

FWT-теорема.

Джон Конвей, Саймон Коэн

Аннотация.

На основе трёх физических аксиом мы докажем, что, если выбор экспериментатором условий эксперимента с 1-спиновыми частицами не является функцией предыдущей информации, доступной ему, тогда и результат эксперимента не является функцией информации доступной частице. Мы покажем, что этот результат надёжен и докажем, что ни теории скрытых переменных, ни механизмы коллапсов GRW-типов для волновых функций не могут быть релятивизированы. Мы представим наши аксиомы и обсудим их философские последствия

1. Введение

Действительно ли мы обладаем свободой выбора как определённым человеческим качеством или это всего лишь иллюзия? Мы не знаем этого, но представим доказательства того, что, если действительно какой-либо экспериментатор обладает толикой свободного выбора условий эксперимента, то и элементарные частицы должны обладать собственной долей этого качества — свободой реализации.

"Я видел, как вы поймали рыбку!" — сказал простак рыболову, который использовал наживку, чтобы поймать окуня. Наша реакция *по сути* на форму такой реплики в аналогичной ситуации с квантовыми частицами была бы такой: мы используем только мизерный объём человеческого влияния на возможность свободы реализации и не только изнутри самих частиц, но и со стороны всей Вселенной.

Здесь, чтобы быть более точными, мы должны сказать, что "отклики" частиц на определённые типы экспериментов не определяются всей предыдущей историей, доступной для них от части Вселенной^{*}. Свобода же возможности для экспериментатора как мы предполагаем — состоит в том, что экспериментатор может свободно выбрать любой из небольшого числа наблюдений. Здесь же мы представляем физические допущения в виде трёх простых аксиом.

Тот факт, что не всегда имеется возможность давать предсказание результатов будущих экспериментов, зачастую представляется как недостаток расширенных теорий квантовой механики. Однако, даже, если наши физические аксиомы приблизительно верны, предположения свободного выбора экспериментаторами и свободной реализации результатов эксперимента, влечёт сильный вывод о том, что никакая теория, будь то расширенная или нерасширенная квантовая механика, не сможет точно предсказывать результаты будущих спиновых экспериментов. Становится также ясным, что неспособность предсказывать — это новое качество, а не дефект, поскольку эти результаты включают свободную возможность проявления, которая ещё не реализовалась во Вселенной.

Наш результат в этом направлении не нов и способствует пониманию результатов известного парадокса ЭПР с учётом феномена запутывания, а так же других "no-go"-теорем, включаемых в наиболее правдоподобные теории скрытых переменных, что рассматривалось в различных формах Беллом, Коэном, Спекером. Наша же теорема, как нам кажется, даёт более сильный и убедительный результат такого типа и, в частности, утверждает, что не существует релятивистски инвариантного механизма GRW-типа (см. раздел 10), описывающего коллапс волновой функции.

Физиков, которые считают, что уже постигли наш главный результат, необходимо предостеречь, что он не может быть получен с использованием только таких символов как $\langle |, | \rangle, \psi, \otimes$, поскольку предполагает более широкий физический контекст.

^{*} Более точно — от окружения (окрестности) частицы.

1.1 Формулировка теоремы. В первую очередь представим наши аксиомы.

Существуют "частицы со спином 1", над которыми можно выполнять операции под названием "измерение квадрата спина в направлении w ", что всегда даёт в результате одно из значений 0 или 1.

Мы будем писать $w \rightarrow i$ ($i = 0$ или 1), чтобы показать результат такой операции. Измерения по трём взаимно перпендикулярным направлениям x, y, z будем называть *спиновым 3-экспериментом для фрейма* (x, y, z) ^{*)}, ¹⁾

SPIN-аксиома

спиновый 3-эксперимент для фрейма (x, y, z) всегда воспроизводит результаты 1,0,1 в некотором порядке.

Мы будем записывать это как $x \rightarrow j, y \rightarrow k, z \rightarrow l$, где j, k, l имеют значения 0 или 1, а $j + k + l = 2$.

Можно производить эксперимент над двумя пространственно разделёнными 1-спиновыми частицами-двойниками, подразумевая, что они дают одинаковые результаты ^{*)}, ¹⁾. Симметричная форма TWIN-аксиомы говорит, что если тройка x, y, z измеряется для каждой частицы, возможно в другом порядке, тогда результаты двух частиц в экспериментах в индивидуальных направлениях должны быть теми же самыми. Например, если измерения в порядке x, y, z для одной частицы дали $x \rightarrow 1, y \rightarrow 0, z \rightarrow 1$, тогда измерения в порядке y, z, x для второй частицы дало бы $y \rightarrow 0, z \rightarrow 1, x \rightarrow 1$ ^{**)}. Хотя мы могли бы использовать и симметричную форму для доказательства теоремы, усечённая форма достаточна и сделает аргументацию более прозрачной:

TWIN-аксиома

Для двух 1-спиновых частиц-двойников, если первый экспериментатор А выполняет 3-спиновый эксперимент над фреймом (x, y, z) и получает результат $x \rightarrow j, y \rightarrow k, z \rightarrow l$, то второй экспериментатор, так же выполняя 1-спиновый эксперимент в направлении w получит результат $w \rightarrow j, k$ или l , соответственно, если w совпадает с одним из направлений x, y, z .

FIN-аксиома

Существует конечный верхний предел скорости, с которой может передаваться информация.

Это хорошо известное следствие теории относительности, связанное с не превышением распространения взаимодействий скорости распространения света. Мы обсудим понятие "информации" в Разделе 3, а также выясним точный смысл, который должны придать понятию "эффективность" в Разделе 6, что относится к любой физической передаче.

FIN не является экспериментально проверяемой аксиомой непосредственно, даже в принципе (в отличие от SPIN и TWIN ³⁾). Её реальное обоснование следует из теории относительности и из того, что мы называем "эффективной причинностью", следующей из того факта, что последствия не могут предшествовать причинам их возникновения.

Заметим, что мы добились некоторой идеализации в представленных аксиомах и будем по умолчанию использовать их в первоначальных вариантах доказательств. Например, предположим, что спиновое состояние в экспериментах может приниматься мгновенно и в точном направлении. В последующих разделах мы покажем как заменить оба предположения в доказательствах более реалистичными, учитывающими как приблизительный характер описания реальных экспериментов, так и их конечную продолжительность.

.....
*) Надстрочные цифры указывают на соответствующие номера примечаний в конце статьи.

***) Для простоты, мы говорим об измерений фрейма в порядке x, y, z , но на доказательство не повлияет, если они измеряются одновременно, как в "спин-гамильтоновом" эксперименте ¹⁾.

Для простоты рассуждений, в качестве предела скорости распространения информации, мы будем предполагать конечную скорость распространения света и использовать привычную терминологию для прошлого и будущего, связанную со световыми конусами и т. д. Чтобы приблизиться к реальности, мы будем представлять, что экспериментатор А находится на Земле, экспериментатор В – на Марсе как минимум на расстоянии 5 световых минут. Итак, мы готовы приступить к рассмотрению теоремы.

Free Will-предположение

Если выбор направлений, в которых выполняется 1-спиновый эксперимент, не является функцией информации доступной экспериментаторам, тогда и отклики частиц также не являются функциями информации доступной им.

Почему мы называем это Free Will-предположением? Обычным делом является молчаливое предположение о том, что экспериментаторы имеют достаточную свободу для выбора параметров своей аппаратуры, что никак не определяются прошлой историей. Мы делаем это предположение явным именно потому, что наша теорема выводит более удивительный факт о том, что отклики частиц как свободная реализация своих значений, так же не определяются прошлой историей.

Таким образом, теорема утверждает, что если экспериментаторы обладают способностью свободы выбора, тогда 1-спиновая частица "наследует" точно такое же свойство, формулируемое как *свобода реализации частицей значений своих параметров*. Поскольку обозначение этого свойства экспериментатора связано с использованием многозначного термина "will", мы находим целесообразным использовать тот же термин и в отношении частиц *).

Отметим, что Free Will-предположение (FW-предположение **) о том, что *выбор экспериментаторами направлений не есть функция информации доступной для них*, позволяет нам "вывести" теорему, ссылаясь на сам мир, а не только на некоторые теории мира. Однако, в разделе 2.1 мы воспроизведём модифицированную версию, которая опровергает некоторые типы теории без использования FW-предположения.

Одним из способов блокировки "no-go"-теорем предложенных в теориях скрытых переменных является введение "контекстуальности", где результат эксперимента зависел бы от скрытых параметров аппаратуры. Для 3-спинового эксперимента контекстуальность позволяет спинам частиц в z направлении (скажем) зависеть от фрейма (x, y, z) . Однако, поскольку прошлая история частицы включает все взаимодействия с аппаратурой, FWT-теорема закрывает эту лазейку.

2. Доказательство

Перейдем, наконец, к доказательствам. Для начала мы должны избавиться от наивного предположения о том, что *квадрат спина $\theta(w)$ в направлении w уже существует до измерения*. Если бы это было так, то функция θ должна бы существовать на единичной сфере направлений и иметь свойства:

(i) на каждой ортогональной тройке она принимает значения 1,0,1 в некотором порядке. Это влечёт за собой ещё два свойства:

(ii) не может быть $\theta(x) = \theta(y) = 0$ для двух ортогональных направлений x и y ;

(iii) для любой пары противоположных направлений w и $-w$, то есть $\theta(w) = \theta(-w)$; следовательно, θ реально определена на " \pm -направлениях".

