt uitgenodigd de Hawking-York-Gibbons randactie te bepalen (hint: zoek het begrip externe kromming op gegeven dat infinitisemale informatie van de bulk rond de rand zal meetellen). De Einstein (symmetrische) tensor

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$$

voldoet aan

$$g^{\gamma\alpha} \nabla_\gamma G_{\alpha\beta} = 0$$

een behoudswet die rechtstreeks volgt uit de tweede Bianchi identiteit. In de fysica impliceert deze gelijkheid de wet van behoud van de energie en momentum tensor. Het is belangrijk te begrijpen dat deze behoudswet een identiteit is en dus helemaal niet vereist dat de Einstein vergelijkingen voldaan zijn; de wet van behoud van energie en monentum vereist dit wel. Je bekomt nu ook een bewijs van de Gauss-Bonnet stelling in de zin dat in twee dimensies de Einstein tensor identiek verdwijnt: inderdaad $G_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = (1 - \frac{n}{2}) R$ en $R_{\alpha\beta} = \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}$ in twee dimensies impliceren dat $G_{\alpha\beta} = 0$ dus de Einstein vergelijkingen zijn *topologisch* in $n = 2$. Fysici kennen dit resultaat door te stellen dat er geen gravitatie bestaat in twee dimensies; uiteraard is dit niet het geval in hogere dimensies. De vacuum Einstein vergelijkingen kunnen vereenvoudigd worden tot

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

wat betekent dat de Ricci tensor nul is. Bewijs dat de behoudswet voor de Einstein tensor een rechtstreeks gevolg is van de invariantie van de actie onder éénparameter groepen van diffeomorphismen; in het bijzonder geldt dat

$$\delta g_{\alpha\beta} = \epsilon \mathcal{L}_{\mathbf{V}} g_{\alpha\beta} = 2\epsilon \nabla_{(\alpha} V_{\beta)}.$$

Dus de behoudswet is een rechtsreeks gevolg van een continue symmetrie, een resultaat dat in het algemeen bekend staat als Emmy Noether's theorema.

De Einstein vergelijkingen zijn bijzonder moeilijk op te lossen alhoewel men onder algemene voorwaarde het bestaan en uniek karakter van een oplossing kan aantonen. Veel makkelijker is het aan post Newtoniaanse fysica te doen; dat is expandeer $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$ op een varieteit wiens topologie een globale vlakke Minkowski metriek toelaat en schrijf de Einstein vergelijkingen tot op eerste orde in ϵ waarbij deze laatste een erg klein getal ondersteld wordt. De resulterende vergelijking wordt de graviton vergelijking genoemd.

In Einstein's theorie staat verder de geodetische vergelijking centraal; puntvormige objecten die volledig gekarakteriseerd worden door hun massa bewegen op geodeten. Men zou andere vergelijkingen kunnen bedenken zoals

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} + \alpha\mathbf{R}(\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V}, \mathbf{V})\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} = 0.$$

Indien het object extensief is kan men deze vergelijking laten afhangen van de *expansietensor*

$$\nabla_{(\alpha}V_{\beta)}$$

of *rotatietensor*

$$\nabla_{[\alpha}V_{\beta]}$$

zoals je kunt bedenken. Lichtstralen planten zich bij benadering verder op nul geodeten, tenminste toch in de optische benadering (quantum effecten uitgesloten). Je berekent dan ook zaken zoals frequentieverandering door de golfvector parallel te transporteren over de nul geodeet en vervolgens te projecteren op de bewegingsvector van de waarnemer. Concreet, zij k een golfvector aangrijpend in het punt x en y een punt in de toekomst verbonden door een nul geodeet met x. Zij n en m de genormalizeerde raakvectoren van de wereldkrommen van twee meettoestellen in x en y respectievelijk, dan is de frequentie van de golf gemeten in x door het toestel gelijk aan $g(k, n)/\hbar$ waarbij $\hbar$ een universe constante is. De frequentie gemeten in y is dan $g(k', m)/\hbar$ waarbij k' het Fermi-Walker transport is van k langs de nul geodeet tot in y. Opdie manier vindt men roodverschuivingseffecten (een lagere frequentie) omwille van interactie met een gravitationeel veld.

