## Teoria Względności



**Czarne Dziury** 

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym:

http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

#### Zbigniew Osiak (Tekst)

### TEORIA WZGLĘDNOŚCI Czarne Dziury

Małgorzata Osiak (Ilustracje)

© Copyright 2012 by Zbigniew Osiak (text) and Małgorzata Osiak (illustrations)

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Rozpowszechnianie i kopiowanie całości lub części publikacji zabronione bez pisemnej zgody autora tekstu i autorki ilustracji.

Portret autora zamieszczony na okładkach przedniej i tylnej Rafał Pudło

Wydawnictwo: Self Publishing

ISBN: 978-83-272-3447-6

e-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

# TEORIA WZGLĘDNOŚCI Czarne Dziury

dr Zbigniew Osiak

Portrety wykonała

Małgorzata Osiak

#### Ojcowie grawitacji

- •Prawo grawitacji Newtona 10
- •Prawo grawitacji Gaussa 11
- •Równanie pola i równania ruchu Poissona 12
- •Dwupotencjalność stacjonarnego pola grawitacyjnego 13

#### Ogólna Teoria Względności

- •I powstała Ogólna Teoria Względności (OTW) 19
- •Podstawowe postulaty OTW 20
- •OTW i grawitacja 21
- •Równania pola w OTW 22
- •Równania ruchu cząstki próbnej w OTW 23
- •Rozwiązanie zewnętrzne Schwarzschilda 25

#### **Czarne dziury**

- Masy źródłowe 27
- •Czarna dziura 28

- •Trafna nazwa 29
- •Promienie Schwarzschilda różnych obiektów 30
- •Jak powstają czarne dziury? 31

#### Antygrawitacja

- •Antygrawitacja 33
- Czarna dziura z otoczką antygrawitacyjną
   34
- •Proponowane doświadczenie 36

#### Sukcesy i porażki Teorii Wielkiego Wybuchu

- •Kosmologiczne rozwiązanie Friedmana 38
- •Wielki Wybuch 39
- •Paradoks fotometryczny Olbersa 40
- •Obserwacje i prawo Hubble'a 41
- •Mikrofalowe promieniowanie tła 42
- •Satelita COBE 43
- Przyspieszający Wszechświat 45

Sukcesy i porażki Teorii Wielkiego Wybuchu 47

#### Wszechświat jako czarna dziura

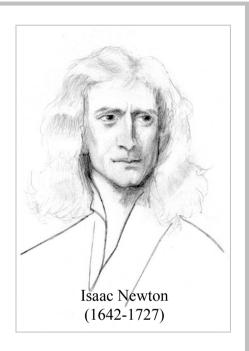
- Paradoks fotonowy 49
- Czy fotony maja pamięć? 51
- •Jak zdefiniować poczerwienienie? 53
- •Nasz Wszechświat jako czarna dziura z otoczką antygrawitacyjną 54

#### Równania

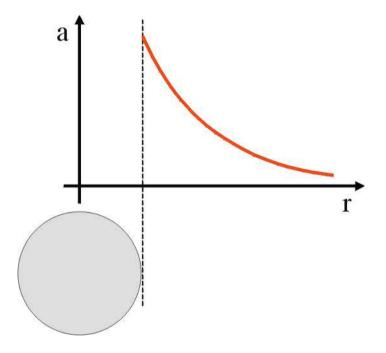
- Twórcy rachunku tensorowego 59
- •Tensor krzywizny Ricciego i symbole Christoffela 61
- •Kontrawariantny tensor metryczny 62

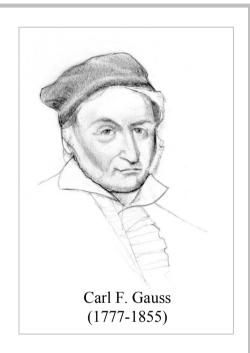
## Ojcowie grawitacji

#### Prawo grawitacji Newtona

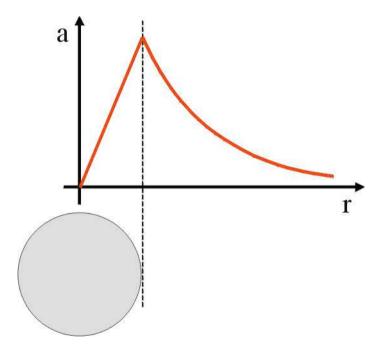


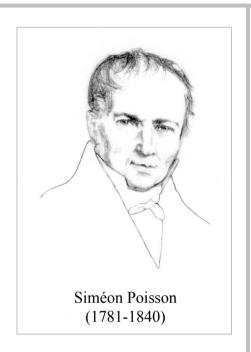
•Wartość przyspieszenia grawitacyjnego swobodnej cząstki na zewnątrz źródłowej masy, którą stanowi jednorodna kula, maleje odwrotnie do kwadratu odległości od centrum tej kuli.





•Z prawa Gaussa wynika, że wewnątrz jednorodnej kuli wartość przyspieszenia grawitacyjnego rośnie liniowo z odległością od centrum, gdzie jest równa zeru.





•W teorii Poissona pole grawitacyjne scharakteryzowane jest przez podanie w każdym punkcie przestrzeni jednej wielkości nazywanej potencjałem grawitacyjnym. Znając potencjały grawitacyjne, można wyznaczyć przyspieszenie swobodnej cząstki.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho$$

Równanie pola

$$\frac{d^2x_{\mu}}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}}$$

Równania ruchu

- •Z fizyki klasycznej wiadomo, że bezwzględna wartość przyspieszenia grawitacyjnego w centrum jednorodnej kuli o stałej gęstości jest równa zeru, wraz ze wzrostem odległości od środka rośnie liniowo, osiągając maksymalną wartości na powierzchni kuli, przy dalszym wzroście odległości maleje odwrotnie kwadratowo.
- •Aby w ramach OTW uzyskać analogiczny wynik, należy zauważyć, że stacjonarne pole grawitacyjne jest polem dwupotencjalnym.
- •W fizyce klasycznej wygodnie jest posługiwać się tylko jednym potencjałem, znikającym nieskończenie daleko od centrum źródłowej masy.

•Równanie Poissona dla potencjału wewnątrz źródłowej masy różni się od klasycznego równania Poissona tylko znakiem prawej strony, dla potencjału na zewnątrz źródłowej masy nie trzeba wprowadzać żadnej poprawki.

