

Les nombres P -aliques

A.Balan

13 août 2017

Résumé

Les nombres P -aliques sont définis aux moyen des polynômes à coefficients rationnels.

1 Les entiers P -aliques

On considère le corps des nombres rationnels \mathbf{Q} et les polynômes à coefficients rationnels $\mathbf{Q}[X]$. Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme irréductible monique.

Définition 1 On considère la limite projective des quotients par les idéaux principaux (P^n) :

$$\mathbf{Z}_P = \varprojlim \mathbf{Q}[X]/(P^n)$$

Cette limite constitue les entiers P -aliques \mathbf{Z}_P .

2 Les nombres P -aliques

L'anneau des entiers P -aliques est un anneau intègre dans mesure où le produit de deux éléments n'est pas infiniment divisible par P . On considère le corps des fractions de cet anneau.

Définition 2 On définit :

$$\mathbf{Q}_P = \text{Frac}(\mathbf{Z}_P)$$

3 La valuation P -alique

3.1 Une suite exacte

Proposition 1 La suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_P \xrightarrow{\rightarrow^n} \mathbf{Z}_P \rightarrow \mathbf{Q}[X]/(P^n) \rightarrow 0$$

où \rightarrow^n est la multiplication par P^n .

Pour qu'un élément soit inversible il faut et il suffit qu'il ne soit pas divisible par P .

3.2 Définition

On munit \mathbf{Z}_P d'une valuation.

Définition 3 On écrit un élément sous la forme $Q = P^n U$, avec U inversible. La valuation est alors :

$$v_P(Q) = n$$

4 Une formule

On a la formule suivante pour un polynôme de $N \in \mathbf{Q}[X]$:

$$N = \prod_{P \in \mathbf{Q}[X] \text{ Irr}} P^{v_P(N)}$$

Le produit est en fait fini.

Références

[S] J.-P. Serre, "Cours d'arithmétique", PUF, 1970.