Oefeningen : differentiaalvergelijkingen, existentie en uniciteit van oplossingen.
We hebben in dit hoofdstuk gebruik gemaakt van vergelijkingen van de aard

$$\frac{df(x)}{dx} + P(f(x)) = 0$$

waarbij $P(f)$ een veelterm van de aard

$$\sum_{i=0}^{n} g_i f^n$$

met g_i functies in de reeele veranderlijke x. Door het kiezen van een $\epsilon > 0$ en te stellen dat $\frac{df(x)}{dx}$ in de ϵ benadering gegeven wordt door $\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$ toon je makkelijk aan dat alle $f(n\epsilon)$ vastliggen gegeven $f(0)$. Neem de limiet voor ϵ naar nul en toon aan dat de continue differentieerbare sluiting uniek bestaat indien alle g_i differentieerbaar zijn.

- Pas dezelfde tactiek toe om te bewijzen dat vergelijkingen van de vorm $\partial_t f(t, x^i) = P(f, \partial_i f, \partial_i \partial_j f, \ldots)$ een unieke oplossing hebben gegeven $f(t_0, x^i)$ voor alle x^i en een gegeven t_0.

- Veralgemeen deze stelling naar vergelijkingen van de vorm

$$g^{ij}(f, x)\partial_i \partial_j f + A^i(f, x)\partial_i f + P(f) = 0$$

  toe en argumenteer dat er een substantieel verschil is wat betreft het kwalitatief gedrag van de oplosingen wanneer g Lorentziaans of Riemanns is. In het eerste geval spelen de complexe getallen geen rol terwijl in het laatste dit wel degelijk het geval is omdat oppervlakken van de vorm $x^2 - y^2$ altijd reeele nulpunten hebben voor elke $y \in \mathbb{R}$ maar oppervlakken van de vorm $x^2 + y^2$ niet.

- Om dit laatste punt te begrijpen kijken we naar kern van de operator $\partial_x^2 - \partial_y^2$ en $\partial_x^2 + \partial_y^2$. In het eerste geval zijn deze $e^{ik(x \pm y)}$ terwijl in het tweede geval $e^{kx \pm iky}$ met $k \in \mathbb{C}$. Meestal beschouwt men reeele k omdat dan e^{iky} begrensd is en aanleiding geeft tot de zogenaamde Fourier transformatie. In het Lorentziaanse geval blijven deze functies dus begrensd voor alle x terwijl ze opblazen in het Riemannse geval. Stabiliteit van de natuur vereist dus een Lorentziaanse metriek.

Oefeningen: de Fourier transformatie op Lorentziaanse ruimten.
Fourier golven zijn op Minkowski ruimtetijd van de vorm $e^{ik_a(x^a - x_0^a)}$; het grote voordeel is dat de ruimtelijke golven gegeven door k_i gescheiden in de tijd blijven. Met andere woorden, k_i kan geinterpreteerd worden als een behouden fysische grootheid, die we het momentum noemen. Het is daarom niet aangewezen om veralgemeningen van deze golven te zoeken in een algemene ruimtetijd door de veralgemeende d'Alembertiaan

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \nabla_\beta$$

te gebruiken omdat de metrische coefficienten tijdsafhankelijk zijn en spatiale Fouriergolven met een welbepaalde karakteristiek met elkander gaan mengen. Fouriergolven moeten dus in een ruimtetijdszin gedefinieerd worden en niet vanuit een ruimtelijk beginpunt.