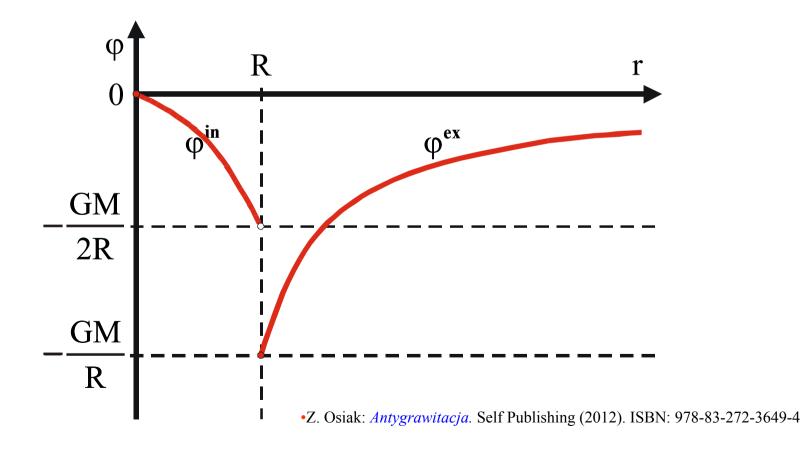
$$\begin{split} &\frac{\partial^2 \phi^{in}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{in}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^{in}}{\partial z^2} = -4\pi G \rho, \quad 0 \leq r < R, \quad \lim_{r \to 0} \phi^{in} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \phi^{ex}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{ex}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi^{ex}}{\partial z^2} = 0, \quad r \geq R, \quad \lim_{r \to \infty} \phi^{ex} = 0 \end{split}$$

$$\begin{split} & \boldsymbol{a}^{\text{in}} = \text{grad}\phi^{\text{in}} = -\,\widetilde{k}\,\text{grad}\phi^{\text{in}}\,, \quad 0 \leq r < R, \quad \lim_{r \to 0} \phi^{\text{in}} = 0 \\ & \boldsymbol{a}^{\text{ex}} = -\,\text{grad}\phi^{\text{ex}} = -\,\widetilde{k}\,\text{grad}\phi^{\text{ex}}\,, \quad r \geq R, \quad \lim_{r \to \infty} \phi^{\text{ex}} = 0 \\ & \boldsymbol{a}^{\text{in}}_r = -\frac{4}{3}\pi\,G\,\rho\,r, \quad \phi^{\text{in}} = -\frac{2}{3}\pi\,G\,\rho\,r^2, \quad \boldsymbol{a}^{\text{ex}}_r = -\frac{GM}{r^2}, \quad \phi^{\text{ex}} = -\frac{GM}{r} \\ & \widetilde{k} = \begin{cases} +1 & \text{na zewnatrz \'{z}r\'{o}dlowych mas} \\ -1 & \text{wewnatrz \'{z}r\'{o}dlowych mas} \end{cases} \end{split}$$

Na powierzchni kuli mamy

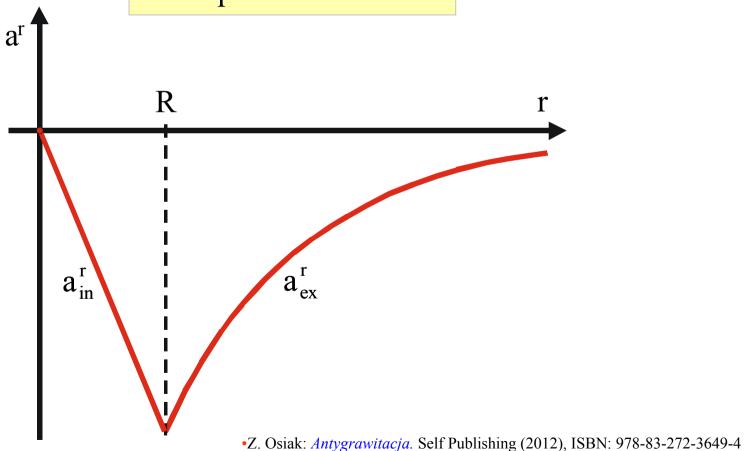
$$\phi^{in} - \phi^{ex} = \frac{GM}{2R}, \quad \mathbf{a}^{in} - \mathbf{a}^{ex} = 0$$

$$\begin{split} \phi^{in} &= -\frac{GM}{2R^3} r^2, \quad 0 \leq r < R, \quad \lim_{r \to 0} \phi^{in} = 0 \\ \phi^{ex} &= -\frac{GM}{r}, \quad r \geq R, \quad \lim_{r \to \infty} \phi^{ex} = 0 \end{split}$$



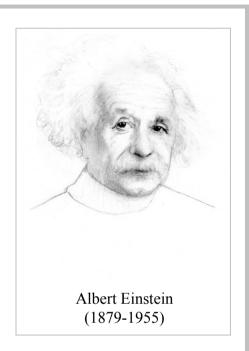
$$a_{in}^{r} = -\frac{GM}{R^{3}}r, \quad 0 \le r < R$$

$$a_{ex}^{r} - \frac{GM}{r^{2}}, \quad r \ge R$$



## Ogólna Teoria Względności

#### I powstała Ogólna Teoria Względności (OTW)



- •25 listopada 1915 na posiedzeniu Królewskiej Pruskiej Akademii Nauk Albert Einstein przedstawił pracę Równania polowe grawitacji.
- •Kończyła ona trwający osiem lat etap tworzenia Ogólnej Teorii Względności.

Postulat 1 (zasada stałości maksymalnej wartości prędkości) Maksymalna wartość prędkości rozchodzenia się sygnałów jest taka sama we wszystkich układach odniesienia.

Postulat 2 (ogólna zasada względności)

Definicje wielkości fizycznych oraz prawa (równania) fizyki można tak sformułować, aby ich ogólne postacie były niezależne od wyboru układu odniesienia.

Postulat 3 (równania metryki, równania pola grawitacyjnego) Metryka czasoprzestrzeni jest zależna od rozkładu gęstości energii wszelakiej postaci (w tym gęstości energii równoważnej masie oraz ciśnienia). Składowe tensora metrycznego są rozwiązaniami równań pola.

Postulat 4 (zasada równoważności) Masa inercyjna jest równa masie grawitacyjnej.

- •W ramach OTW pole grawitacyjne opisywane jest dziesięcioma wielkościami, będącymi składowymi tensora metrycznego, spełniającymi rolę potencjałów grawitacyjnych.
- •Pole grawitacyjne jest wynikiem deformacji czasoprzestrzeni, która zależy lokalnie od gęstości energii wszelakiej postaci. Informacje o źródłach pola grawitacyjnego zawiera tensor energii-pędu.
- •Rozwiązanie dziesięciu równań pola Einsteina, przy zadanych dziesięciu składowych tensora energii-pędu, polega na znalezieniu dziesięciu składowych tensora metrycznego spełniających te równania.