*) Подчеркнём ещё раз: именно многозначность английского слова "will" и наделение его статусом физического термина обуславливает необходимость придать ему значение "возможность", отражающему важное свойство недетерминированности результата. Тогда в отношении экспериментатора (как активного члена процесса) этот смысл выражается фразой: свобода выбора экспериментатором условий проведения эксперимента, а для частицы, как некоего проявляющегося её свойства - свободой реализации своих свойств. Общее здесь - это проявление характера недетерминированности. *Здесь и далее примечания редактора отмечаются цветом.*

**) FW - от английского Free Will. FW-реализация (способность): а) - свободный выбор условий эксперимента для экспериментатора; б) - спонтанная реализация значения параметра для квантовой частицы.

Будем называть функцию на множестве направлений, которая имеет все три этих свойства – “101-функцией”. Однако, вышеуказанные наивное предположение опровергает парадокс Коэна-Спекера для 33-направлений в конфигурации Переса, а именно:

Лемма: не существует 101-функции на ± 33 направлениях рисунка 1.

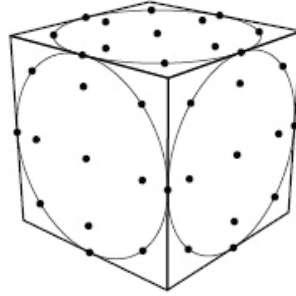


Рис. 1. Линии по ± 33 направлениям определяются как линии, проходящие через центр куба и

9 внутренним точкам на каждой из 6 граней ($9 \cdot 6 = 54$);

12 точкам 4 троек рёбер куба ($4 \cdot 3 = 12$), лежащих на окружностях.

Всего линий $54 + 12 = 66$ или ± 33 направления.

Поскольку эта чисто геометрическая комбинаторная головоломка не имеет решения, при первом чтении можно принять её на веру. Однако мы даём её короткое доказательство в примечании ⁴⁾.

Вывод FWT-теоремы

Пусть экспериментаторы А и В, выполняют пару экспериментов, описанных в TWIN-аксиоме, на пространственно разделённых частицах a и b . Утверждается, что отклики a и b не могут являться функциями всей доступной для них информации.

Предположим противное (*функциональная гипотеза*): откликом частицы a является функция $\theta_a(\alpha)$ доступной для неё информации.

В первую очередь мы должны предположить, что эта информация определяется тройной x, y, z вместе с информацией α' , которая доступна перед выбором тройки и потому независима от x, y, z . Это можно выразить как функцию

$$\theta_a(x, y, z; \alpha') = \{x \rightarrow j, y \rightarrow k, z \rightarrow l\}^*$$

Мы уточним эту запись, чтобы выделить какой-либо один из трех смежных ответов на общий вопрос подходящей меткой на один из них x, y, z , то есть

$$\begin{aligned}\theta_a(x?, y, z; \alpha') &= j \\ \theta_a(x, y?, z; \alpha') &= k \\ \theta_a(x, y, z?; \alpha') &= l\end{aligned}$$

Аналогично для функции ответов b имеем

$$\theta_b(w; \beta') = \{w \rightarrow m\}$$

для направления w и информации β' доступной b перед выбором w и опять запишем в альтернативном виде

$$\theta_b(w?; \beta') = m.$$

TWIN-аксиома принимает вид:

$$\theta_b(w?; \beta') = \begin{cases} \theta_a(x?, y, z; \alpha') & \text{if } w = x \\ \theta_a(x, y?, z; \alpha') & \text{if } w = y \\ \theta_a(x, y, z?; \alpha') & \text{if } w = z \end{cases} (*)$$

FW-предположение предполагает, что для каждого направления w и тройки ортогональных направлений, выбранных из ± 33 -множества, существуют значения α' и β' , для которых определена функция (*), поскольку это подразумевает, что экспериментаторы могут свободно выбрать x, y, z и w для выполнения спиновых 1-экспериментов.

⁴⁾Здесь и далее мы используем фиксированный символ θ_a для этой функции, несмотря на изменения ее переменных (здесь от a к $x, y, z; \alpha'$).

Мы определили α' так, чтобы оно было независимым от x, y, z и от w , поскольку существуют координатные фреймы, в которых В-эксперимент случается позже, чем А-эксперимент. Аналогично, β' - независима от x, y, z , а также и от w .

Фиксируем α' и β' , определяем

$$\theta_0(w) = \theta_b(w; \beta')$$

и находим

$$\theta_a(x?, y, z; \alpha') = \theta_0(x)$$

$$\theta_a(x, y?, z; \alpha') = \theta_0(y)$$

$$\theta_a(x, y, z?; \alpha') = \theta_0(z).$$

Таким образом, θ_0 – это 101-функция, определённая на ± 33 направлениях, что противоречит Лемме. Теорема доказана при указанных предположениях.

Тем не менее, один из откликов частиц (скажем, a) мог бы зависеть от некоторых последующих информационных битов, которые становятся доступными после выбора x, y, z . Если каждый такой бит является функцией ранней информации от универсума (и x, y, z) – это на самом деле не является проблемой, как будет показано в следующем разделе.

Нам остался случай при котором часть информации используется (скажем, a) спонтанно, при этом неопределяемая какой-либо ранней информацией. В этом случае должен быть момент t_0 , после выбора x, y, z такой, что для каждого момента $t < t_0$ не найдётся доступных битов, но для каждого $t > t_0$ найдётся доступный бит.

Но в этом случае универсум уже "принял решение" в момент времени t_0 , поскольку информация об этом после t_0 есть по определению не функция информации доступной прежде t_0 ! Так что, если отклик a' действительно зависит от любого спонтанного бита, это не есть функция тройки x, y, z и состояния универсума перед выбором тройки.

Этим завершается доказательство FWT-теоремы за исключением атрибуции свободной реализации частицами, а не от универсума в целом. Мы обсудим эти и некоторые другие тонкости в последующих разделах, отметив следующий вариант.

2.1. *FWT-теорема.* Как мы уже отметили, существует модификация теоремы, которая не нуждается в FW-предположении. Физические теории со времён Декарта описывали эволюцию состояния от начального произвольного или "свободного", следуя законам, которые сами не зависели от пространства-времени. Мы называем такие теории с произвольными начальными условиями - *теориями свободного состояния*.

FWT-теорема (в предположениях SPIN, TWIN, FIN)

В рамках теории свободного состояния нельзя точно предсказать результаты двойных 1-экспериментов для произвольных троек x, y, z и векторов w . Фактически нельзя предсказать и для конечного множества случаев, использованных в доказательстве.

Это так, поскольку наше использование FW-предположения заключалось в придании функциям θ_a и θ_b определённости для троек x, y, z и вектора w из некоторой конечной коллекции и некоторых фиксированных значений α' и β' другой информации о мире. Теперь мы можем взять их в качестве заданных начальных условий. Мы увидим, что это вытекает из Free State-теоремы, что нет free state-теории, которая даёт механизм редукции и тем более теории скрытой переменной (как у Боба), которые могли бы быть релятивистски инвариантными.

3. Информация

У читателя могут возникнуть некоторые вопросы. В первую очередь, это относится к правомерности дробить информацию так, как это делалось при доказательстве. Чтобы обосновать это, будем использовать стандартную терминологию теории информации, определив истинность для каждого свойства универсума ⁵⁾ значением информационного бита. Эти значения истинности представляют

просто *информацию*, которая, как обычно, может уже рассматриваться как набор битов. Подчеркнём, что мы не предполагаем существования какой-либо структуры на множестве свойств и не устанавливаем никаких ограничений на одновременное существование свойств. Единственный аспект информации, который нам необходим в использовании, состоит в том, что мы используем набор битов, который можно произвольно разделять различным образом.

Не вся информация универсума является доступной для частицы a : в свете FIN-аксиомы информация, пространственноподобно отделимая от частицы a , недоступна для a ; информация, которая доступна a , находится в прошлом светового конуса для a .

Мы переопределим α' так, чтобы вся информация используемая a , была независимой от x, y, z и покажем, что фактически любая бит-информация, используемая a , есть функция α' и x, y, z .

Для заданных x, y, z любая бит-информация $i(x, y, z; \alpha')$ является функцией x, y, z (и, возможно, некоторой ранней информации независимой от x, y, z , а так же α'); являясь избыточной, она может быть удалена из аргументов функции θ_a . Чтобы убедиться в этом, заметим, что экспериментатору A необходимо использовать только определённые ортогональные тройки

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_{40}, y_{40}, z_{40}),$$

а именно – 16 ортогональных троек конфигурации Переса вместе с 24.

При этом бит-информация $i(x, y, z; \alpha')$ становится представимой конкретными битами

$$i(x_1, y_1, z_1; \alpha'), \dots, i(x_{40}, y_{40}, z_{40}; \alpha'),$$

соответствующей информации. Поскольку эти биты не являются функциями переменных x, y, z , они являются частью информационной α' . По другому можно сказать, что мы заменили исходную функцию θ_a новой

$$\theta'_a(x, y, z; \alpha') = \theta_a(x, y, z; \alpha', \dots, i(x, y, z; \alpha'), \dots),$$

полученной перекомпоновкой с функциями i по каждому такому биту.

3.1 "Суфлёр-актёр" проблема. Любая точная формулировка нашей теоремы должна справиться со сложностями, которые можно описать следующим образом. Спин-эксперименты, выполненные с частицами-двойниками a и b могут принимать отклики других частиц a' и b' при формировании произвольных значений^{*)}, ответы которых для a и b есть функции. В этом контексте мы можем назвать a' и b' "суфлёрами", а a и b – "актерами".

