

---

Хмельник С.И.

# Еще о непротиворечивом решении уравнений Максвелла

## Аннотация

Приводится краткое описание непротиворечивого решения уравнений Максвелла, данного в [1], и новые дополнения.

## Оглавление

1. Введение
  2. Решение уравнений Максвелла
  3. Напряженности
  4. Потоки энергии
  5. Скорость движения энергии
  6. Импульс и момент импульса
  7. Обсуждение
- Литература

## 1. Вступление

"До настоящего времени не было обнаружено ни одного эффекта, который потребовал бы видоизменения уравнений Максвелла" [4]. Тем не менее, в последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Уверенность критиков уравнений Максвелла создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии в такой волне. И, действительно, "плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «пульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?" [7]. Безусловно, нарушается, **если** электромагнитная волна удовлетворяет **известному решению** уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: "Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана" [4]. Таким образом, единственность решения

---

доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

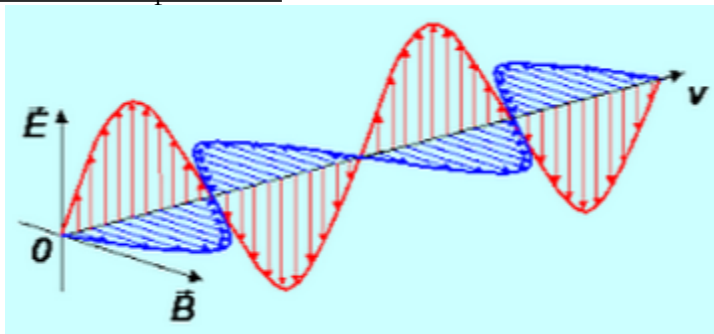


Рис. 1.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это хорошо видно на рис. 1. Но это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [3], например, этот факт относится к "урокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют некоторым авторам усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти сомнительные результаты следуют **только из найденного решения**. Но это решение может быть иным (уравнения в частных производных имеют, как правило, несколько решений).

В [1] выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

Ниже показывается, что из этого решения можно найти также скорость движения электромагнитной энергии, которая в общем случае отличается от скорости света. Даны и некоторые другие добавления к [1].

Для удобства читателя вначале кратко рассматривается предложенное в [1] решение.

## 2. Решение уравнений Максвелла

Система уравнений Максвелла для вакуума имеет вид

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(E) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(H) = 0. \quad (4)$$

В системе цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (12)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (13)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (14)$$

где  $\alpha, \chi, \omega$  – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r = h_r(r)co, \quad (15)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (16)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (17)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (18)$$

$$E_{\varphi} = e_{\varphi}(r)co, \quad (19)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (20)$$

где  $h(r)$ ,  $e(r)$  - некоторые функции координаты  $r$ .

В [1] показано, что у такой системы **существует** решение, имеющее следующий вид:

$$h_z(r) = 0, \quad e_z(r) = 0, \quad (21)$$

$$e_r(r) = e_{\varphi}(r) = \frac{A}{2} r^{(\alpha-1)}, \quad (22)$$

$$h_{\varphi}(r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_r(r), \quad (23)$$

$$h_r(r) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{\varphi}(r), \quad (24)$$

$$\chi = \pm \omega \sqrt{\mu\varepsilon} / c, \quad (25)$$

где  $A, \varepsilon, \mu, c, \alpha, \chi, \omega$  - константы.

### 3. Напряженности

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки  $A(r, \varphi)$ . При этом **векторы  $E$ ,  $H$  всегда ортогональны**.

Для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны рассмотрим функции (2.13, 2.14) и (2.15-2.20). Видно, что **в каждой точке с координатами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  напряженности  $H$ ,  $E$  сдвинуты по фазе на четверть периода**.

Плотность энергии равна

$$W = \left( \frac{\varepsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) = \frac{A^2}{4} \cdot \varepsilon \cdot r^{2(\alpha-1)}. \quad (1)$$

Таким образом, **плотность энергии электромагнитной волны постоянна во времени и одинакова на всех точках цилиндра данного радиуса**.