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad lub \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

$$\begin{split} &T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}, \quad R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \\ &\kappa = \frac{8\pi\,G}{c^4} = 2,073\cdot 10^{-43}\,\frac{s^2}{kg\cdot m} \\ &R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \\ &\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\Bigg(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\Bigg) \end{split}$$

$$\begin{split} &\frac{\widetilde{F}^{\alpha}}{m} = \widetilde{a}_{\text{force}}^{\alpha} \stackrel{\text{df}}{=} \left( \text{sgn ds}^2 \right) c^2 \Bigg( \frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \widetilde{k} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \Bigg) \\ &ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \neq 0, \ \left( \text{sgn ds}^2 \right) g_{\mu\nu} \leq 0 \\ &\widetilde{k} = \begin{cases} +1 & \text{na zewnątrz \acute{z}r\'odlowych mas} \\ -1 & \text{wewnątrz \acute{z}r\'odlowych mas} \end{cases} \end{split}$$

$$\frac{\widetilde{F}^{\alpha}}{m} = \widetilde{a}_{\text{force}}^{\alpha} = \widetilde{a}_{\text{total}}^{\alpha} - \widetilde{a}_{\text{grav\&iner}}^{\alpha}$$

$$\widetilde{a}_{\text{total}}^{\alpha} = \frac{\widetilde{F}^{\alpha}}{m} + \widetilde{a}_{\text{grav\&iner}}^{\alpha}$$

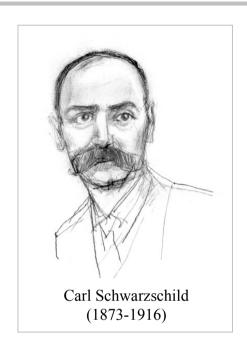
$$\widetilde{a}_{total}^{\alpha} = \frac{\widetilde{F}^{\alpha}}{m} + \widetilde{a}_{grav\&iner}^{\alpha}$$

•Składowa (odpowiadająca wskaźnikowi α) całkowitego przyspieszenia swobodnej cząstki

$$\widetilde{a}_{total}^{\alpha} = \widetilde{a}^{\alpha} = \left(sgn ds^{2}\right)c^{2} \frac{d^{2}x^{\alpha}}{ds^{2}}$$

•Suma składowych (odpowiadających wskaźnikowi α) przyspieszeń grawitacyjnego i bezwładnościowego swobodnej cząstki

$$\widetilde{a}_{\text{grav\&iner}}^{\alpha} = -\left(sgn\ ds^{2}\right)c^{2}\widetilde{k}\ \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}$$



$$R_{\mu\nu} = 0$$

$$\begin{split} ds^2 &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) d\tau^2 \\ ds^2 &= g_{rr} \, dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} \, d\phi^2 + g_{\tau\tau} d\tau^2, \quad d\tau^2 = -c^2 dt^2 \end{split}$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$
 Promień Schwarzschilda

W rozwiązaniu tym ukryte są czarne dziury.

•K. Schwarzschild: Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 1, 7 (1916) 189-196. [Gesamtsitzung vom 13. Januar 1916] O polu grawitacyjnym punktowej masy według teorii Einsteina.

## Czarne dziury

•Z podstawowych założeń ogólnej teorii względności wynika, że rozwiązanie Schwarzschilda jest fizyczne dla źródłowych mas o promieniu nie mniejszym niż połowa promienia Schwarzschilda.

$$R \ge \frac{1}{2} r_{S} = \frac{GM}{c^{2}}$$

•Mamy też:

$$M \le \frac{1}{2} R \frac{c^2}{G}$$

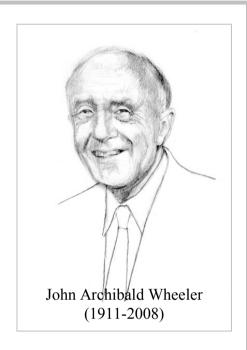
•Czarna dziura jest kulą o masie M i promieniu R, dla której

$$\frac{c^2}{G} \ge \frac{M}{R} > \frac{c^2}{2G}, \qquad 1,3466 \times 10^{27} \frac{kg}{m} \ge \frac{M}{R} > 0,6733 \times 10^{27} \frac{kg}{m}$$

•Minimalny promień przestrzenny czarnej dziury jest połową promienia Schwarzschilda.

$$R_{min} = \frac{1}{2}r_{S} = \frac{GM}{c^{2}}, \qquad M \sim R_{min}$$

•Gęstość czarnej dziury jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu jej promienia.



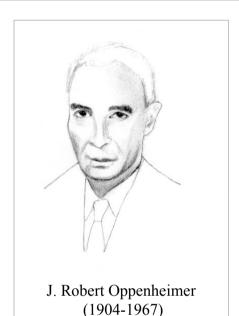
- •Nazwę czarna dziura zaproponował Wheeler (1967 wykład, 1968 artykuł).
- •Światło nie może wydostać się z wnętrza czarnych dziur i dlatego są one niewidoczne.
- •W przypadku czarnej dziury o minimalnym promieniu mamy:

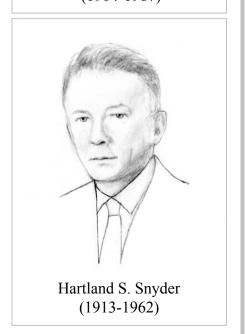
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2} = c^{2} \left(1 - \frac{r^{2}}{R^{2}}\right)$$

$$r = 0 \implies \left(\frac{dr}{dt}\right)^{2} = c^{2}$$

$$r \to R \implies \left(\frac{dr}{dt}\right)^{2} \to 0$$

	M	r	$r_{\rm S}$
Proton	$1,67 \cdot 10^{-27} \mathrm{kg}$		$2,47 \cdot 10^{-54} \mathrm{m}$
Ziemia	$6 \cdot 10^{24} \mathrm{kg}$	$6,4\cdot10^6$ m	$9 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}$
Słońce	$2 \cdot 10^{30} \mathrm{kg}$	$7 \cdot 10^8 \mathrm{m}$	$3 \cdot 10^3 \mathrm{m}$





- •J. R. Oppenheimer i H. Snyder wykazali (1939), wykorzystując równania pola Einsteina, że po wyczerpaniu się wszystkich termojądrowych źródeł energii, dostatecznie masywna gwiazda powinna ciągle się kurczyć.
- •Zjawisko to nazywane jest grawitacyjnym zapadaniem.