Очевидно, что нельзя исключить такую возможность, что можно выразить более точно как – универсум "реализует свой выбор" в окрестности частиц. Однако нам нет потребности в подобной педантичности, поскольку важным фактом здесь является проявление спонтанной возможности в окрестности a и b . Напомним читателю, что даже спины частиц a и b являются теоретическими конструктами и нет смысла в дальнейшем умножении теоретических сущностей. На самом деле мы говорим о точках на экране, а не *какой-либо* частице³⁾.

4. Проблема самосогласованности для спиновых экспериментов

Нельзя отрицать, что сочетание наших аксиом приводит к некоторым парадоксальным аспектам. Можно было бы сказать, что они противоречат здравому смыслу, поскольку a и b должны давать одинаковые "ответы" на одни и те же "вопросы", даже если эти "ответы" и неизвестны заранее. Значит ли это, что аксиомы логически несовместимы? Это, отнюдь, нетривиальный вопрос. Действительно, квантовая механика и теория относительности противоречили друг другу на протяжении их "совместной жизни". А несоответствия теории гетеротических струн разрешилось с большими трудностями только с изменением размерности пространства-времени.

^{*)}В доказательстве мы имели дело с такими решениями при обсуждении "спонтанной информации".

Даже согласованность квантовой механики со специальной теорией относительности является несколько проблематичной. Действительно, многие физики (см., например, Maudlin[M]) пришли к выводу о том, что проблема редукции вектора состояния согласно проекционной гипотезе фон Неймана, усугубляемая парадоксами ЭПР-типа, противоречит релятивистской инвариантности. Так могут ли быть наши аксиомы непоследовательными? Нет! Мы намерены это показать с помощью того, что будем называть "моделью Януса", которая поможет прояснить некоторые загадочные явления. Прежде, чем это сделать, проиллюстрируем идею "модели Януса" для искусственной конструкции, которую назовём "гексагональной физикой".

4.1. Гексагональный универсум. Путь пространство-время в этой физике представляется гексагональной мозаикой на плоскости с вертикальной осью времени, направленной вверх. Экспериментатор в "момент" t (день) может оказаться в одном из следующих двух шестиугольников на "момент" $t + 1$ (следующий день), свободно покинув предыдущий.

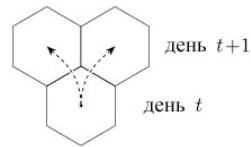


Рис.2. *FW*-реализация в гексагональном универсуме

Предположим, что каждый шестиугольник имеет "спин", значение которого 0 или 1 может быть определено при достижении шестиугольника в данный день, но не раньше. Это аналог *FIN*-аксиомы.

Единственным физическим законом здесь является аналог *SPIN*-аксиомы (и, как мы увидим, также *TWIN*-аксиома, поскольку относится к спинам дистанционно удалённых шестиугольников того же дня): сумма спинов трёх шестигранников рис. 2 есть чётное число (0 или 2).

Согласуются ли эти аксиомы одна с другой для *FW*-реализации? Мы можем показать, что ответом является "Да", внедряя агента Януса, который и будет реализовывать это. Сама реализация в нашем маленьком универсуме покажет, что отклики частиц не зависят от прошлой истории, демонстрируя, следуя нашему определению, ограниченную свободу *FW*-реализации.

Рассмотрим для примера двух физиков А и В, которые стартуют с нижнего шестиугольника рис. 3 в момент (день) 0; при этом они не выполняют свои эксперименты одновременно.

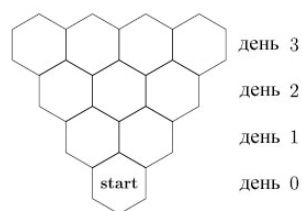


Рис. 3.

Янус свободно выбирает результат первого эксперимента на любой данный день и затем использует *SPIN*-аксиому для заполнения результатами другие шестиугольники этого же дня. Например, если на 5 день А и В для левого и правого шестиугольников рис. 4, соответственно, результатом для А на 5 день есть 1, тогда Янус заполняет другие шестиугольники на 5-ый день однозначно как показано на рис. 4 так, чтобы была выполнена *SPIN*-аксиома.

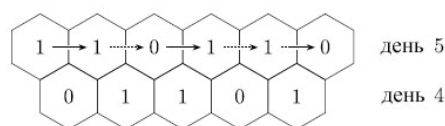


Рис. 4.

Тот факт, что Янус "принимает решение" о результате только во время первого эксперимента на данный день показывает, что экспериментатор не может предсказать результат эксперимента этого дня заранее. SPIN-аксиома также обязывает Януса подчиняться ей при заполнении оставшихся шестиугольников этого дня.

Следует обратить внимание на то, что в реализации гексагональной физики скорость, с которой Янус передаёт информацию, не ограничивается FIN-аксиомой. Хотя это и может показаться необычным, но это не противоречит тому, что бы FIN-аксиома присутствует в модели. Это походит на стандартный способ установления непротиворечивости неевклидовой геометрии путём построения гиперболической геометрии, которая отрицает аксиому о параллельности прямых, внутри евклидовой геометрии, в которой эта аксиома имеет место. На авторов также оказали большое влияние аналогии Мостовских (Mostowski) в использовании аксиомы выбора для построения теории множеств, в которой эта аксиома не занята.

Кроме того, у Януса нет необходимости соотноситься с лево-правой симметрией гексагональной физики. Предположим, например, что А всегда движется налево, а В — направо и они согласились выполнять свои эксперименты каждый раз точно в полдень. Янус может использовать либо свою левую ипостась при "свободном выборе" исхода для А, и SPIN-аксиому при расчёте исхода для В, либо — свою правую ипостась, чтобы реализовать обратное.

Если какой-либо читатель этой статьи буде имитировать "свободный выбор" Януса (хотя бы подбрасыванием монеты) для определения спина либо всех левых шестиугольников рис. 3, либо правых и затем использовать SPIN-аксиому для заполнения оставшихся, другой читатель не сможет определить — какой выбор был сделан первым читателем. Здесь мы можем сказать, что наш тип физики обладает лево-правую симметрией, хотя никто и не изображал собой Януса. Таким образом, модель Януса показывает непротиворечивость гексагональной физики, но она не может быть объяснением для симметрии, поскольку в ней есть обе — левая и правая модели Януса.

Пьер Кюри (Pierre Curie [C]), кажется, был первым, кто сформулировал принцип, согласно которому научные теории должны в идеале содержать симметрии всех фактов, подлежащих объяснению. Поскольку гексагональная физика имеет лево-правое отражение, что не согласуется с моделями Януса, имеем место нарушения принципа Кюри. На наш взгляд, модели, которые нарушают принцип Кюри дискредитируют себя в качестве объяснения, и не должны использоваться при доказательствах.

Логика привычна к тому, что утверждения в рамках модели часто отличаются от утверждений вне рамок модели. Например, "прямые линии" в модели Пуанкаре для гиперболической геометрии являются на самом деле дугами окружностей, а множества без выбранных функций в рамках модели Мостовски для теории множеств, фактически являются функциями выбора вне этих рамок. Аналогичным образом, поскольку сам Янус не является частью физики, он понимает, что сам он не подчиняется её законам. Само же его имя и говорит, что нам не нужно верить в него!

4.2. Аксиомы в спин-экспериментах. Модель Януса устанавливает соответствие SPIN-, TWIN-, FPN-аксиом с *FW*-предположением. Янус выбирает координатный фрейм и определяет ответы 1-спиновому двойнику экспериментаторов А и В в порядке их появления в этом фрейме. Как это происходит? Ответ заключается в том, что он использует действительно случайные результаты подбрасывания монеты или собственную *FW*-способность (!), чтобы воспроизвести результаты 0 или 1 так, чтобы это значение было воспринято SPIN-, TWIN-, FIN-аксиомами (то есть $z \rightarrow 0$ влечёт $y \rightarrow 1$, $x \rightarrow 1$, а $y \rightarrow 1$ влечёт $z \rightarrow 0$, и $x \rightarrow j$ для любого экспериментатора влечёт $x \rightarrow j$ для другого. Ясно, что всегда можно удовлетворить SPIN-, TWIN-аксиомам и *FW*-предположению, так как ни решения экспериментаторов, ни ответы Януса не определяются загодя.

К возможным вопросам этого метода относится и лоренц-инвариантность, несмотря на то, что метод Януса явно её не касается. Результаты метода Януса при лоренцевых преобразованиях аналогичны результатам при изменении системы отсчёта. Поскольку метод Янус инициирует причинны, то этот феномен проявления должен быть причиной и для каждой системы отсчёта. Терминология раздела 6 описывает такую причинно-следственную связь, называя её "эффективной причинностью". Очевидно, что "жители" модели Януса не смогут передавать информацию назад во времени, так что по симметрии они

не могут эффективно передавать информацию со сверхсветовой скоростью. Иными словами FIN-аксиома присутствует в модели Януса (см. обсуждение понятий эффективности в разделе б).

5. Согласованность *FW*-концепции с квантовой механикой

В 1952 году Дэвид Бом предложил известную модель для квантовой механики, включающую проекционную гипотезу фон Неймана. Она спорна, поскольку, как факт хорошо известный Бому, не удовлетворяет принципу релятивистской инвариантности. На языке, который должен использоваться в модели Януса для *именно* реального объяснения поведения мира, это означает, что толкования результатов до и после лоренцевых преобразований будут различаться. А *FWT*-теорема фактически показывает, что конструкция Бома не может быть релятивистской.

Тем не менее конструкция Бома — это шаг вперёд, поскольку модель Януса поможет установить её соответствие с квантовой механикой, включая проекционный постулат. Фактически мы можем модифицировать конструкцию Бома так, чтобы получить сильный результат в соответствии с *FW*-соображениями для частиц.

