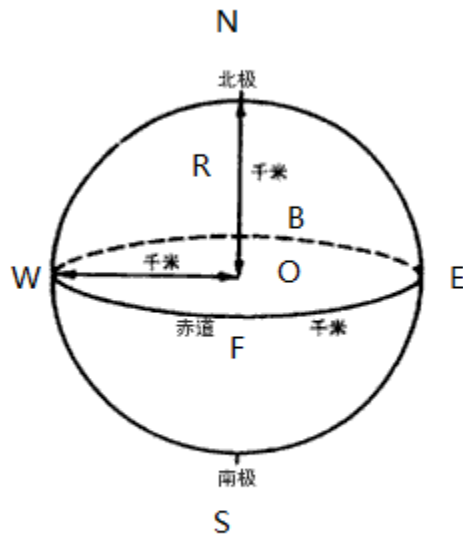


### 圆周率小于常数 $\pi$ (3.14159126...)

百度百科白纸黑字写着：圆周率（Pi）是圆的周长与直径的比值，一般用希腊字母 $\pi$ 表示，是一个在数学及物理学中普遍存在的数学常数。

我们先看圆周率的定义是一个比值，也就是说，来自于周长测量值和直径测量值的比值。这一切看来都很正常，但是别忘了，我们的地球是圆的，我们的空间是弯曲的，请问你测量的直径就真的是你想象的直径吗？

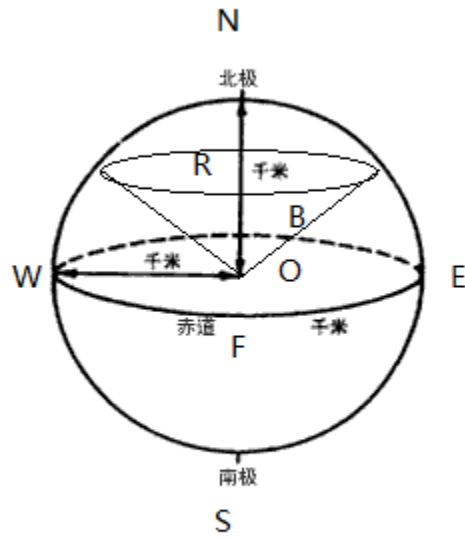
为了简单起见，我们把地球看成一个标准圆，如果测量一个赤道圆的圆周率（Pi），情况会怎么样？



这应该是地球上最大的圆了，结果就看出端倪了。

圆周率  $Pi = \text{圆周长} / \text{直径} = \text{圆周} (WFEB) / \text{弧} (WNE) = 2\pi R / \pi R = 2$ .

圆周率  $Pi=2$ ? 是的，因为这是一个曲面，因为圆周率是一个比值，圆周长和直径都是测量而来。那么你可能会说，我从地球打个洞，用激光来测量直线距离，但是这么做，你是否考虑到了广义相对论，空间也是弯曲的，光也会弯曲，唯一不同的是，光弯曲的半径可能变成了以太阳为圆心。只要去测量圆周长和直径，就不可避免要在空间去度量，而空间，全都是非欧空间，欧几里德空间只是数学中的理想国。也就是说，测量出来的只有直弧，没有直径。我们再看看纬度 60 度的圆的圆周率。



不难算出圆周率  $\pi = \text{圆周长} / \text{直径} = \pi R / (\pi R / 3) = 3$ .

再借用余弦定理，我们得到更一般的结论， $\text{纬度} = (\pi - \theta) / 2$ ,

$$\text{圆周率 } \pi_i = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \pi R / \theta R = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \pi / \theta$$

可以对  $\pi_i$  求导求极值，从而得到  $\theta = \pi$  时， $\pi_i$  最小等于 2.

由于直弧大于直径，圆周相等的情况下， $\pi_i$  小于等于  $\pi$ ，只在南北极上，圆缩成一个点，此时直弧等于直径， $\pi_i$  最大等于  $\pi$ 。但此时直径也等于 0，因此这点是个极限点。

从而得到圆周率  $\pi_i = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \pi / \theta$  属于区间  $[2, \pi)$ ， $2 \leq \pi_i < \pi$

由于我们在平常测试时圆直径都是大于 0，所以圆周率  $2 \leq \pi_i < 3.1415926\dots$