<sup>•</sup>J. R. Oppenheimer and H. Snyder: *On Continued Gravitational Contraction*. Physical Review 56, 5 (September 1, 1939) 455-459.

## Antygrawitacja

- •Antygrawitacja jest zjawiskiem polegającym na tym, że cząstka znajdująca się w polu grawitacyjnym nie wirującej masy źródłowej uzyskuje w pewnym obszarze przyspieszenie skierowane od centrum tej masy.
- •W przypadku wirujących mas źródłowych we wzorze na przyspieszenie pojawiają się dodatkowe dodatnie człony, których nie będziemy utożsamiali z antygrawitacją.

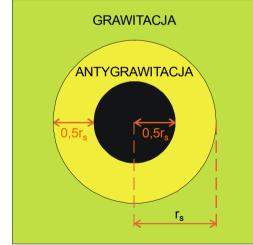
•Czarna dziura z otoczką antygrawitacyjną jest kulą o masie M i promieniu R, dla której

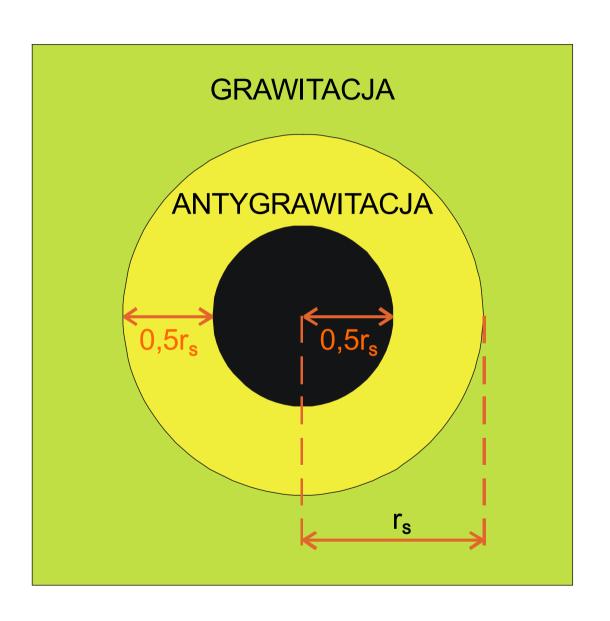
$$\frac{M}{R} = \frac{c^2}{G} \cong 1,3466 \times 10^{27} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

•Promień przestrzenny czarnej dziury z otoczką antygrawitacyjną jest połową promienia Schwarzschilda.

$$R = \frac{1}{2}r_{S}$$

•Grubości powłoki antygrawitacyjnej jest równa promieniowi przestrzennemu czarnej dziury.





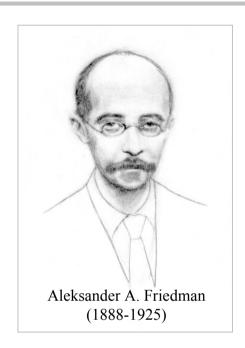
- •Jak na Ziemi wykazać istnienie czarnych dziur z otoczką antygrawitacyjną?
- •Należy zmierzyć wartość prędkości światła w pionowej rurze próżniowej tuż pod powierzchnią Ziemi i tuż nad powierzchnią Ziemi. Jeżeli różnica kwadratów tych pomiarów będzie równa kwadratowi drugiej prędkości kosmicznej, to zostanie potwierdzone istnienie czarnych dziur z otoczką antygrawitacyjną.

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{in}^{2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)_{out}^{2} = \frac{2GM}{R}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{in}^{2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)_{out}^{2} = \frac{2GM}{R} \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{in} - \left(\frac{dr}{dt}\right)_{ex} \cong \frac{GM}{cR} \cong 0,2\frac{m}{s}$$

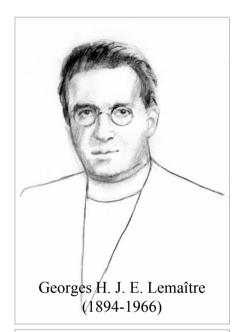
•Indeks "out" odnosi się do wartości prędkości światła tuż nad powierzchnią Ziemi, a indeks "in" – tuż pod powierzchnią Ziemi.

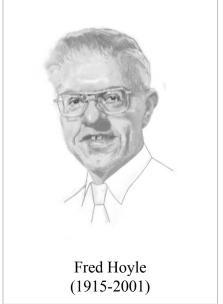
## Sukcesy i porażki Teorii Wielkiego Wybuchu



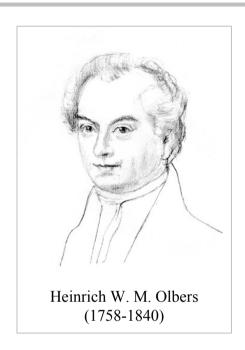
$$\begin{split} R_{\alpha\beta} &- \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R - g_{\alpha\beta} \Lambda = -\kappa \Big[ \Big( p c^{-2} + \rho \Big) \ \widetilde{v}_{\alpha} \widetilde{v}_{\beta} + g_{\alpha\beta} p \Big] \\ \widetilde{v}_{1} &= \widetilde{v}_{2} = \widetilde{v}_{3} = 0, \quad \widetilde{v}_{4} = i c \\ ds^{2} &= \left( \frac{L}{1 + \tfrac{1}{4} k r^{2}} \right)^{2} \Big[ \left( dx^{1} \right)^{2} + \left( dx^{2} \right)^{2} + \left( dx^{3} \right)^{2} \Big] + \left( dx^{4} \right)^{2} \\ r^{2} &= \left( x^{1} \right)^{2} + \left( x^{2} \right)^{2} + \left( x^{3} \right)^{2} \\ a^{2} &= k wadrat \ promienia \ krzywizny \ przestrzeni \\ k &= \frac{1}{a^{2}} \\ sgn \ k &= -1, \ 0, \ +1 \end{split}$$

- •A. A. Friedman: Über die Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik 10, 6 (1922) 377-386. O krzywiźnie przestrzeni.
- •A. A. Friedmann: Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik **21**, 5 (1924) 326-332. *O możliwości świata o stałej ujemnej krzywiźnie*.
- •Z. Osiak: Ogólna Teoria Względności. Self Publishing (2012). ISBN: 978-83-272-3515-2