5.1. "Изгнание" детерминизма. Основой целью создания теорий скрытых переменных было восстановление детерминированности в физике. *FWT*-теорема является последней в ряду аргументов против таких теорий. Однако ситуация не так проста, как хотелось бы, поскольку возможность существования детерминизма в таких теориях может быть инспирирована с помощью простого смыслового приёма.

Для определённости будем придерживаться теории Бома, которая наиболее известна и продвинута, хотя сам приём представляется достаточно общим и для других теорий. Согласно Бому, эволюция системы полностью определяется действительными параметрами ("скрытыми переменными"), однако, не все начальные значения которых нам известны.

То, что мы *можем* знать о значениях этих начальных данных, можно грубо подытожить, сказав, что они лежат во множестве параметров, описывающих состояние S_0 ^{*)}. Проводимый эксперимент может войти в конфликт с некоторыми начальными данными, что может сузить набор данных, скажем, до S_t в момент времени t . "Трюк" *исключения*, сопровождающий подобное сужение набора данных, может касаться всего множества S_t текущих возможностей, и не только касающийся частной точки S_0 , а ко всему реально существующему в момент времени t .

С этой точки зрения, при увеличении t , область S_t для параметров неуклонно сокращается, однако не так, как этого хотелось бы Бому, поскольку мы узнаём о позиции исходной точки больше — возможно благодаря тому, что частицы реализуют свои *FW*-сущности ("возможности свободы реализации")^{**)}.

Теория Бома, очищенная таким образом, становится недетерминированной теорией, которая будет давать точно такие же прогнозы! По сути эта форма теории Бома согласуется с нашим утверждением, что частицы обладают *FW*-атрибутикой. Нам нужно только предположить, что Янус использует действительно случайные процессы, чтобы дать распределения вероятностей P_t . Если он будет поступать так, тогда отклики частиц в наших спиновых экспериментах, например, не будут определены заранее и будут реализовываться в соответствии со своей *FW*-атрибутикой.

Как можно заметить, теория Бома явно противоречит FIN-аксиоме. Но поскольку сами воздействия воспроизводятся квантовой механикой они фактически обладают свойством лоренц-

^{*)} Точнее говоря, параметры будут представляться своими распределениями вероятностей P_0 , подробности чего мы временно не рассматриваем.

^{**)} В более точной версии, распределения вероятностей P_0 на множестве S_0 будут последовательно уточняться всё более и более концентрированным распределением P_t при возрастании времени t .

инвариантности. Формат теории Бома с "изгнанием" детерминизма поэтому представляет необходимый инструмент для доказательства непротиворечивости квантовой механики (включая проекционную гипотезу) с FW -атрибутикой частиц.

6. Релятивистские формы концепций

Обычные формулировки причинности и передачи информации предполагают интуитивные представления о пространстве и времени. Поскольку FIN -аксиома является следствием теории относительности, необходимо проанализировать идеи причинности так, чтобы придать им релятивистски инвариантную форму, что мы будем отмечать термином "эффективность".

(i) *Эффективная причинность*. Понятие причинности является проблематичным даже в классической физике и, тем более, поэтому в релятивистской теории. Это потому, что общепринятая трактовка причинности заключается в утверждении, что отклики никогда не могут предшествовать во времени причинам их возникновения, а время в теории относительности оказывается зависимым от систем отсчёта.

Тщательный анализ, однако, показывает, что правильная трактовка релятивистской концепции причинности не более проблематична, чем в классической физике, поскольку мы имеем право потребовать, чтобы *в пространственно-временном универсуме причинность должна соблюдаться во всех системах отсчёта*. Это свойство мы называем "эффективной причинностью".

Модели Януса, которые объясняют наши спиновые эксперименты с частицами-двойниками – причинны, что говорит о том, что рассматриваемые явления совместимы с эффективной причинностью. То же самое относится и к ЭПР-экспериментам.

Ситуация, конечно, странная, поскольку то, что является причиной в интерпретации Януса для одной системы отсчёта становится откликом в другой. Однако эффективная причинность обладает следующими привлекательными свойствами:

- (1) Ни один наблюдатель не сможет отличить ее от "реальной" причинности (что бы она ни значила);
- (2) По определению она является лоренц-инвариантной;
- (3) Это самое сильное возможное понятие причинности, что является лоренц-инвариантом;
- (4) Она совместима со $SPIN$ -, $TWINN$ -, FIN -аксиомами и FW -предположением.

(ii) *эффективная передача информации*. Подобно предыдущему, существует проблема и обобщения описания передачи информации в релятивистском случае.

Очевидно, что мы не можем признать инвариантным процесс, сказав, что *информация передаваемая из a в b* , если a и b разделены пространственноподобным интервалом, поскольку событие в b может происходить раньше события в a для некоторых систем отсчёта. Если информация *действительно* передаётся a в b , тогда это должно происходить в любых системах отсчёта, что мы должны выразить словами: *информация эффективно передаётся из a в b* .

Многие физики считают, что некоторые виды информации действительно передается мгновенно. Мы обсудим ошибочность этого суждения, в следующем разделе.

(iii) *эффективная полулокализация*. Аналогичное определение позволит нам понять, где реализуется FW -сущность, которую мы обнаружили. Мы должны сказать, что феномен эффективно локализуется в определённой пространственно-временной области (необязательно связной), когда он проявляется во всех системах отсчёта.

Тогда понятно, что мы не можем описать результат 00 или 11 в одном из наших сдвоенных 1-спиновых экспериментов, будучи определёнными возле a , поскольку в некоторых системах он был известен ранее как b . Мы можем, однако, сказать, что реализации 00 или 11 находятся в некоторой окрестности пары a, b (то есть в окрестностях около a и b). Мы инкапсулируем ситуацию, описывая результат как эффективную полулокализацию.

Как уже отмечалось во введении, наше утверждение о том, что "*частицы принимают свободное решение*" – есть просто сокращенная форма более точного утверждения, того что "*универсум реализует это решение в окрестности частицы.*"

Это только для удобства, что мы использовали традиционный язык теории частиц и их спинов. Операциональным контекстом нашей теоремы, обсуждаемым в примечании³⁾ является то, что реальные макроскопические события, такие как локализации определённых точек на экранах не являются функциями прошлого универсума. С этой точки зрения было бы трудно различить пару утверждений, отмеченных курсивом выше.

Подведём итог нашими другими заключениями:

- (1) То, что происходит – есть эффективная причинность
- (2) Никакая информация эффективно не передаётся в любом направлении между a и b .
- (3) Отклики эффективно полулокадизованы на двух сторонах измерения.

Наши определения понятий "эффективности" получают большую пользу при этих трёх, очевидно верных, утверждениях. Хотя они и слабее, чем хотелось бы, также очевидно, что они фактически самые сильные из тех типов, которые являются релятивистски инвариантными.

Предупреждение: "эффективное то-то и то-то ...", хотя и означает релятивистски инвариантное, но это не то же самое, что "инвариант того-то и того-то". Это было бы неуместным, например, для описания спин-экспериментов Янусом с часицами-двойниками как инвариантности причинности, поскольку причина в одной системе становится откликом в другой. Замечания эффективности более адекватно описываются как инвариантное *подобие* оригиналов. "Эффективная причинность", хотя и является релятивистски инвариантным понятием – это не инвариант причинности, это лишь *проявление* причинности во всех системах отсчёта.

Заканчивая этот раздел, подчеркнём странную природу полулокадности. Мы могли бы сказать, что отклики частиц всего лишь полусвободны: образно говоря, каждая частица свободна лишь наполовину, поскольку сопряжена с другой. Тем не менее мы продолжаем называть их поведение свободным имея в виду парадоксальный факт сопряжённости, что позволило нам доказать, что они имеют при этом любую свободу.

То, что происходит - парадоксально, однако модели Януса, даже, если мы и не верим в них, показывают, что это вполне возможно и эксперименты подтверждают это. Поэтому мы должны просто научиться принимать это, как мы приняли ранее парадоксы теории относительности.

7. О релятивистских соленизмах.

Многие физики считают, что определённые виды информации ("квантовая информация" или "фазовая информация") передаются мгновенно. Действительно, это может так восприниматься, если неаккуратно применять стандартный формализм квантовой механики.

Мы разьясим ошибочность аргументации, которая приводит к подобным выводам на примере ЭПР-пары частиц А и В со спином $1/2$ – каждая, в синглетном состоянии пары – $|\uparrow_z^A\rangle|\downarrow_z^B\rangle - |\downarrow_z^A\rangle|\uparrow_z^B\rangle$. Считается, что, когда измерение А в направлении z воспроизводит результат со спином вверх, состояние пары меняется в соответствии с применением проекционного оператора $P_z \otimes I$ к исходному состоянию, что аннулирует второй член синглетного состояния. При этом состояние пары *становится* таким: $|\uparrow_z^A\rangle|\downarrow_z^B\rangle$ – в котором В находится в состоянии со спином вниз.

Слово "*становится*" в этом утверждении будет неверно истолковано, если подразумевается "изменение в момент измерения" в релятивистском смысле. В действительности здесь утверждается, что, если измерение А покажет направление спина вверх, то последующее измерение В покажет направление его спина вниз.

Само утверждение о том, что "спин В имеет направление вниз", сделанное после того, как определен спин А – грамматически неверно. Такое утверждение мы называем *релятивистским соленизмом*. Нам же важно не совершать подобных небрежностей, поскольку они могут привести к подлинным ошибкам в понимании. Как этого добиться?

Простой способ состоит в том, чтобы правильно акцентировать внимание в утверждениях, когда речь идёт о будущих и уже совершенных событиях. Грамматически правильный вариант необходимо сформулировать следующим образом: если *оба* измерения уже выполнены и, если будет установлено, что

спин А направлен вверх, то спин В будет направлен вниз. Это и будет лоренц-инвариантным способом констатации того же акта.

