Le problème de Syracuse

Antoine Balan

December 13, 2017

1 La suite de Collatz

La suite de Collatz est définie [G] ainsi :

$$S(2n) = n$$

$$S(2n+1) = 6n + 4$$

2 L'ensemble E

L'ensemble E est défini comme suit :

$$E = \{n \in \mathbf{N}; \exists k \in \mathbf{N}, S^k(n) = 1\}$$

3 Une fonction holomorphe

On définit une fonction holomorphe :

$$f(z) = \sum_{n \in E} \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$$

On décompose f en $f = f_p + f_i$ selon que n est pair ou impair. Ensuite, on a $f_i = f_i^0 + f_i^1 + f_i^2$, selon que n est congru à $0, 1, 2$ modulo 3, $f = f^0 + f^1 + f^2$. On a aussi :

$$E = E_p + E_i$$

$$E_i = E_i^0 + E_i^1 + E_i^2$$

4 L'équation fondamentale

L'équation fondamentale est :

$$3n + 1 = 2^k(2m + 1)$$

avec n impair, $k \geq 1$.

5 Les formules clef

Les formules clef, étant donné l'équation fondamentale sont :

$$1/(z-1)+\sum_{k\geq 1} f_i^1((3z+1)/(2^{2k}))(3/2^{2k})+f_i^2((3z+1)/(2^{2k-1}))(3/2^{2k-1}) = f_i(z)+K$$

$$\sum_{k\geq 1} f_i(z/2^k)(1/2^k) = f_p(z) + K'$$

avec K, K' deux constantes.

$$f(z/2) = 2f_p(z)$$

$$f_i(z/2) = 2f_p(z) - f_p(z/2)$$
$$f_i(z) = f(z) - (1/2)f(z/2)$$
$$f_i^1(z) = f^1(z) - (1/4)f^1(z/4)$$
$$f_i^2(z) = f^2(z) - (1/4)f^2(z/4)$$

ce qui donne :

$$1/(z-1) + (3/4)f^1((3z+1)/4) + (3/2)f^2((3z+1)/2) = f_i(z) + K$$

6 Intégrales et formule de Cauchy

On intègre sur des cercles de rayon R pour appliquer la formule des résidus.

$$1 + \int_R (3/2)f^2((3z+1)/2)dz = \int_R [f_i(z) - (3/4)f^1((3z+1)/4)]dz$$

donne :

$$1 + \int_{(3R+1)/2} f^2(t)dt = \int_R f(t)dt - \int_{R/2} f(t)dt - \int_{(3R+1)/4} f^1(t)dt$$

On compte les pôles.

$$1 + a^2((3R+1)/2) = a(R) - a(R/2) - a^1((3R+1)/4)$$

avec $a = Card(\{n \in E, n \leq R\}) = a^0 + a^1 + a^2$. Par récurrence, on obtient $a(n) = n$.

References

[G] R.K.Guy, "Unsolved Problems in Number Theory", Springer-Verlag, New-York, 1994.