Решение существует и при измененных знаках функций (2.13, 2.14). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют то, что возможны **два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны**.

Рассмотрим функции (2.13, 2.14) и (2.25) Тогда найдем

$$co = \cos\left(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z + \omega t\right), \quad (2)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z + \omega t). \quad (3)$$

Рассмотрим точку, движущуюся по цилиндру постоянного радиуса  $r$ , у которой значение напряженности зависит от времени по формуле

$$H_{r.} = h_r(r)\cos(\omega t) \quad (4)$$

Сравнивая эту формулу с (2.15) и учитывая (2), замечаем, что формулы (4) и (2.15) совпадают, если в любой момент времени

$$\alpha\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} z = 0 \quad (5)$$

или

$$\varphi = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha \cdot c} z. \quad (6)$$

Таким образом, на цилиндре постоянного радиуса  $r$  существует траектория точки, описываемая формулами (2, 6), где все напряженности изменяются синусоидально. С другой стороны, такая траектория является винтовой линией. Следовательно, линия, по которой точка движется так, что ее напряженность  $H_{r.}$  изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией. Эти же рассуждения можно повторить для других напряженностей (2.16-2.20). Итак,

**траектория точки, которая движется по цилиндру данного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.** (A)

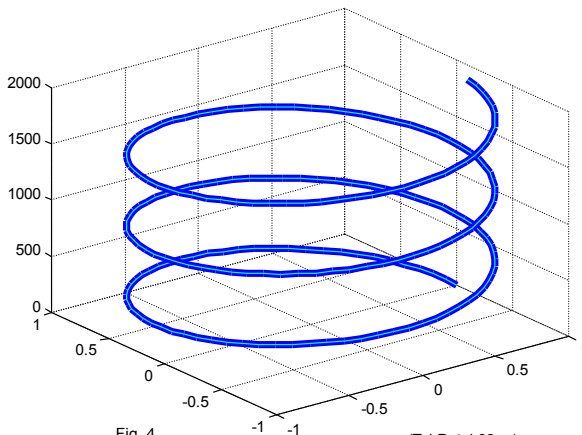
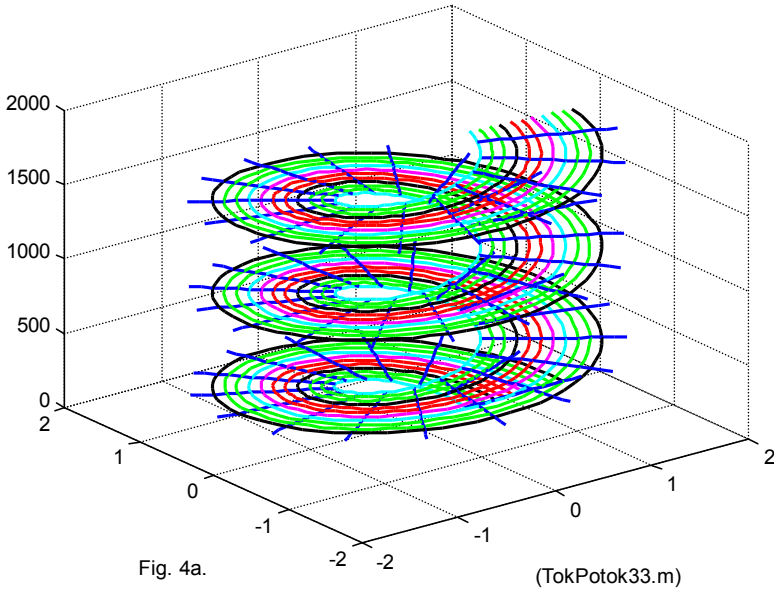


Fig. 4.

(TokPotok33.m)

Например, на рис. 4 показана винтовая линия при  $r=1$ ,  $c=300000$ ,  $\omega=3000$ ,  $\alpha=-3$ ,  $\varphi=[0 \div 2\pi]$ . На рис. 4а показаны винтовые линии при тех же условиях, но для различных значений радиуса  $r=[0.5, 0.6, \dots, 1.0, 1.1]$ . Прямыми линиями показаны геометрические места точек с равными  $\varphi$ .