Рассмотрим ситуацию, представленные на рис. 5. Путь световой конус наблюдателя С содержит в прошлом события, связанные с обоими наблюдателями, которые могут сказать с определённой уверенностью, что А "нашёл" спин вверх, а В — спин вниз. Однако, А может только сказать, "если В уже выполнил эксперимент он может обнаружить спин вниз". Здесь "will" (будет) смотрит вперёд от А к С, в то время как "have" (уже) смотрит от С к В.

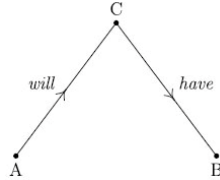


Рис. 5. Выводы А о В: *will* | *have*

Следует обратить внимание, что здесь нет упоминания о релятивистски несуществующем понятии мгновенности и, следовательно, должно корректно работать для систем, в которых измерение В предшествует измерению А. По сути это суждение принадлежит независимой системе отсчёта. Избегать релятивистских солецизмов - это хорошая привычка!

7.1. Рекомендации. Эта мысль естественным образом позволяет нам предложить некоторые рекомендации для интерпретации состояний в квантовой механике. Следуя им, уточним, что то, что обычно называют состоянием является на самом деле предиктором с вероятностями того, что произойдёт при выполнении экспериментов ⁶⁾. Даже если предсказание заключается в том, что какое-то событие имеет вероятность 1, то и оно по-прежнему определяется самим фактическим выполнением эксперимента.

Таким образом, если 3-эксперимент показал результаты $x \rightarrow 1, y \rightarrow 1, z \rightarrow 0$, мы определённо узнаём, что $S_x^2 = S_y^2 = 1$, однако многие физики могли бы сказать, что "мы также знаем, что $S_w^2 = 1$ для любого направления w , перпендикулярного z ", поскольку вероятность этого предсказания равна 1. Однако, мы должны сказать скромнее и только то, что "если измерение будет произведено в направлении w , мы обнаружим, что $S_w^2 = 1$ ".

Сказать, что в этих обстоятельствах, что S_w^2 уже приняло значение 1 есть, по нашему мнению, введение в заблуждение. В конце концов, никто не скажет, что такое астрономическое событие как затмение уже произошло, как только оно было предсказано с достоверностью.

Вернёмся к спин-ЭПР случаю, обсуждавшемуся выше, предполагая, что измерение А в момент времени t продуцирует состояние "спин вверх", придавая паре состояние $|\uparrow_z^A\rangle|\downarrow_z^B\rangle$ и состояние $|\downarrow_z^B\rangle$ для В. Тогда мы позволим себе сказать, что "состояние А есть со 'спином вверх'", поскольку измерение уже произведено, но не "В есть в состоянии со спином вниз" в момент времени t .

Если измерение В выполняется в момент времени t оно, конечно, продуцирует состояние "спин вниз". Но (предположим, что А и В разделены расстоянием 5 световых минут), если измерение выполняется 1 световую минуту, состояние "спин вниз" будет спродуцировано к момент $t + 1$, а не к t , поскольку для этого измерение должно начать производиться в момент $t - 1$. И ничего более об изменении В в момент t .

Те, кто сказал бы нечто более, возможно, не ошибутся в своих предположениях, но их мнения не согласуются с теорией относительности, в отличие от наших — более скромных. В нашей дискуссии об эффективных понятиях, осторожная речь окупается — наши утверждения, очевидно, верны и релятивистски инвариантны, но не менее сильны.

8. FWT-теорема — надёжна.

Наши первые версии SPIN и TWIN были представлены по молчанию идеализировано; теперь мы удалим некоторые из этих идеализаций.

На практике мы ожидаем найти отклонения от наших аксиом, например, поскольку вектора x, y, z могут быть только номинально или примерно ортогональны, но не точно; аналогично, w будет в лучшем случае только номинально параллелен одному из них и опять-таки, связанная пара может быть лишь номинально в синглетном состоянии. Кроме того, две теории квантовой механики и специальной теории относительности, из которых вывели наши аксиомы, могут быть лишь приблизительно верными. И, ведь, это факт, что общая теория относительности оказывается более точной чем специальная. Однако мы можем смело предположить:

SPIN': Если мы наблюдаем квадрат спина в трех номинально ортогональных направлениях, то вероятность "канонического исхода" (то есть, j, k, l есть 1, 0, 1 в некотором порядке) есть, по крайней мере, $1 - \epsilon_s$.

TWIN': Если w , номинально в том же направлении, что x , или y , или z , воспроизводит значение m , то вероятность того, что m эквивалентно одному из j, k, l , будет не менее $1 - \epsilon_t$.

Тогда в продолжение аргументации теоремы определим функцию $\theta_1(w)$ направления, которая ведёт себя подобно 101-функции во всех случаях пропорционально $3\epsilon_t + \epsilon_s$. Если w номинально то же, что и y (скажем), мы заключаем, что

$$\theta_a(x, y?, z; \alpha) = k = \epsilon_t m = \theta_b(w?; \beta'),$$

где " $= \epsilon_t$ " означает - "равный, за исключение доли ϵ случаев"

Теперь, если мы фиксируем любые возможные значения для α' и β' (которые существуют по FW-предположению) и определяем, что $\theta_1(w)$ должно быть $\theta_b(w?; \beta')$, находим

$$(\theta_1(x), \theta_1(y), \theta_1(z)) = {}_{3\epsilon_t}(j, k, l) = {}_{\epsilon_s}1, 0, 1$$

в некотором порядке.

Но лемма фактически показывает, что любая функция направления не может иметь 101-свойство, по крайней мере, для одной из 40 ортогональных троек (16 ортогональных троек конфигурации Переса и троек, построенных из оставшихся 24 ортогональных пар). Мы получим противоречие, если $3\epsilon_t + \epsilon_s \geq 1/40$

Насколько большой можно ожидать величину эpsilon? Авторы не являются экспериментаторами, но уверены, что ошибка в угле будет доминировать над другими ошибками так, что верхние границы мы должны получить, получив оценки, на которые можно положиться.

Если x, y, z образуют углы α, β, γ друг с другом в циклическом порядке, то согласно стандартным методам квантовой механики ⁷⁾ имеем

$$(2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \gamma - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma)/3,$$

для вероятности неканонического результата наблюдения направлений x, y, z в указанном порядке. Если α, β, γ находятся все в интервале $[\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta]$, это даёт

$$\epsilon_s \leq (6\delta^2 + 4\delta^3 + \delta^4)/3.$$

Опять же, если w образует угол Φ с одним из x, y, z , то вероятность неканонического результата 01 или 10 есть $2(\sin^2 \Phi)/3$, так что если Φ находится в интервале $[-\delta, \delta]$, тогда $\epsilon_t \leq 2\delta^2/3$. Таким образом,

$$3\epsilon_t + \epsilon_s \leq 4\delta^2 + (4\delta^3 + \delta^4)/3,$$

что $\leq 1/800$, если $\delta \leq 1$ степени.

Это означает, что неканонические наблюдения 000, 100, 010, 001, 111 для SPIN и 01, 10 для TWIN можно ожидать реже, чем один раз в 800 экспериментах, а не один раз в 40 экспериментах, как это подразумевается функциональная гипотеза. Более разумная граница для δ может составлять 1 минуту, давая верхнюю границу $1/2900000$ для вероятности этих неканонических результатов.

Мы уже отмечали выше, что переход от специальной к общей теории относительности никак не влияет на наши результаты и сейчас самое время, чтобы объяснить — почему. Основное различие между двумя теориями заключается в том, что в искривленном пространстве-времени следует заменить "одно направление" на "направления, связанные с параллельным переносом" в TWIN-аксиоме. Однако, в

солнечной системы, искривление пространства–времени настолько мало, что его очень сложно даже обнаружить, так что любые дополнительные угловые ошибки, вызванные специальным релятивистским приближением будут совершенно незначительным по сравнению с 1 градус или 1 минуту которые мы предполагали.

Это же замечание касается возможной замены либо общей относительности или квантовой механики более точными теориями, сохраняющими истинность SPIN- и TWIN- при достаточно малом эпсилон

9. Исторические замечания

В 1960-х годах независимо друг от друга был обнаружен парадокс Коэна–Спекера (K–S) и опубликована работа с неравенством Белла, показывающие существование неких скрытых переменных в квантовой теории, не предсказываемых квантовой механикой. K–S парадокс показал на невозможность существования так называемых “неконтекстуальных” теорий скрытых переменных, в то время как неравенство Белла показывало на невозможность удовлетворения квантовой механикой условий “белловской локальности”. В 1970-х годах, Коэн показал с помощью эксперимента ЭПР-типа с парой 1-спиновых частиц-двойников, что фактически локальность Белла подразумевает наличие неконтекстуальных условий (см. GHSZ], Heywood and Redhead [HR]).

Преимуществом K–S теоремы перед теоремой Белла являлось то, что она показывала явное противоречие между квантовой механикой и теориями скрытых переменных на одном спиновом примере, в то время как теорема Белла выявляла только ошибочные вероятности в неравенствах на серии экспериментов. Авторы были недалеко от того, чтобы получить версию FWT-теоремы, свободную от неравенств Белла.

Надежность "несцепленного" K-S парадокса обсуждалась в разных направлениях и другими авторами (см. Larsson [L] и Simon, Brukner and Zeilinger [SBZ]).