- Beschouw een basispunt (bronpunt) x en een Fouriergolf $\phi(x, y, k)$ waarbij y het punt van detektie is en $k \in T\mathcal{M}_x$ de golfvector gedefinieerd in x. Omdat k ook een zuivere golfvector moet definieren in y bestaat er een afbeelding $\star(x, y) : T\mathcal{M}_x \to \mathcal{M}_y$ die lineair is voldoet aan $\star(yx) \circ \star(xy) =$

id. Het is dan redelijk te eisen dat er een compositie $\square$ bestaat en een geassocieerde involutie $\dagger$ zodat

$$\phi(x,y,k)^\dagger = \phi(y,x,k_{\star(xy)}),\ \phi(y,x,k_{\star(xy)})\square\phi(x,y,k) = \phi(x,x,k).$$

Bovendien normaliseert men dat $\phi(x,x,k) = 1_\square$.

- Voor een normale Fouriergolf is $1_\square = 1$ en dus is $\square$ de vermenigvuldiging van complexe getallen en $\dagger$ de complex toegevoegde.

- Beschuw nu het idee van propagatie, namelijk dat de ontvangst van informatie op y het gevolg is van het reizen van informatie over een pad $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}$ met $\gamma(0) = x$ en $\gamma(1) = y$. Toon dan aan dat de meest eenvoudige eerste orde differentiaalvergelijking van de vorm

$$\frac{d}{ds}\phi(x,\gamma(s),k) = i\mu g(k(s),\dot\gamma(s))\phi(x,\gamma(s),k)$$

is met $\frac{D}{ds}k = 0$. μ is hier een konstante.

- Toon aan dat op minkowski de oplossingen gegeven zijn door

$$\phi(x,y,k) = e^{i\mu k_a(y^a - x^a)}$$

en alsdusdanig onafhankelijk van het gekozen pad. Dit is een topologische eigenschap van Minkowski omdat deze Riemann vlak is en alsdusdanig geen locale gravitationele vrijheidsgraden bevat.

- Kies nu voor γ een geodeet die x met y verbindt, dan is

$$\phi(x,y,k) = e^{-i\mu g(k,n)}$$

met $\exp_x(n) = y$. Nu je dit weet, veralgemeen de Hilbertruimte eigenschappen van de Fouriergolven in Minkowski naar $\mathcal{M}$.

Chapter 15

Verdere abstractie: oefeningen.

Dit hoofdstuk is gans origineel en bevat nieuwe denkwijzen. Je hebt opgemerkt dat we eerst verzamelingenleer hebben opgebouwd, dan getallenleer, operatorenleer, meetkunde gebaseerd op getallen en operatorenleer; deze laatste methoden vergden echter coordinaat afhankelijke representaties omdat we punten voorgesteld hebben door middel van getallen. Om de ganse meetkunde coordinaat onafhankelijk te doen, moeten we dus een aanpak volgen die dichter bij verzamelingenleer ligt. De definitie van continuiteit bijvoorbeeld was reeds van die aard en we geven er nu een voor differentialen.

Topologische differentialen.
Cruciaal hier is een *meetkundige* notie van transport: neem twee verzamelingen X, Y met reflexieve en symmetrische relaties $R \subset X \times X, T \subset Y \times Y$ respectievelijk die beide topologisch open zijn, dan noemen we

$$\nabla_X : \{(x, y, z) : y, z \in R(x, \cdot)\} \to R : (x, y, z) \to \nabla_{(x,y)}(x, z) \in R(y, \cdot)$$

de getransporteerde van de relatie (x, z) over de relatie (x, y) van x naar y. ∇_X voldoet aan de volgende eigenschap: er bestaat een open omgeving $D \subset \mathcal{Q} \subset R$, waarbij D de diagonaal is, zodat voor elke $(x, w) \in \mathcal{Q}$ er een open omgeving $\mathcal{W}$ van w bestaat en een open omgeving $\mathcal{O} \subset R(x, \cdot)$ zodat de afbeelding

$$T_{\mathcal{O}} : \{(x, y, z) : (x, y), (x, z) \in \mathcal{O}\} \to R : (x, y, z) \to (\pi_2(\nabla_{(x,z)}(x, y)), \pi_2(\nabla_{(x,z)}(x, y)))$$