Обозначим  $e_r(r) = e_\varphi(r) = e_{r\varphi}(r)$ . Тогда из (2.21-2.25), следует, что в каждой точке имеются только векторы

$$H_{r\cdot} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r) \cos(\omega t), \quad H_{\varphi\cdot} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r) \sin(\omega t), \quad (7)$$

$$E_{r\cdot} = e_{r\varphi}(r) \sin(\omega t), \quad E_{\varphi\cdot} = e_{r\varphi}(r) \cos(\omega t). \quad (8)$$

При этом суммарные векторы  $H_{r\varphi} = H_r + H_\varphi$  и  $E_{r\varphi} = E_r + E_\varphi$  находятся в плоскости  $r, \varphi$  и имеют модули

$$|H_{r\varphi}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} e_{r\varphi}(r), \quad |E_{r\varphi}| = e_{r\varphi}(r). \text{ На рис. 4б показаны все эти векторы.}$$

Видно, что при движении точки  $T$  по винтовой линии суммарные векторы  $H_{r\varphi}$  и  $E_{r\varphi}$  вращаются в плоскости  $r, \varphi$ . Их модули остаются постоянными и равными между собой. Эти векторы  $H_{r\varphi}$  и  $E_{r\varphi}$  всегда ортогональны.

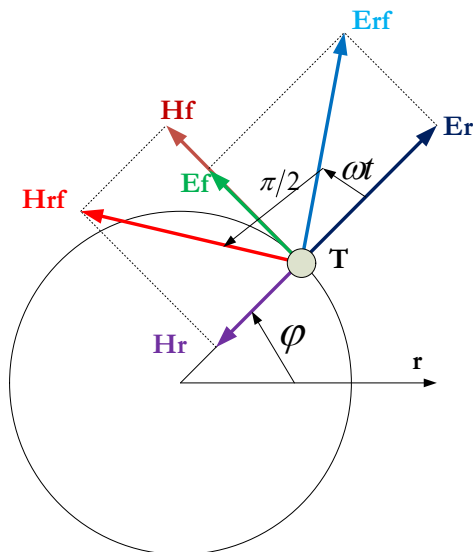


Рис. 4б.

Итак, синусоидальная волна распространяется по винтовой линии, при этом в каждой точке  $T$ , движущейся по данной винтовой линии, проекции векторов магнитной и электрической напряженностей

- существуют только в плоскости, перпендикулярной оси винтовой линии, т.е. существуют только две проекции этих векторов,
- изменяются синусоидально,
- сдвинуты по фазе на четверть периода.

Суммарные векторы

- вращаются в этой плоскости,
- имеют постоянные модули,
- ортогональны друг другу.

#### 4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Умова-Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

Отсюда и из предыдущих формул следует, что поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r, \varphi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi, \quad (3)$$

где плотность потока энергии

$$s_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (e_r^2 + e_\varphi^2). \quad (4)$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны **НЕ расширяется**. Подтверждением этому является существование лазера.

Как показано в [1], из предыдущих формул следует, что

$$s_z = \frac{A^2 c}{64 \alpha \pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 - \cos(4 \alpha \pi)) r^{2(\alpha-1)}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению волны;
- эта картина вращается при перемещении по оси OZ;
- поток энергии, проходящий через площадь сечения, не зависит от  $t$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ; главное, что эта величина не изменяется во времени, и, следовательно, поток энергии электромагнитной волны является постоянным во времени; это соответствует **закону сохранения энергии**.

## 5. Скорость движения энергии

Прежде всего, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны. Очевидно, эта скорость равна производной  $\frac{dz}{dt}$  от функции  $z(t)$ , заданной неявно в виде (2.15-2.20). Определив производную из этих функций, найдем скорость распространения монохроматической электромагнитной волны

$$v_m = \frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{\chi} \quad (1)$$

или, с учетом (2.25),

$$v_m = m \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}. \quad (2)$$

Следовательно, скорость распространения монохроматической электромагнитной волны равна скорости света.