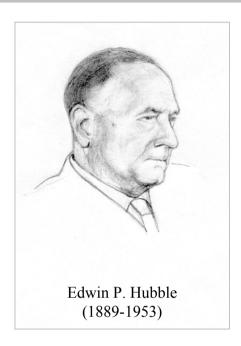




- •W modelach Friedmana pojawia się początkowa osobliwość, w której objętość Wszechświata jest równa zeru, a jego gęstość nieskończoności.
- •Pierwszą hipotezę, łączącą tę osobliwość z aktem kreacji Wszechświata, wysunął w 1931 Lemaître.
- •Żartobliwą nazwę Wielki Wybuch dla tej hipotezy zaproponował Hoyle w 1950 w jednej z prowadzonych przez niego pogadanek radiowych.
- •Hoyle jest twórcą Teorii Stanu Stacjonarnego, którą można nazwać teorią ciągle zachodzących Mikro Wybuchów.
- •G. E. Lemaître: *The Begining of the World: from the Point of View of Quantum Theory*. Nature **127**, 3210 (May 9. 1931) 706. *Początek świata: z punktu widzenia teorii kwantowej*.
- •F. Hoyle: *A New Model for Expanding Universe*. Montly Notices of the Royal Astronomical Society **108** (1948) 372-382. *Nowy model rozszerzającego się Wszechświata*.



- •W czasach kiedy żył Olbers (1758-1840) uważano, że Wszechświat jest statyczny, jednorodny i nieskończony w czasie i przestrzeni, dlatego uznał on ciemność nieba nocą za paradoks (1826).
- •Według Teorii Wielkiego Wybuchu niebo w nocy jest ciemne, ponieważ wiek Wszechświata jest skończony i światło z odległych gwiazd jeszcze nie zdążyło dotrzeć do nas, a ponadto jego widmo jest przesunięte ku czerwieni.



- •W 1929, czyli cztery lata po śmierci Friedmana, Edwin Powell Hubble oznajmił światu o swoim odkryciu:
- •Galaktyki oddalają się z prędkością radialną proporcjonalną do ich odległości od obserwatora.

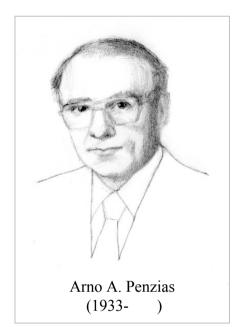
$$z = \frac{\lambda_{observed}}{\lambda_{emitted}} - 1 = poczerwienienie$$

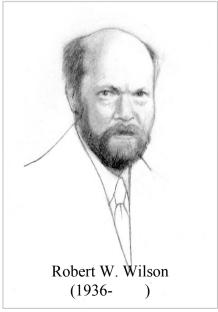
$$z = \frac{H}{c}x \quad obserwacje \ Hubble'a$$

$$z = \frac{v}{c} \quad nierelatywistyczne \ prawo \ Dopplera$$

$$v = Hx \quad prawo \ Hubble'a, \quad H \approx 2,27 \cdot 10^{-18} \, s^{-1}$$

•E. P. Hubble: *A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-galactic Nebulae*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15** (1929) 168-173. *Związek między odległością i prędkością radialną mgławic pozagalaktycznych*.





- •W 1965 Penzias i Wilson odkryli, że:
- •Cały wszechświat wypełniony jest izotropowym promieniowaniem elektromagnetycznym w zakresie mikrofalowym, odpowiadającym temperaturze 3,5 stopni Kelvina, nazwanym promieniowaniem tła lub promieniowaniem reliktowym.
- •W 1978 otrzymali za to obaj Nagrodę Nobla z fizyki.
- •Według zwolenników Teorii Wielkiego Wybuchu promieniowanie reliktowe jest pozostałością po początkowym akcie kreacji Wszechświata.
- •A. A. Penzias and R. W. Wilson: *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 MHz*. Astrophysical Journal **142** (1965) 419-421. *Pomiar nadwyżki temperatury anteny przy 4080 MHz*.

- •W 1976 NASA powołała dwa zespoły badawcze w celu dokonania pomiarów kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła przyrządami umieszczonymi na satelicie COBE. Na czele tych zespołów stanęli George F. Smoot oraz John C. Mather.
- •Cosmic Background Explorer został wystrzelony 18 listopada 1989. Wstępne wyniki pomiarów, wykonanych przez aparaturę Badacza Tła Kosmicznego, znane już były dwa miesiące później. Okazało się, że widmo kosmicznego promieniowania tła pokrywa się niemal idealnie z widmem ciała doskonale czarnego o temperaturze 2,735 K z błędem 0,06 K.
- •Według innych danych z lat 1991/1992 pochodzących z COBE w naszej galaktyce występuje efekt kwadrupolowy, a w przestrzennym rozkładzie temperatury promieniowania tła istnieją znikome fluktuacje.

John C. Mather (1946- )

•Mather i Smoot otrzymali w 2006 Nagrodę Nobla z fizyki

"za odkrycie, że kosmiczne mikrofalowe promieniowanie tła charakteryzuje się widmem ciała doskonale czarnego oraz anizotropią".

•Grupa COBE: J. C. Mather i współpracownicy:

A Preliminary Measurements of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite. Astrophysical Journal Letters **354** (May 10, 1990) L37-L40. Wstępne pomiary spektrum kosmicznego mikrofalowego tła uzyskane przez satelitę COBE.

•Grupa COBE: G. F. Smoot i współpracownicy:

First results of the COBE satellite measurement of the anisotropy of the cosmic microwave background radiation.

Advances in Space Research 11, 2 (1991) 193-205.

Pierwsze wyniki pomiaru anizotropii kosmicznego mikrofalowego promieniowania tła uzyskane przez satelitę COBE.

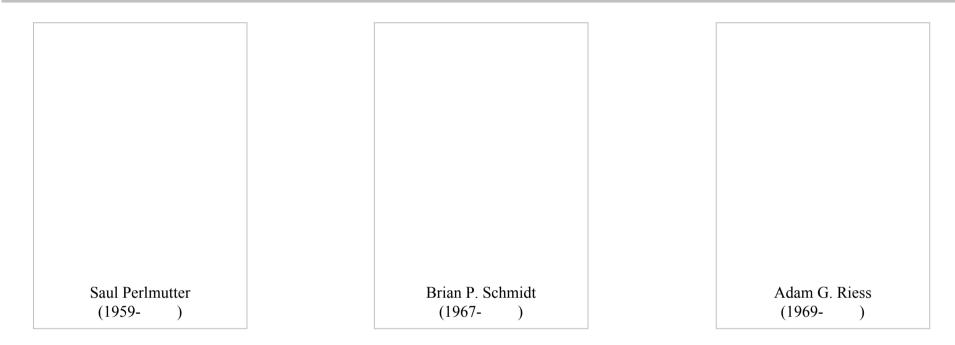
•Grupa COBE: G. F. Smoot i współpracownicy: Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. Astrophysical Journal **396**, 1 (Sept. 1, 1992) L1-L5.