Были улучшения также по ряду направлений, необходимых для K–S теоремы. В оригинальной версии [K–S] использовались 117 направлений. Версия с наименьшим числом по Конвею и Коэну из известных в настоящее время использует набор всего из 31 направления (см. [P]). Впоследствии Перес [P] нашёл более симметричный набор из 33 направлений, который мы использовали здесь, поскольку это позволило упростить доказательство по сравнению с нашим набором из 31 направления.

В 1989 году Гринбергер, Хорн и Цайлингер [GHSZ] предложили новую версию коэновской формы парадокса 1970-х годов. Они использовали три частицы со спином 1/2 вместо наших двух 1-спиновых частиц и показали, что белловская локальность приводит к прямому противоречию с квантовой механикой без вероятностей.

Мы могли бы доказать FWT-теорему, используя GHZ 1/2-спиновые тройки вместо 1-спиновых двойников. Преимущества этого:

- (i) показывает, что частицы со спином 1/2 являются не столь свободными агентами как наши 1-спиновые;
- (ii) аргументация, приводящая к противоречию, проще;
- (iii) это версия эксперимента была выполнена (см. [PB-DWZ]).

Тем не менее, мы предложили вариант с 1-спиновыми частицами-двойниками по следующим причинам:

- (i) как отмечается в [GHSZ], наш эксперимент с 1-спиновыми двойниками был предложен Коэном уже в 1970-х годах;
- (ii) концептуально проще рассматривать две системы вместо трех;
- (iii) В K–S аргументация в нынешнем виде с 33 направлениями теперь также очень проста;
- (iv) эксперимент с достаточно удаленными частицами для проверки FWT-теоремы, вероятно, будет более легко реализуем с парами, чем с тройками.

Эксперименты, к которым мы обращались при обсуждении нашей теоремы, до сих пор — всего лишь только “мысленные”. Это потому, что подтверждение FW-предположения требует наблюдений с участием человека, а нынешняя физиология отводит нам не менее 1/10 секунды. В течение этого времени свет будет проходить почти 20 000 миль, так что эксперимент не может быть реализован на Земле.

На самом деле производить такие эксперименты можно и на Земле, если человеческий выбор заменить решениями компьютера, используя псевдослучайный генератор, как уже было сделано для ЭПР-спиновых экспериментов [WJSWZ] и предложено для GHZ-эксперимента [PBDWZ]. Некоторые другие недавние эксперименты в этом направлении описаны в [SZGS],[GBTZ],[ZBGT].

Делегирование функции выбора компьютерной программе ведёт к *FWT*-теореме, если к этому добавить предположение о том, что частица не "посвящена" в подробности выбора компьютерной программой. Однако, следует обратить внимание на то, что замена человеческого выбора с помощью генератора псевдослучайных чисел не позволяет нам обойтись *FW*-предположения, поскольку *FW*-сущность используется при выборе уже самого генератора! Необходимость *FW*-предположения очевидна, поскольку детерминист сможет утверждать, что экспериментаторы вынуждены были выбрать компьютерные программы, потому что это было предопределено на "заре времён".

10. GRW-теория

Жирарди, Римини и Вебер предложили теорию [GRW], чтобы попытаться объяснить редукцию состояний в квантовой механике с помощью механизма случайных попаданий ("хитов"). Их теория в исходном виде, очевидно, нерелятивистская, однако они надеются найти релятивистский вариант. Протицируем Басси и Жирарди [BG]:

“Уместно подчеркнуть два факта: проблема по-прежнему остается открытой, весьма познавательной и трудной. Однако, кажется, есть возможность её последовательного разрешения”.

FWT-теорема показывает, что эти надежды не могут быть реализованы^{*)}, если мы отвергаем как фантастическую возможность того, что “хиты”, управляющие поведением частиц, полностью определяются действиями экспериментаторов. Это потому, что реакция частицы, скажем a^{**}), может зависеть только от "хитов" прошлого светового конуса (если они физически существуют), что уже включено в доступную информацию α и β . Однако, доказательство *FWT*-теоремы показывает, что реакция частиц не является функцией этой информации.

Поскольку этот аргумент является достаточно тонким, мы рассмотрим соответствующую часть доказательства более подробно.

Пусть α_0 представлена информацией из "хитов", которые влияют на поведение частицы a . Тогда, согласно FIN-аксиоме, α_0 не может зависеть от направления w , поскольку в некоторых системах отсчёта это направление определяется позже. Она может зависеть от x, y, z . Как и в разделе 3, мы можем записать это как функцию x, y, z и информации α'_0 , которая не является функцией x, y, z .

Аналогично, информация β_0 от "хитов", которые влияют на поведение частицы b должна быть уже независимой от x, y, z и может быть представлена как функция w , а β'_0 не является функцией w . Мы видим, что "хит"-информация α'_0 и β'_0 не вызывает проблем — это только часть информации α' и β' , которая уже рассматривалась в нашем доказательстве.

Это не только перекрывает классическую корреляцию информации, например, сигналов с Альфа Центавра, но также показывает, что тонкие нелокальные корреляции между "хитами" a и b не смогут помочь. Мы даже можем позволить обоим частицы быть причастным ко *всей* информации α' и β' . Единственное, что мы не можем сделать — это позволить a быть под влиянием w или b через x, y, z (не позволяет FIN) или позволить "хитам" контролировать поведение частиц и полностью определять выбор направлений экспериментаторам. Это противоречит *FW*-предположению.

10.1. Случайность не может помочь. Проблема заключается в детерминированности:

“Рискуя оказаться чересчур педантичными, обращаем особое внимание на то, что с нашей точки зрения интерес к теореме Гизина вызван тем (см. доказательство теоремы), что это доказывает, что если считать квантовую механику модификацией нелинейной теорией, мы вынуждены ввести стохастичность, а динамику ансамблей чистых состояний трансформировать в ансамбли статистических смесей” ([BG],p.37).

^{*)} Тем не менее, релятивистской версии GRW были востребованы. См., например. Tumulka[T].

^{***)} Или, возможно, более раннего влияния частиц-суфлёров момента t_0 .

Однако, действительно ли "хиты" строго детерминированы (случай, рассмотренный Гизином) или они по сути принципиально стохастичны – в любом случае, GRW-теория предполагает, что редукция определяется "хитами" и это противоречит *FWT*-теореме.

Чтобы понять - почему, представим стохастический элемент в предположительно релятивистской GRW-теории в виде последовательности случайных чисел (не все из которых могут быть использованы обеими частицами). Хотя они могут генерироваться только при необходимости – нет разницы, если задать их заранее. Но тогда поведение частиц^{*)} в такой теории будет функцией информации доступной им (включая стохастический элемент) и поэтому объяснение наших двойников в спиновом эксперименте должно включать сверхсветовую передачу информации между *a* and *b*. В какой-то системе отсчёта эта передача будет осуществляться назад во времени, что противоречит причинности.

Это правда, что частицы реагируют стохастически. Но эта стохастичность реакций не может быть объяснена размещением стохастического элемента в любом механизме редукции, который объясняет их поведение, поскольку такое поведение не определяется какой-либо информацией (даже стохастической!) в прошлом их световых конусов.

10.2. Резюме. Мы можем резюмировать обсуждение, сказав во-первых, что информация (случайная или нет), которую "хиты" передают *a* и *b* могла бы быть такой, чтобы не нарушить FIN-аксиому сообщая *b* о *x, y, z* или *a* о *w* и во-вторых, что она могла бы быть задана заранее. Конечно, *есть* возможность позволить поведению частиц быть функцией частиц-"актеров", но это чистый переход "назад" – даже, если мы называем этих частиц-"актеров" "хитами", они должны быть такими, чтобы не могла быть определена предыдущая история, даже вместе со стохастической информацией.

Тот же самый аргумент показывает, предполагая *FW*-соображения по отношению к экспериментатору, что релятивистски инвариантная теория не может предоставить механизм редукции, поскольку определяет поведение частицы, противоречащее тому факту, что оно ещё и свободное, чтобы реализовать собственное "решение". Кроме того, мы видели, что *FW*-предположение не является необходимым для теорий свободного состояния: *релятивистски инвариантная теория, которая пытается дать ответ по крайней мере на наши предложенные тройные эксперименты не может предоставить механизма редукции.*

Это освобождает не только GRW-теорию, но и любую другую теорию - типа свободных состояний, от представления релятивистски инвариантных механизмов редукции, даже без *FW*-предположения. Теории, которые пытаются это сделать должны отказаться от одной из аксиом – SPIN, TWIN, FIN.

Отметим, что Альберт и Вайдман [AB] выдвинули другое возражение против GRW – это то, что объяснение опыта Штерна-Герлаха не позволяет достаточно быстрой редукции. Ответ Басси и Жирарди [BG] по части редукции (в доходчивом виде) с точки зрения наблюдателя, что приводит к проблем согласования, приведён в следующем раздел (в достаточно острой форме).

11. Философские замечания, касающиеся *FWT*- теоремы^{*)}

11.1. Об *FW*-сущности. Обсудим суть *FW*-предположения. Что, если оно ложно и спин-экспериментатор не волен выбирать, в каком направлении ориентировать свой аппарат? Сначала покажем с помощью простой аналогии, что универсум, в которой каждый реальный выбор есть выбор Хобсона^{**)} и, что это действительно логически возможен. Некто, кто берёт друга в кинотеатр посмотреть фильм, который он уже видел, "переживёт" своего рода опыт детерминизма, который не "почувствует" его друг. Аналогично, если то, что мы испытываем на самом деле, есть фактически "второй показ изменения универсума" является детерминизмом, даже если "первого показа" не было.

Из этого следует, что мы не сможем доказать нашу *FW*-способность: детерминизм, подобно солипсизму, становится логически возможным. Отсутствие свободных агентов в детерминизме и внешнего Мира в солипсизме навечно философами для непротиворечивого представления границ возможностей многообразия Вселенной, однако с возможностью отбросить их при серьёзном взгляде на *наш Мир*.