Общепринятой является концепция Умова [5], согласно которой плотность потока энергии  $s$  является произведением плотности энергии  $w$  и скорости движения энергии  $v_e$ :

$$s = w \cdot v_e. \quad (3)$$

Из (4.5, 3.1) получаем:

$$K_{vc} = \frac{v_e}{c} = \frac{(1 - \cos(4\alpha\pi))}{16\alpha\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (4)$$

При малых  $\alpha$  уравнение (4) преобразуется к виду:

$$K_{vc} \approx \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (5)$$

Таким образом, скорость движения электромагнитной энергии и величина  $\alpha$  пропорциональны. В частности, скорость движения электромагнитной энергии равна скорости распространения монохроматической электромагнитной волны при  $K_{vc} = 1$ , откуда следует, что

$$\alpha \approx \frac{2}{\pi} \sqrt{\varepsilon\mu} \approx 2 \cdot 10^{-9}. \quad (6)$$

При этом условии плотности потока энергии и энергии связаны соотношением  $s = w \cdot c$ . При этом скорость движения энергии постоянна для всех точек сечения волны (не зависит от  $r$ ).

Скорость движения электромагнитной энергии  $v_e$  не всегда равна скорости света. Например, в стоячей волне  $v_e = 0$ , и, вообще, в волне, являющейся суммой двух монохроматических электромагнитных волн одинаковой частоты, распространяющихся в противоположных направлениях, перенос энергии ослаблен и  $v_e < c$ .

Заметим, что на основании известного решения и формулы (3) нельзя найти скорость  $v_e$ . Действительно, в системе СИ найдем:

$$v_e = \frac{S}{W} = \frac{EH}{\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{H^2}{2\mu}\right)} = 2\mu \left/ \left( \varepsilon\mu \frac{E}{H} + \frac{H}{E} \right) \right.$$

Если  $\frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{H^2}{2\mu}$ , то  $\frac{H}{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}$ . Тогда для вакуума

$$v_e = 2\mu \left/ \left( \varepsilon\mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \sqrt{\varepsilon\mu} \right) \right. = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 376,$$

---

что **не** соответствует действительности. Вообще, полученное здесь решение не может быть найдено в векторной форме.

## 6. Импульс и момент импульса

Известно, что

$$p = S/c^2, \quad (1)$$

$$m = p \cdot r, \quad (2)$$

где  $p$  - плотность импульса,  $m$  - плотность момента импульса в данной точке вокруг оси, отстоящей от данной точки на расстояние  $r$ . Из вышеизложенного следует, что в электромагнитной волне существуют потоки энергии, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Следовательно, в электромагнитной волне существуют также импульсы, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси. Существуют также моменты импульса относительно любого радиуса, любой окружности и относительно оси.

Рассмотрим момент импульса относительно оси  $z$ . В соответствии с (1) найдем этот момент:

$$L_z = p_z r = s_z r / c^2. \quad (3)$$

Этот момент является орбитальным угловым моментом, который обнаруживается в т.н. закрученном свете [6].

Вместе с тем, следует заметить, что закрученность света не следует из существующего решения уравнений Максвелла. Однако, она естественным образом следует из предложенного решения – см. (6). На рис. 7а (взятом из [6]) "*картинка с закрученным светом показывает не электрическое поле, а именно волновой фронт (на среднем фрагменте показан незакрученный свет, а на верхнем и нижнем фрагментах – свет, закрученный в ту или иную сторону). Он не плоский, тут фаза волны меняется не только при движении вдоль луча, но и при смещении в поперечной плоскости ... Поскольку поток энергии световой волны обычно направлен перпендикулярно волновому фронту, то получается, что в закрученном свете энергия и импульс волны не просто летят вперед, а как бы крутятся при этом вокруг оси движения.*" Именно это и получено выше – см. для сравнения рис. 3.4а.