George.F. Smoot (1945-)

- •W 1998 Saul Perlmutter oraz niezależnie Brian P. Schmidt i Adam G. Riess odkryli gwałtowny wzrost poczerwienienia światła docierającego do Ziemi z bardzo odległych źródeł.
- •Ponieważ uczeni ci są zwolennikami Teorii Wielkiego Wybuchu opartej o kosmologiczne rozwiązanie Friedmana, zinterpretowali swoje obserwacje jako gwałtowny wzrost szybkości ekspansji Wszechświata, który nastąpił około 5 mld lat temu.

<sup>•</sup>Saul Perlmutter et al.: *Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe*. Nature **391** (01 January 1998) 51-54.

<sup>•</sup>Adam G. Riess et al.: *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant.* The Astronomical Journal **116**, 3 (09/1998) 1009-1038.



Perlmutter, Schmidt i Riess otrzymali w 2011 Nagrodę Nobla z fizyki "za odkrycie przyspieszającej ekspansji Wszechświata na podstawie obserwacji odległych supernowych".

- •Teoria Wielkiego Wybuchu bazująca na rozwiązaniu kosmologicznym Friedmana uporała się z paradoksem fotometrycznym Olbersa, obserwacjami i prawem Hubble'a oraz mikrofalowym promieniowaniem tła.
- •Rozwiązanie problemów płaskości i horyzontu wymagało zastosowania "protezy intelektualnej" o inflacyjnej fazie kreacji Wszechświata.
- •Teoria Wielkiego Wybuchu "poległa" przy próbie interpretacji gwałtownego wzrostu szybkości ekspansji Wszechświata. Ratunek w postaci postulatu o istnieniu ciemnej energii jest kolejną "protezą intelektualną".
- •Sformułowany przeze mnie paradoks fotonowy oraz próba jego wyjaśnienia sprawiają, że rozwiązanie Friedmana nie może być podstawą realnego modelu kosmologicznego.

## Wszechświat jako czarna dziura

- •Teoria względności zarówno szczególna jak i ogólna jest ściśle związana z falową teorią światła (fal elektromagnetycznych). Próba wyjaśnienia grawitacyjnego przesunięcia ku czerwieni na gruncie fotonowej teorii światła w czasoprzestrzeniach innych niż konforemnie płaskich prowadzi do paradoksu.
- •W pozostałych czasoprzestrzeniach jednym z rozwiązań paradoksu fotonowego jest założenie, że energia fotonu zależy od punktu czasoprzestrzeni, w którym nastąpiła jego emisja i pozostaje stała podczas wędrówki fotonu.
- •Oznacza to, że fotony mają pamięć, lub bardziej uczenie energia fotonu jest niezmiennikiem. Przy czym, w silniejszym polu grawitacyjnym dane źródło powinno wysyłać fotony o mniejszej energii niż to samo źródło znajdujące się w słabszym polu.

•Pojęcie fotonu w kontekście metryk Schwarzschilda oraz Friedmana prowadzi do paradoksu. Obliczając wpływ każdej z tych metryk na energię fotonu ze wzoru

$$E = \frac{h}{T}$$

lub równoważnego

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

otrzymujemy różne wyniki w zależności od użytego wzoru, ponieważ w tych czasoprzestrzeniach okres i długość fali elektromagnetycznej modelowanej fotonowo zachowują się różnie względem siebie.

#### Powszechnie panujący pogląd

- •Energia fotonu, emitowanego przez dane źródło, nie zależy od miejsca emisji.
- •Foton, wchodząc w obszar słabszego pola grawitacyjnego, zmniejsza swoją energię.

#### Hipoteza

- •Energia fotonu emitowanego w silniejszym polu grawitacyjnym jest mniejsza niż w słabszym.
- •Foton, poruszając się w polu grawitacyjnym, nie zmienia swojej energii. Fotony mają "pamięć", ponieważ pamiętają w którym punkcie czasoprzestrzeni powstały.

$$E = \frac{E_{max}}{\sqrt{|g_{11}|}} = const$$

•Z. Osiak: Antygrawitacja. Self Publishing (2012). ISBN: 978-83-272-3649-4

$$E = \frac{E_{\text{max}}}{\sqrt{|g_{11}|}} = \text{const}$$



energia fotonu emitowanego w czasoprzestrzeni niezdeformowanej

g<sub>11</sub> składowa tensora metrycznego w punkcie emisji fotonu

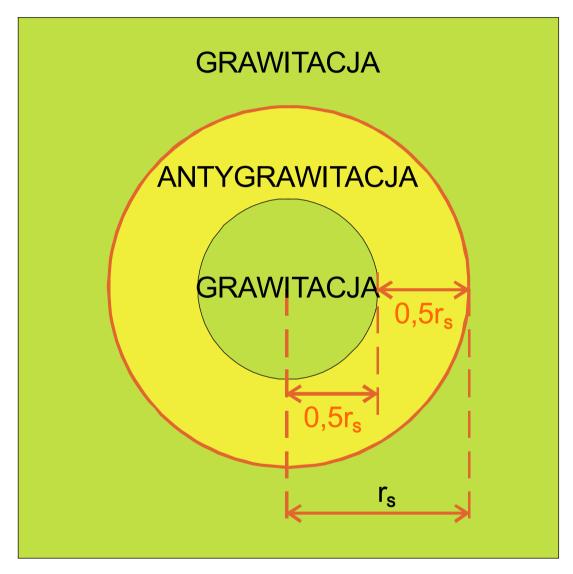
$$z^* = \frac{E_{lab} - E_{out}}{E_{out}} = \frac{E_{lab}}{E_{out}} - 1$$

$$E_{lab} = \frac{E_{max}}{\sqrt{g_{11}^{lab}}}$$

$$E_{out} = \frac{E_{max}}{\sqrt{g_{11}^{out}}}$$

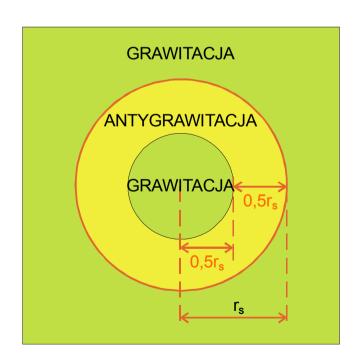
$$z^* = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}^{lab}}} - 1$$