continue en surjectief is op de diagonaal van $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$. Hier, π_2 is de projectie op de tweede factor. Bovendien definieren we de *commutator* tussen twee elementen van $R(x, \cdot)$ als

$$[(x, w), (x, v)] = ((v, x) \circ P(\nabla_{(x,v)}(x, w)))\sharp(\nabla_{(x,w)}(x, v) \circ (x, w))$$

waarbij $(w, z)\sharp(x, v) = \big(\nabla_{(w,v)}(w, z)\big) \circ (x, v)$ en $P(x, w) = (w, x)$. Merk op dat in een zekere zin we hebben dat onze connectie torsievrij is wat logisch is vermits

de commutator een rechtstreeks product is van de vectorruimte structuur van $\mathbb{R}^n$. Vermits deze niet bestaat in het algemeen geval hebben we geen andere keuze dan de commutator te definieren aan de hand van de connectie. We noemen een functie $F : X \to Y$ differentieerbaar in $x \in X$ indien er voor elke open omgeving $\mathcal{V} \subset T(F(x), \cdot)$ er een open omgeving $\mathcal{O} \subset R(x, \cdot)$ bestaat alsook een bi-continue afbeelding $DF_w : \mathcal{O} \to Y$, $w \in \mathcal{O}$ zodat $F(w) = \pi_2(DF_x(x, w))$ en

$$DF_x\left(\left(\nabla_{(x,w)}(x, y)\right) \circ (x, w)\right) = DF_w(\nabla_{(x,w)}(x, y)) \circ DF_x(x, w).$$

Hier heeft men dat de samenstelling $\circ$ op R (T) gedefinieerd is als $(w, z)\circ(x, w) = (x, z)$. Werk dit idee verder uit, bestudeer Riemann kromming en ontwikkel een notie van integraal; bijvoorbeeld, een connectie is "metrisch constant" indien

$$d(\nabla_{(xy)}(xz)) = d((xz)).$$

Je kunt nu de ganse theorie van lineaire functionalen uitbreiden in de context van onze meer topologische definitie van een differentiaal gebruik makende van de canonische torsieloze verplaatsing ∇_X. Een functionaal ω_X is een symmetrische continue functie op de verplaatsingen (x, y) die voldoet aan

$$\omega_X(\nabla_X(x, y, z) \circ (x, y)) = \omega_X((x, y)) + \omega_X((y, \pi_2(\nabla_X(x, y, z))))$$

en

$$\omega_X((x, y)) = \omega_X((y, x)).$$

Een kromme is een eendimensionaal object zonder gaten in X; meer concreet $\gamma \subset X$ is een kromme als en slechts als er een homeomorfisme ψ van γ naar een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}$ bestaat zodat voor elke $r < s \in A$ de verplaatsing $(\psi^{-1}(r), \psi^{-1}(s))$ irreduciebel is in de limiet voor s naar r in A. Een verplaatsing is irreduciebel indien

$$\lim_{s \to_> r} \frac{\omega_X(\psi^{-1}(s), D\psi^{-1}(r)(s - r))}{s - r} = 0$$

voor elke continue functionaal ω_X. Dit is logisch vermits gaten alleen gedefinieerd kunnen worden aan de hand van verplaatsingen en aldus een notie van differentiabiliteit behelsen.

Al dit leidt tot de definitie van forward differentiaal vergelijkingen in de zin dat

$$\frac{d}{ds}F(\psi^{-1}(s)) = g(\psi^{-1}(s))$$

voor elke continue funties $F, g : X \to \mathbb{C}$ waarbij $\frac{d}{ds}$ staat voor

$$\lim_{r \to_> s} \frac{f(r) - f(s)}{r - s}$$

en alles ψ onafhankelijk ondersteld wordt. Dit laatste betekent dat de ganse uitdrukking invariant is onder orde bewarende diffeormorphismen $\phi : A \to A$ in

de zin dat de vergelijking invariant is onder de substitutie $\psi \to \psi \circ \phi$.