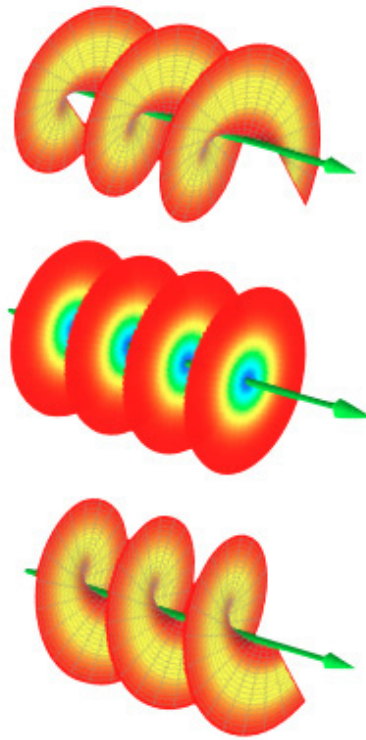


Рис. 7а.

## 7. Обсуждение

На рис. 8 показаны напряженности в декартовых координатах. Полученное решение описывает волну. Основные отличия этого решения от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Поток энергии имеет положительное значение.
3. Поток энергии распространяется вдоль волны
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  сдвинуты по фазе на четверть периода.
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.
6. Решение существует при постоянной скорости распространения волны.

7. Область существования волны не расширяется, что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.
9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Волна и ее энергия определены, если заданы параметры  $A$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $\alpha$ .
11. Параметр  $\alpha$  определяет скорость движения энергии в электромагнитной волне.
12. Точка, движущаяся по цилиндру постоянного радиуса так, что значение любой напряженности в этой точке изменяется синусоидально во времени, является винтовой линией.

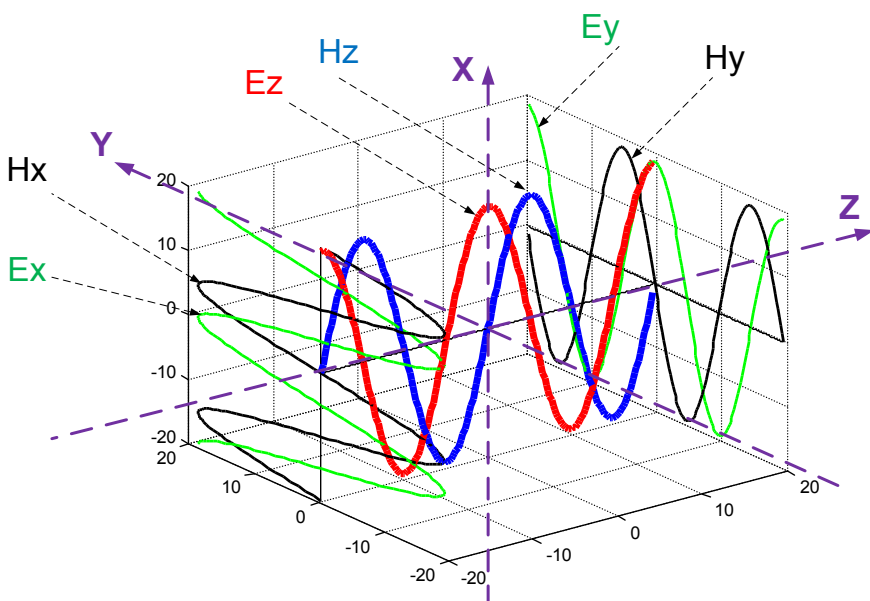


Рис. 8.

## Литература

1. С.И. Хмельник. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. "MiC", Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 p.
2. Википедия, Уравнения Максвелла, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения\\_Максвелла](https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнения_Максвелла)

- 
3. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
  4. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvella.html>
  5. Умов Н.А. Уравнения движения энергии в телах. - Одесса: Типография Ульриха и Шульце, 1874. - 56 с. <http://izdatelstwo.com/clicks/clicks.php?uri=lib.izdatelstwo.com/Papers2/Umow.pdf>
  6. Игорь Иванов. Закрученный свет и закрученные электроны: обзор последних результатов, [http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya\\_biblioteka/432009/Zakruchennyy\\_svet\\_i\\_zakruchennyye\\_elektrony\\_obzor\\_poslednikh\\_rezultatov](http://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/432009/Zakruchennyy_svet_i_zakruchennyye_elektrony_obzor_poslednikh_rezultatov)
  7. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.