E<sub>max</sub> energia fotonu emitowanego w nieobecności pola grawitacyjnego



•Z. Osiak: Antygrawitacja. Self Publishing (2012). ISBN: 978-83-272-3649-4

- •Nasz Wszechświat można potraktować jako olbrzymią jednorodną Czarną Dziurę. Izoluje go od reszty Wszechświata obszar przestrzeni, w którym występuje antygrawitacja.
- •Nasza Galaktyka wraz układem słonecznym oraz Ziemią, które w skali rozmiarów kosmologicznych można uważać zaledwie jako punkt, powinny znajdować się w pobliżu centrum Czarnej Dziury.



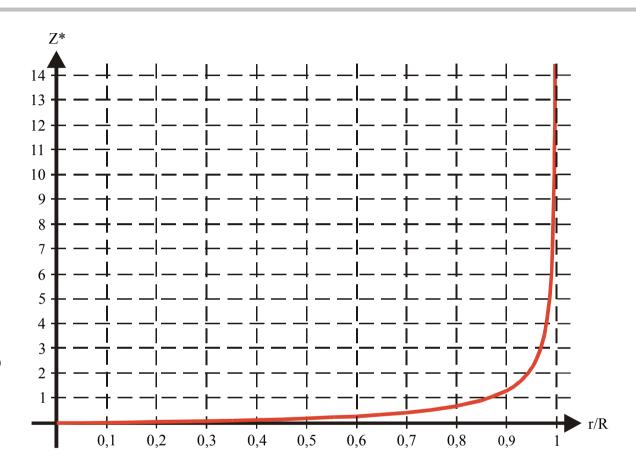
•Z. Osiak: *Antygrawitacja*. Self Publishing (2012). ISBN: 978-83-272-3649-4

- •Promień Naszego Wszechświata wynosi 6,31 mld lat świetlnych.
- •Dla H = 75 km/s Mpc gęstość Wszechświata w tym modelu jest ponad 17 razy większa niż w modelu Wszechświata Friedmana i wynosi prawie 51 protonów na metr sześcienny. Nasz model nie wymaga przyjęcia założenia o istnieniu ciemnej energii.
- W odległości od środka Ziemi w przybliżeniu równej 236000 lat świetlnych poczerwienie mierzone względem naszej planety zmienia znak z ujemnego na dodatni.
- •Światło docierające do Ziemi z Naszej Galaktyki, której promień wynosi około 50000 lat świetlnych a grubość około 12000 lat świetlnych, powinno być przesunięte ku fioletowi względem światła emitowanego na powierzchni Ziemi. Przy czym ujemna wartość poczerwienienia powinna być zależna od kierunku obserwacji.

$$z^* = \frac{E_{lab}}{E_{out}} - 1$$

$$z^* \approx \frac{\sqrt{1 - 1, 4 \cdot 10^{-9}}}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} - 1$$

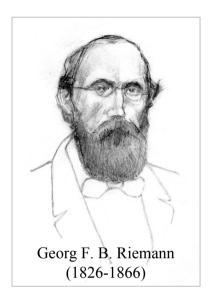
- •E energia fotonu
- •R promień Naszego Wszechświata

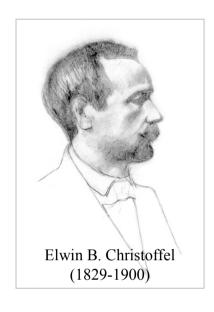


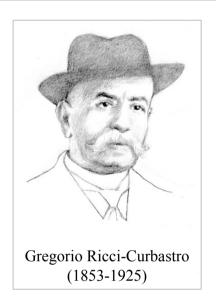
•Wykres zależności poczerwienienia z\* od odległości r źródła od centrum Naszego Wszechświata (Uwaga: z\* przyjmuje wartości ujemne dla stosunku r/R w przybliżeniu mniejszego niż 3,74·10<sup>-5</sup>.)

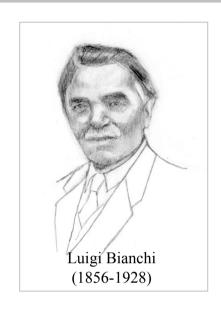
## Równania

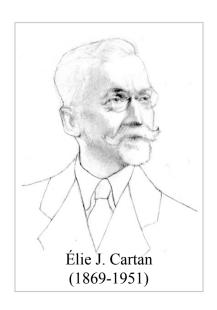
#### Twórcy rachunku tensorowego



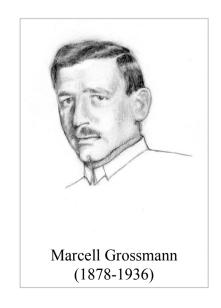


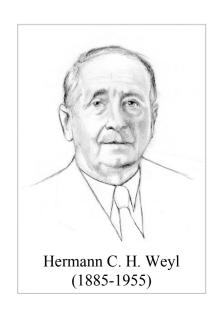












#### Twórcy rachunku tensorowego

- •G. F. Riemann: Über die Hyphothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Wykład habilitacyjny wygłoszony 10 czerwca 1854 roku w Getyndze. O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii.
- •B. Riemann: Über die Hyphothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Mitgetheilt durch R. Dedekind) Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen 13 (1868) 133-152.
- •E. B. Christoffel: Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journal für die reine und angewandte Mathematik [Crelle's Journal] **70** (1869) 46-70.