^{*)}или соответствующих частиц-"актеров"

Трудно научно воспринимать Мир, в котором фактически всё контролируется, и с экспериментаторами, которые так и думают. Природа, ведь, может и коварно схитрить, лишая нас возможности проверки "подтверждения" законов, если мы попытаемся их опровергнуть. Физический же вывод — основной инструмент науки исчезает, если нам отказано в доступе к механизмам случайности. Трудно всерьез принимать аргументы тех, кто по своим убеждениям является приверженцем детерминированного автоматизма!

FW-сущность мы определили как противоположность детерминизму, несмотря на то, что Юм и другие философы пытались примирить эти понятия в парадигме *компатибилизма*. На наш взгляд эта парадигма возникла только потому, что вся физика со времён Юма была детерминистской. Однако этот взгляд уже век как устарел в связи с возникновением и развитием квантовой механики. Однако для наших целей нет нужды погружаться в глубины исторических дискуссий — мы говорим только о типах *FW*-сущности, свойственной частицам и экспериментаторам, как проявлениях спонтанной возможности и способной влиять на будущее, но не как о пассивном компатибилизме.

11.2. Свобода против случая? Хотя мы и не можем дать операциональных определений для свободы и случайности, мы можем различить их в контексте ситуации, поскольку свободное поведение частицы может быть "запутано" с частицей-двойником, в то время как случайное поведение не может. Это замечание может заинтересовать некоторых философов в отношении *FW*-сущности.

Басси и Жирарди заметили, что из теоремы Гизина следует, что их "хиты" должны включать элементы случайности для того, чтобы теория GRW стала релятивистски инвариантной. Мы же показали, что то, в чём нуждаются "хиты", так это в некоторой свободе и, если быть точнее, они должны быть хотя бы полусвободными. Именно по этой причине мы предпочитаем описывать наши частицы как свободные, а не как характеризующиеся недетерминированностью, обусловленной случайностью или стохастичностью.

11.3. Интерпретации квантовой механики. Далее мы представим наши собственные мысли по поводу интерпретации квантовой механики, которая подразумевалась *FWT*-теоремой, даже если, строго говоря, сама она и не касалась этого.

Во-первых, мы отвергаем всё ещё популярную идею, хотя и давно обесцененную большинством физиков но, тем не менее, осознанную, как необходимость редукции (коллапса) волновой функции. Достаточно сказать, что никогда не было каких-либо намёков и доказательств по этому поводу из-за серьёзных трудностей понимания сути редукции. Видимо поэтому ничто так и не способствовало решению этой проблемы. Необходимость же решения проблемы очевидна — это *проблема согласования*: если редукция волновой функции обязана сознанию наблюдателя, тогда как так происходит, что разные наблюдатели получают один и то же результат? Эта проблема особенно актуальна для эксперимента, в котором один наблюдатель находится на Земле, другой — на Марсе. Возникающие трудности имеют релятивистский характер.

Для убедительности аргументации иногда используется "проекционная теорема" фон Неймана, поскольку она говорит о том, что ни один наблюдатель не сможет объяснить факт "возникновения" состояния как результата редукции. Факт же одинаковости результатов объясняется тем, что сам процесс проецирования происходит вне сознания экспериментатора. Вера в эту аргументацию сродни солипсизму и имеет тот же недостаток — она не "уважает" симметрию, при которой факты не меняются при перестановке наблюдателей.

.....
*) Попытка философски связать в единую сущность (*FW*) возможность свободного выбора экспериментатором условий эксперимента с возможностью спонтанной реализации квантовой частицей своих квантовых характеристик.

**) Выбор Хобсона — хрестоматийная ситуация логически свободного выбора при ситуативных ограничениях. Представляет ситуацию, когда номинально имеется много вариантов выбора, но ограничения ситуации таковы, что фактически навязывается только один вариант.

11.4. Фактурные эксперименты. Что же вызывает редукцию, которая "имеет место быть"? Проекционная теорема показывает, что в нынешней квантовой механике, являющейся линейной теорией, не может быть получен ответ на этот вопрос. Мы же считаем, что редукция — это реальный эффект, который смогут объяснить только будущие физики, однако нынешние эксперименты, тем не менее — весьма познавательны и содержательны.

Любой экспериментатор знает, что на самом деле очень трудно достичь когерентности — это требует тонких экспериментов с применением интерферометров типа Маха-Цандера. Рассмотрение таких экспериментов привело нас к критерию различения волны и частицы в корпускулярно-волновом дуализме, что мы можем назвать *визуализацией* окружением. Грубо говоря, только достаточно "гладкие картинки" позволяют проявлять квантовому объекту себя волной, грубые — заставляют проявлять себя частицей.

То, чем квантовый объект предстаёт, зависит от окружения и таким образом, чтобы мы не претендовали на то, чтобы это понять. Таким образом, в интерферометрическом контексте полупосеребрянные лучевые сплиттеры позволяют обнаружить волновое поведение (гладкое), а детекторы, ведущие к редукции волновых функций — корпускулярное (грубое).

Однако, *FWT*-теорема говорит нам нечто очень важное, а именно, что хотя, *некоторые* "грубые" фактурные результаты и будут реализованы, это на самом деле не значит будет осуществлён какой-либо выбор. Мы можем рассматривать визуализацию, как возможность узнать ответ частицы, но не как конкретный "ответ". Можно ожидать, что будущая теория должна описать более подробно, какие именно визуализации приводят к редукции, однако *FWT*-теорема показывает, что такая теория будет правильно предсказывать результаты неймановского проецирования: *эксперименты с визуализацией могут требовать, но не командовать.*

11.5. Заключительные замечания. Мы считаем, что предположения, лежащие в основе ранних опровержений существования скрытых параметров остаются проблематичными. Они связаны с сомнительностью таких понятий, как "элементы реальности", действительно счётные (counterfactual) условия, результирующие нефизические типы локальности. Действительно, в подробном анализе этих теорий Redhead (Redhead [R]) приводит не менее десяти различных типов локальности.

Одно из преимуществ *FWT*-теоремы заключается в том, что путём четкого определения необходимых *FW*-предположений, она заменяет все сомнительные идеи простым введением *FIN*-гипотезы относительности. Ещё большим преимуществом является то, что теорема обращается непосредственно к реальному Миру, а не только к теориям. Это освобождает от обращений к локальным механизмам редукции.

Мир предстаёт перед нами в том интересном образе, в котором фундаментальные частицы постоянно реализуют возможности своей *FW*-атрибутики. Ни одна теория не сможет предсказать точно, какие значения параметров частицы будут реализованы в будущем по той простой причине, что ещё не реализовалось то, что будет! Большинство этих реализаций, конечно, не будет сильно влиять на видимые события — мы можем описать их как простые безрезультатные сердцебиения, которые в больших масштабах почти компенсируют друг друга и поэтому могут быть проигнорированы. Однако авторы убеждены, что разум способен предотвращать спонтанные проявления и, таким образом, позволяя реализовать сугубо человеческую *FW*-роль в экспериментах.

Само существование *FW*-сущности уже имеет последствия для философии общей теории относительности. Была такая мысль, с помощью этой теории показать, что "поток времени" — это иллюзия. Мы процитируем только одного из выдающихся авторов на этот счёт: "Объективный мир есть то, чего не бывает" (Герман Вейль). Примечательно, что это общее мнение, часто относящееся к "блочному взгляду на Вселенную" ("block universe" view), возникло только вследствие способа последовательного моделирования математики общей теории относительности, как теории о кривизне вечно существующей арены — пространства-времени. В свете *FWT*-теоремы это мнение ошибочно, поскольку будущее Вселенной не определяется. Решение Теодора Рузвельта — построить Панамский

канал, показывает, что FW -ипостась сдвигает горы, а в общей теории относительности показывает, что кривизна пространства не определена. Сцена по-прежнему строится, а шоу продолжается.

Эйнштейн не мог заставить себя поверить, что “Бог играет в кости с миром”, но, возможно, мы могли бы примирить его с мыслью о том, “Бог позволяет миру проявлять свою FW -ипостась .”

Примечания

В примечаниях приведены более подробные сведения о некоторых технических аспектах.

1. *Об измерении квадрата спина.* Утверждение о том, что S_x^2, S_y^2, S_z^2 должны принимать значения 1, 0, 1 в некотором порядке может удивить некоторых физиков, которые видят противоречие с утверждением о некоммутативности операторов S_x, S_y, S_z . Однако для частиц со спином равным 1 квадраты проекций спинов коммутируют.

Мы можем рассматривать измерение S_x^2, S_y^2, S_z^2 в эксперименте Штерна-Герлаха (см. Wrede [W]), с помощью интерферометрии, которая включает когерентную рекомбинацию лучей для $S_x = +1$ и $S_x = -1$ или с помощью спин-гамильтонова типа эксперимента, описанного [KS], в котором измеряется выражение в форме $aS_x^2 + bS_y^2 + cS_z^2$. Примером спиновой 1-системы является атом ортогелия.

2. *Об 1-спиновых частицах-двойниках.* Для изготовления пары двойников 1-спиновых частиц используется две частицы в синглетном состоянии, то есть с суммарным спином, равным 0. Явное описание синглетного состояния задаётся выражением

$$|S_w^a = 1\rangle|S_w^b = -1\rangle + |S_w^a = -1\rangle|S_w^b = 1\rangle - |S_w^a = 0\rangle|S_w^b = 0\rangle$$

Это состояние не зависит от направления w . Отметим, что $S_w^a (= S_w \otimes I)$ и $S_w^a (= I \otimes S_w')$ являются коммутирующими операторами для любых направлений w и w' .

3. *Операционный смысл различных терминов.* Использование терминов "1-синовая частица" и "квадрат спина в направлении w " касается определённых теоретических концепций. Однако мы используем их только для соотнесения с локализацией точек на экране, производимых соответствующими лучами рассматриваемых экспериментов.

Таким образом, наши аксиомы, не смотря на то, что они вытекают из теории квантовой механики и теории относительности, относятся фактически к предсказаниям макрорезультатов определённых возможных экспериментов. Наша аргументация отказа от теорий скрытых переменных поэтому является более сильной, чем предыдущие, предложения которые предлагались в квантовой механике. С логической точки зрения это очень важно, поскольку любое использование квантовомеханической терминологии затемняет суть предположений и решения.

4. *Доказательство леммы.* Не существует 101-функции для ± 33 рис.9.

Доказательство. Допустим, что 101-функция определена на ± 33 направлениях рис. 9. Если $\theta(W) = i$, мы будем писать $W \rightarrow i$. Ортогонали троек и пар, используемые ниже в доказательстве противоречия, хорошо видны геометрически. Например, точкам B и C на рис. 9 сопутствуют лучи, исходящие из центра O куба с тем же углом между ними, что и для лучей U и V . Обе пары лучей образуются взаимно ортогональными векторами. Вектора из центра O куба в точки A, B, C образуют ортогональную тройку. Поскольку вращение куба вокруг оси OZ переводит точки D и G в точки E и C , плоскость, ортогональная к направлению D пройдёт через Z, C, E так, что C, D образуют ортогональную пару, а Z, D, E – ортогональную тройку.

Ортогонали	При	Подобие
X, Y, Z	следует $X \rightarrow 0, Y \rightarrow 1, Z \rightarrow 1$	без потери общности
X, A	следует $A \rightarrow 1$	$A' \rightarrow 1$
A, B, C	следует $B \rightarrow 1, C \rightarrow 0$	без потери общности
C, D	следует $D \rightarrow 1$	$D' \rightarrow 1$
Z, D, E	следует $E \rightarrow 0$	$E' \rightarrow 0$
E, F and E, G	следует $F \rightarrow 1, G \rightarrow 1$	$F' \rightarrow 1, G' \rightarrow 1$
F, F', U	следует $U \rightarrow 0$	
G, G', V	следует $V \rightarrow 0$	

И поскольку U ортогонально V , это входит в противоречие с леммой.

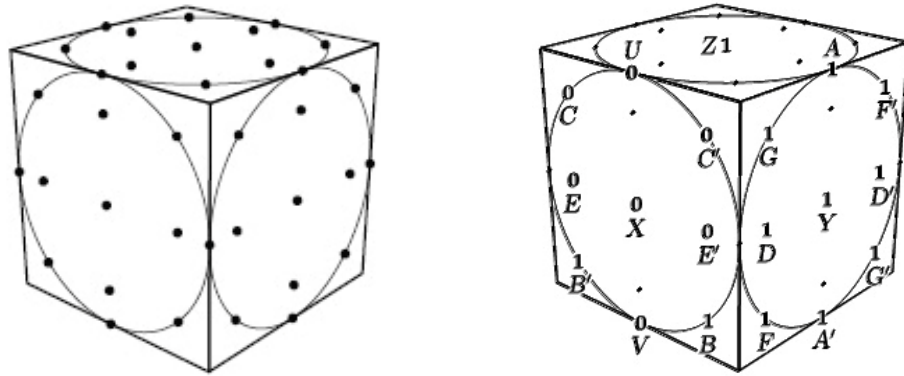


Рис. 9. Спиновые назначения для 33-модели Переса

5. *О свойствах.* Мы будем описывать состояние универсума или какой-либо другой системы, представляя их свойства. Более предметное описание в терминах физических величин, таких как энергия, момент импульс и т. д. всегда может быть сведено к ряду свойств таких как "энергия E лежит в интервале (E_1, E_2) ". Мы предпочитаем более простое представление свойств, поскольку это позволяет избежать возможных проблем, связанных с использованием непрерывной оси действительных чисел в пользу элементарного представления в терминах "1" и "0" ("да" или "нет") Это более соответствует конечности фактов о мире. Что ещё более важно, мы имеем в виду более общий подход, чем допустимый для значений физических величин.

Какие свойства мы допускаем? В классической физике частиц ряд свойств часто ассоциируется с булевой алгеброй (Борель) подмножества фазового пространства, тогда как в квантовой механике это перемещается в дискретное гильбертово пространство проекционных операторов. Должны ли мы ввести какие-либо ограничения в связи с этим?

Нет! Наша теорема скорее ослабляет, нежели усиливает любые ограничения. Кроме того, важно то, что мы не делаем никаких теоретических предположений о физических свойствах, поскольку не хотим, чтобы наша теорема зависела от какой-либо физической теории. В любом случае наша теорема должна заявить о реальном мире, в отличие от любой другой теории мира, если мы отказываемся от ограничений свойств. Так что ответ таков: мы должны разрешить все возможные свойства!

6. *К рекомендациям по интерпретации.* Для обсуждения рекомендаций в контексте интерпретации квантовой механики см. Конвей, Коэн [Conway, J., Kochen, S. [СК]]. Несмотря на широко распространенное мнение среди физиков, что луч в гильбертовом пространстве содержит больше информации, чем вероятности исходов, теорема Глисона (Gleason) показывает (см. [СК]), что мы можем однозначно охарактеризовать лучи этими вероятностями.

7. *Верхняя граница для эpsilon.* Предположим, мы осуществляем последовательность измерений свойств проекционными операторами P_1, \dots, P_n над системой в чистом состоянии Φ . Тогда вероятность результата $\langle P_n \dots P_1 \Phi, P_n \dots P_1 \Phi \rangle = \langle \Phi P_1 \dots P_n \dots P_1 \Phi \rangle = \text{tr}(P_1 \dots P_n \dots P_1 P_\Phi)$, где P_Φ является проекцией на луч Φ . Это становится $\text{tr}(P_1 \dots P_n \dots P_1 \rho)$, если система находится в смешанном состоянии с оператором плотности ρ .

В нашем случае, для SPIN' имеем $n = 3$ и $\rho = I/3$, поскольку мы задаём равный вес каждому из свойств P_x, P_y, P_z поскольку что квадрат спина 0 в номинальных направлениях x, y, z . Тогда вероятность 000 для P_x, P_y, P_z есть

$$\text{tr}(P_x P_y P_z P_x \cdot I/3) = \text{tr}(|x\rangle\langle x||y\rangle\langle y||z\rangle\langle z||y\rangle\langle y||x\rangle\langle x|)/3 = \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma.$$

Аналогичным образом, вероятность 010 есть

$$\text{tr}(P_x (I - P_y) P_z (I - P_y) P_x \cdot I/3) = (\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)/3.$$

Результат в текст получается как сумма пяти таких выражений.

Опять же, для TWIN' имеем $n = 2$ и $\rho = I/3$. Наблюдения за частицей со спином 1 (или двух двойников) в двух направлениях w, w' с углом Φ дают результаты 10 или 01 с вероятностью

$$\text{tr}(P_w (I - P_{w'}) P_w \cdot I/3) + \text{tr}((I - P_w) P_{w'} (I - P_w) \cdot I/3) = \frac{2}{3} \sin^2 \varphi.$$

Ссылки

- [M] Maudlin, T., Quantum Non-Locality and Relativity, Blackwell, Oxford (1994).
 [C] Curie, P., J. de Phys. 3 (1894), 393–415.
 [BG] Bassi, A., Ghirardi, G. C., Phys. Reports 379 (5–6), (2003), 257–426.
 [T] Tumulka, R., arXiv: quant-ph/040609v1 (14 Jun 2004).
 [GHSZ] Greenberger, D. M., Horne, M. A., Shimony, A., Zeilinger, A., Am. J. Phys. 58 (12) (1990), 1131–1143.
 [HR] Heywood, P., Redhead, M. L. G., Found. of Phys., 13 (1983), 481–499.
 [KS] Kochen, S., Specker, E., J. of Math. and Mech. 17 (1967), 59–87.
 [P] Peres, A., Quantum Theory: Concepts and Methods, Kluwer (1993).
 [PBDWZ] Pan, J.-W., Bouwmeester, D. B., Daniell, M., Weinfurter, H., Zeilinger, A., Nature Lett. 403 (2000), 515–518.
 [L] Larsson, J.-A., Europhys. Lett. 58 (6) (2002), 799–805.
 [SBZ] Simon, C., Brukner, C., Zeilinger, A., arXiv: quant-ph/0006043v2 (28 Mar 2001).
 [WJSWZ] Weils, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H., Zeilinger, A., Phys. Rev. Lett. 81 (23) (1998), 5039–5043.
 [GBTZ] Gisin, N., Brendel, J., Tittel, W., Zbinden, H., Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 3563.
 [ZBGT] Zbinden, H., Brendel, J., Gisin, N., Tittel, W., Phys. Rev. A 63, 022111, (2001), 1-9.
 [SZGS] Stefanov, A., Zbinden, H., Gisin, N., Suarez, A., Phys. Rev. Lett. 88 120404, (2002), 1-4.
 [R] Redhead, M., Incompleteness, Non-Locality, and Realism, Clarendon, Oxford (1987).
 [W] Wrede, E., Zeits. f. Phys. 44 (1927), 261–268.
 [CK] Conway, J., Kochen, S., Quantum Unspeakables, (R. A. Bertlmann, A. Zeilinger, eds.) