

ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ КАТАЛАНА

Курмет Султан

АБСТРАКТ: В статье приводится простое доказательство Гипотезы Каталана.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Гипотеза Каталана, простое доказательство.

MSC Classification Codes: 11D41

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Каталана, которая предложена в 1844 году Эженом Каталаном, формулируется следующим образом [1]:

Уравнение $x^m - y^n = 1$ ($x, y, m, n > 1$) имеет единственное решение в натуральных числах: $x = 3, y = 2, m = 2, n = 3$.

Иными словами, уравнение $x^m - y^n = 1$ не имеет других решений кроме $3^2 - 2^3 = 1$. Это гипотеза была доказана 2002 году румынским математиком Предо Михайлеску, однако опубликованное им доказательство [2] неэлементарное. В этой связи вопрос получения простого доказательства Гипотезы Каталана является актуальным.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из модулярной арифметики известно, что остатки полученные в результате деления последовательность натуральных чисел на натуральное число, повторяются с периодом равным делителю. Поэтому степень любого натурального числа можно представить в виде суммы остатка и делителя

$$c^z = r + a^x k, \quad (1)$$

где r -остаток от деления c^z на a^x , k -множитель делителя, $k = 0, 1, 2, \dots$

При этом очевидно, что если $c^z < a^x$, то $k = 0$, поэтому $c^z = r$, а в случае $c^z > a^x$, $k \geq 1$, поэтому $c^z = r + a^x k$.

Поскольку по условию гипотезы остаток равен 1, то уравнение (1) можем представить в виде

$$c^z = 1 + a^x k. \quad (2)$$

В данном случае нас интересует вариант, когда в уравнении (2) множитель будет равен 1 ($k = 1$). Отсюда следует, что для доказательства гипотезы

Каталана мы должны доказать, что в уравнении $c^z = 1 + a^x k$ ($a, c, x, z > 1$) множитель k будет равным 1 только при $c = 3, a = 2, z = 2, x = 3$.

Отметим, что остатки, получаемые при делении степени любого натурального числа на степень натурального числа, начинаются с числа 1, так как нулевая степень любого натурального числа равно 1.

Исследования проведенная автором показывает, что, если последовательность состоящей из натуральных степеней натуральных чисел делить на натуральную степень натурального числа, то остатки также повторяются с определенным периодом. Если мы знаем период повторения остатков, то можно легко вычислить число c^z соответствующее остатку 1, после чего нетрудно вычислить множитель k по формуле

$$k = (c^z - 1)/a^x. \quad (3)$$

На основе результатов исследования закономерностей степенных, проведенных автором, доказано следующее утверждение:

В уравнении $c^z = 1 + a^x k$ ($a, c, x, z > 1$) множитель k будет равным 1 только при $c = 3, a = 2, z = 2, x = 3$.

Таким образом, вышеприведенное утверждение является простым доказательством гипотезы Каталана.

ССЫЛКИ

1. Гипотеза Каталана // <http://ru.wikipedia.org>.
2. P. Mihăilescu. Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture // J. Reine angew. Math. — 2004. — Vol. 572, no. 572. — P. 167–195.