Gegeven X, dan definieren we een maximale richtingen verzameling TX^2 aan de hand van koppels $(x, y) \in R$ zodat er geen x, y, z, w bestaan zodat

$$(x, w) = \nabla_{(x,y)}(x, z) \circ (x, y)$$

met uitzondering wanneer men de nulverpaatsing insluit. Deze eis betreft het irreduciebel karakter van de minimale verplaatsingen; het is te zeggen dat een elementaire verplaatsing niet geschreven kan worden als de samenstelling van twee elementaire verplaatsingen. Deze definitie kan veralgemeend worden naar TX^l waarbij een elementaire verplaatsing niet geschreven kan worden als de samenstelling van l elementaire veplaatsingen in x die gepast getransporteerd worden. In wat volgt werken we met $TX_m = \cap_{m \geq l \geq 2} TX^l$. Bovendien eisen we dat $\nabla_{(x,y)}(x, z) \in TX^l$ voor $(x, y), (x, z) \in TX^l$ en dat TX^l maximaal is; met andere woorden ∇ is inwendig en TX^l is zo groot mogelijk. De locale tangente ruimte is gegeven door $TX^l_x = \{(x, y) | (x, y) \in TX^l, y \in X\}$ en is alsdusdanig een lokaal construct onderhavig aan globale condities. In het bijzonder zijn we geinteresseerd in de volgende noties: we zeggen dat twee maximale richtingen-verzamelingen TX^l_1 en TX^l_2 voldoen aan $TX^l_2 < TX^l_1$ indien elke $(x, y) \in TX^l_1$ geschreven kan worden als de limiet van eindige samenstellingen van elementen in TX^l_2. We beschouwen bovendien oneindige reeksen $TX^l_{k+1} < TX^l_k$ en inductieve limieten $\wedge_{k,l} TX^l_k$ ervan. Deze limieten van maximale richtingen verzamelingen noemen we supermaximale richtingen verzamelingen en het zijn deze waarin we geinteresseerd zijn. Deze supermaximale richtingen verzamelingen bevatten niet noodzakelijk minimale elementen aldoch verplaatsingen van elementen duidelijk terug elementen zijn. Voor varieteiten, waarbij de locale tangente ruimten gelijk zijn is er effectief geen globale obstructie of beperking; in het algemeen, geven dat m gepast schaalt in functie van k in TX_{k,m_k} vallen alle globale obstructies weg in de definitie van $\wedge_{k,l} TX^l_k$ en kunnen we daarom spreken over een "lokale" bundel. We definieren $\wedge_k TX_{k,m_k}$ als (lokaal) voortbrengend indien elke relatie $(x, y) \in R$ geschreven kan worden als de limiet van eindige samenstellingen gedefinieerd door (lokale) punten $x^k_{1_k} \dots x^k_{n_k}$ waarbij in het geval $k \to \infty$ de lengte van de reeks $n_k \to \infty$; meer precies

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = y$$

en alle elementen $(x_{(i+1)_k}, x_{i_k}) \in TX_{k,m_k}$. Het is niet noodzakelijk zo dat indien $(x, y) \in TX^l$ dat dan $(y, x) \in TX^l$; bundels die aan deze eigenschap voldoen noemen we symmetrisch. Twee lokale tangente ruimten TX^l_x en TX^l_y noemen we sterk isomorf indien $(x, y) \in R$ en indien de afbeelding $(x, z) \to \nabla_{(x,y)}(x, z)$ een bijectie is. Indien deze afbeelding ook nog eens ∇ bewaart in de zin dat

$$\nabla_{(x,w)}(x, z) \circ (x, w) \to \nabla_{\nabla_{(x,y)}(x,w)}(\nabla_{(x,y)}(x, z)) \circ (\nabla_{(x,y)}(x, w)))$$

dan noemen we de ruimten lokaal autoparallel. Al deze definities kunnen uitgebreid worden naar ultramaximale richtingen verzamelingen $\wedge_k TX_{k,m_k}$. Rie-