  O przekształceniach jednorodnych form różniczkowych drugiego stopnia.
- •G. Ricii et T. Levi-Civita: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*. Mathematische Annalen **54** (1901) 125-201. [Padoue, Décembre 1899.] *Metody absolutnego rachunku różniczkowego i ich zastosowania*.
- •L. Bianchi: *Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann*. Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti, **11** (1902) 3-7. Znajdują się tu słynne tożsamości Bianchi[ego].
- •E. J. Cartan: Sur une généralisation de la notion de courboure de Riemann et les espaces à torsion. Comptes Rendus [hebdomadaires des séances] de l'Académie des sciences, Paris 174 (1922) 593-595. [Séance du lundi 27 février 1922.]
- •A. Einstein, M. Grossmann: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Zeitschrift für Mathematik und Physik **62**, 3 (1913) 225-261. *Zarys uogólnionej teorii wzgledności i teorii grawitacji*.
- •T. Levi-Civita: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **42** (1917) 173-205. [Adunanza del 24 dicembre 1916.]
- •Hermann Weyl: *Reine Infinitesimalgeometrie*. Mathematische Zeitschrift 2 (1918) 384-411. [Strona 404]

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}, \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \Biggl( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Biggr) = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha} \left[ \begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{smallmatrix} \right], \quad \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}, \quad \left[ \begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \Biggl( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \Biggr)$$

$$\begin{split} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \Bigg[ \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}} + g^{\alpha\sigma} \frac{\partial^{2}g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} - g^{\alpha\sigma} \frac{\partial^{2}g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} + \\ &- \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - g^{\alpha\sigma} \frac{\partial^{2}g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + g^{\alpha\sigma} \frac{\partial^{2}g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\alpha}} \Bigg] + \\ &+ \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{1}{4} g^{\beta\sigma} \Bigg( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\lambda}} \Bigg) + \\ &- \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \Bigg) g^{\alpha\lambda} \Bigg( \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \Bigg) + \\ &- \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\alpha}$$

$$g^{\mu\nu} = g^{-1}\Delta^{\mu\nu}, \quad \Delta^{\mu\nu} = \left(-1\right)^{\mu+\nu}M^{\mu\nu}$$

$$\begin{split} g^{11} &= g^{-1} \Big( g_{22} g_{33} g_{44} + g_{23} g_{24} g_{34} + g_{23} g_{24} g_{34} - g_{24} g_{24} g_{33} - g_{22} g_{34} g_{34} - g_{23} g_{23} g_{24} \Big) \\ g^{22} &= g^{-1} \Big( g_{11} g_{33} g_{44} + g_{13} g_{14} g_{34} + g_{13} g_{14} g_{34} - g_{14} g_{14} g_{33} - g_{11} g_{34} g_{34} - g_{13} g_{13} g_{44} \Big) \\ g^{33} &= g^{-1} \Big( g_{11} g_{22} g_{44} + g_{12} g_{14} g_{24} + g_{12} g_{14} g_{24} - g_{14} g_{14} g_{22} - g_{11} g_{24} g_{24} - g_{12} g_{12} g_{44} \Big) \\ g^{44} &= g^{-1} \Big( g_{11} g_{22} g_{33} + g_{12} g_{13} g_{23} + g_{12} g_{13} g_{23} - g_{13} g_{13} g_{22} - g_{11} g_{13} g_{23} - g_{12} g_{12} g_{33} \Big) \\ g^{12} &= g^{-1} \Big( g_{14} g_{24} g_{33} + g_{12} g_{34} g_{34} + g_{13} g_{23} g_{44} - g_{12} g_{33} g_{44} + g_{14} g_{23} g_{34} + g_{13} g_{24} g_{34} \Big) \\ g^{13} &= g^{-1} \Big( g_{12} g_{23} g_{44} + g_{14} g_{22} g_{34} + g_{13} g_{24} g_{24} - g_{14} g_{23} g_{24} - g_{12} g_{24} g_{34} - g_{13} g_{22} g_{44} \Big) \\ g^{14} &= g^{-1} \Big( g_{14} g_{23} g_{23} + g_{12} g_{24} g_{33} + g_{13} g_{22} g_{34} - g_{12} g_{23} g_{34} - g_{13} g_{22} g_{34} - g_{13} g_{23} g_{24} \Big) \\ g^{23} &= g^{-1} \Big( g_{11} g_{23} g_{44} + g_{12} g_{14} g_{34} + g_{13} g_{14} g_{24} - g_{11} g_{23} g_{44} - g_{12} g_{14} g_{34} - g_{13} g_{13} g_{22} \Big) \\ g^{23} &= g^{-1} \Big( g_{11} g_{23} g_{34} + g_{12} g_{14} g_{34} + g_{13} g_{14} g_{24} - g_{11} g_{23} g_{44} - g_{12} g_{14} g_{34} - g_{13} g_{14} g_{24} \Big) \\ g^{24} &= g^{-1} \Big( g_{11} g_{23} g_{34} + g_{12} g_{14} g_{33} + g_{13} g_{13} g_{24} - g_{11} g_{23} g_{34} - g_{11} g_{24} g_{33} - g_{12} g_{13} g_{34} \Big) \\ g^{34} &= g^{-1} \Big( g_{13} g_{14} g_{22} + g_{11} g_{23} g_{24} + g_{12} g_{12} g_{34} - g_{11} g_{22} g_{34} - g_{12} g_{14} g_{23} - g_{12} g_{13} g_{24} \Big) \\ g^{34} &= g^{-1} \Big( g_{13} g_{14} g_{22} + g_{11} g_{23} g_{24} + g_{12} g_{12} g_{34} - g_{11} g_{22} g_{34} - g_{12} g_{14} g_{23} - g_{12} g_{13} g_{24} \Big) \\ g^{34} &= g^{-1} \Big( g_{13} g_{14} g_{22} + g_{11} g_{23} g_{24} + g_{12} g_{12} g_{34} - g_{11} g_{22} g_{34}$$

$$\begin{split} g &= g_{11} \Big( g_{22} g_{33} g_{44} + g_{23} g_{24} g_{34} + g_{23} g_{24} g_{34} - g_{24} g_{24} g_{33} - g_{22} g_{34} g_{34} - g_{23} g_{23} g_{44} \Big) + \\ &+ g_{12} \Big( g_{14} g_{24} g_{33} + g_{12} g_{34} g_{34} + g_{13} g_{23} g_{44} - g_{12} g_{33} g_{44} - g_{14} g_{23} g_{34} - g_{13} g_{24} g_{34} \Big) + \\ &+ g_{13} \Big( g_{12} g_{23} g_{44} + g_{14} g_{22} g_{34} + g_{13} g_{24} g_{24} - g_{14} g_{23} g_{24} - g_{12} g_{24} g_{34} - g_{13} g_{22} g_{44} \Big) + \\ &+ g_{14} \Big( g_{14} g_{23} g_{23} + g_{12} g_{24} g_{33} + g_{13} g_{22} g_{34} - g_{12} g_{23} g_{34} - g_{14} g_{22} g_{33} - g_{13} g_{23} g_{24} \Big) \end{split}$$

# Teoria Względności



**Czarne Dziury**