mannse varieteiten voldoen allemaal aan de voorwaarde dat de canonische ultramaximale richtingen verzamelingen sterk autoparallel zijn. We noemen TX^l_x en TY^l_y zwak isomorf en of autoparralel indien de voorgaande voorwaarden voldaan zijn voor reeksen $x^k_{1_k} \dots x^k_{n_k}$ van intermediaire punten waarbij de intermediaire relaties $(x_{i_k}, x_{(i+1)_k}) \in TX^l$. Indien deze laatsten slechts tot R behoren dan noemen we TX^l_x en TY^l_y ultrazwak isomorf en of auto parallel. Indien per koppel $(x, z) \in TX^l_x$ een (limiet)reeks naar y gekozen kan worden zodanig dat de geassocieerde afbeelding door transport een bijectie en of een auto parallele afbeelding dan noemen we TX^l_x en TX^l_y sterk ultrazwak isomorf. Al deze noties kunnen uitgebreid worden tot supermaximale richtingen verzamelingen; het is best mogelijk dat de samenstelling van verplaatsingen in $\wedge_k TX_{k,m_k}$ inwendig is alhoewel dit per definitie niet het geval is voor de afzonderlijke TX^l_k. In dat geval kunnen de lokale tangente ruimten een vectorruimte structuur overerven.

We zijn in het algemeen geinteresseerd in $\wedge_k TX_{k,m_k}$ die lokaal voortbrengend en (lokaal) zwak isomorf zijn. Toon aan of ontkracht dat elke lokaal voortbrengende en zwak isomorfe $\wedge_k TX_{k,m_k}$ op een differentieerbare varieteit gegeven wordt door de standaard tangente bundel TX. Construeer nu de gepaste duale bundel van elementaire lineaire functionalen (als limieten). Dit zou je moeten toelaten differentiaalvergelijkingen te veralgenemen over krommen waarvan de raakvectoren behoren tot de respectievelijke bundel.

Vage logica.
In spoken language, one has reasons of reasons and the latter are sometimes infinite and circular. Let us give an example: "an apple falls down on the earth" WHY? "because of the gravitational field" WHY? "Because the laws of physics are background independent and involve a (pre) geometry" WHY? "because you need to be able to say what a straight line is and because nothing is static in this world" WHY? "If you could not, then you cannot tell the difference between a free object and one which is acted upon and because the notion of freedom isn't absolute" WHY? ... Obviously, this sequence is either never ending or ends with a dogmatic statement we suppose to be true. In mathematics, we have allowed for such argumentation by means of the logical operator "implies" of the words "if A then B" and every situation of this kind can be written as a sequence of such sentences. Also, we have in spoken language the words "by means of" for example: a chemical substance A changes into B by means of the catalyst C. Here, a mathematician would try to say that there is an equivalence with the statement "if A and C react then B and some leftover D remain". However, sometimes it is just not known what the leftovers are and neither is the mechanism by which C serves as a catalyst for A to change. The attitude of the mathematician is that this imperfect knowledge is just due to a limitation of our knowledge and is not intrinsic by any means and he would still write

$$A + C \to B + D.$$

But what if *nature* would be such that no precise statements can be made, not even probabilistically? Then we could not write it down in this way and we would have to invent a new logical operator in order to accomodate for the meaning of this sentence; the latter is noted down as

$$A \overset{C}{\to} B$$

where we ignore the leftovers. This operation is intended to mean "A evolves into B by means of the catalyst C" or "A implies B if C amongst others holds" where we just don't know the others or perhaps don't know if others are needed in the first place. This is the principle of incomplete knowledge which I think one needs to import into mathematics because as far as I know nature operates in this way by means of our free will. The reader automatically notices that it is possible for

$$A \overset{C}{\to} B \text{ and } A \overset{C}{\to} \neg B$$

to hold where $\neg$ can be interpreted in the classical or intuitionistic sense. A mistake which is commonly made in science is that $A \to B$ is interpreted to mean that A is a cause for B, or that A is a reason for B to hold. Such interpretations however are wrong since it is not (experimentally) possible to verify a reason for something to occur; the only thing we can measure are coincidences. For example, it is equally possible for angels to move the planets the way they do than it is for gravity to do the job; the laws of gravity merely establish the way in which the motion of the earth around the sun occurs but it provides no reason or cause for it. One expects the following rule to hold

$$\left(A \overset{C,D}{\to} B\right) \to \left(A \overset{C}{\to} B\right)$$

in either further specification narrows down the implication. One does not have that

$$(A \to B) \to \left(A \overset{C}{\to} B\right)$$

is true since for $C = \neg B$, the right hand side is always false. We call C *compatible* or of no influence if this sentence is true. In case also the reverse implication holds

$$\left(A \overset{C}{\to} B\right) \to (A \to B)$$

we call C *redundant* or unnecessary. For example, A is H_2O and B liquid water and C is 50 degrees centigrade; since the molecule H_2O is always liquid water at this temperature, this information is redundant. In case C is an influence, we call the latter maximal or complete if

$$\left(A \overset{C}{\to} B\right) \to (A \wedge C \to B)$$

is true while the implication

$$(A \wedge C \to B) \to \left(A \overset{C}{\to} B\right)$$

is true by definition. While the sentence

$$(A \wedge C \to B) \to (A \wedge \neg C \to B)$$

is not always true, it can be that

$$\left(A \overset{C}{\to} B\right) \to \left(A \overset{\neg C}{\to} B\right)$$

is true and the reader should give an example of this (for example when C and $\neg C$ are redundant).

Priemgetallen.
Een eenvoudige oefening bestaat erin aan te tonen dat er een oneindig aantal priemgetallen zijn (hint: stel dat er een eindig aantal zijn en neem het product plus een). Moeilijker is uitspraken te doen over de dichteid van het aantal priemgetallen $\frac{a(n)}{n}$ kleiner of gelijk aan n; werk hetvolgende argument uit, zij $b_1, \ldots, b_k$ de eerste k priemgetallen, construeer dan een bovengrens voor $a(b_1 \ldots b_k + 1)$ door het aantal k koppels $(n_1, \ldots, n_k)$ te tellen zodat $\sum_{i=1}^{l} n_i \geq l$ en $\sum_{i=1}^{k} n_i = k$ te tellen waarbij $n_i \in \mathbb{N}$. Uit algemene argumenten haal je dat $\frac{a(n)}{n} \to 0$ en $a(n) \to \infty$ in de limiet voor n naar oneindig; veronderstel nu dat $a(n)$ uitbreidbaar is tot een reele veranderlijke x, en onderstel dat $\dot{a}(x) \to 0$ en $\frac{a(x)}{x} \to 0$ in de limiet voor x naar oneindig. Toon dan aan dat $a(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$. Definieer een meromorfe functie met polen in de priemgetallen en bereken contourintegralen.

Chapter 16

Nawoord.

De auteur van dit werk kan steeds gecontacteerd worden via email op johan.noldus@gmail.com en is steeds bereid tot verdere revisie en expansie van de oefeningenbundel. Suggesties van lezers teneinde de inclusie van verdere onderwerpen te garanderen worden graag in ontvangst genomen en verder bediscussieerd. Ik hoop in dit werk, dat vele nieuwe resultaten van topniveau bevat, de kritische geest van de jongeren gestimuleerd te hebben. Vele van de oefeningen alsook de onderwerpen aangeraakt in hoofdstuk vijftien kunnen aanleiding geven tot een master of doctoraaatsthesis. Ik ben steeds bereid te overwegen of (co)-begeleiding opportuun is en verlang alleszins een referentiekopij ter inclusie in dit boek indien de thesis voldoende nauw aansluit. Een naslagwerk, in het engels, over fundamentele theoretische fysica is in produktie en wordt binnenkort uitgebracht. De nederlandstalige versie volgt daarna.

Referentie en postadres:
Dr. J. Noldus
Goorweg 24, bus 73
3191 Hever, Boortmeerbeek
Belgie.
Tel: 0032498466275
Email: johan.noldus@gmail.com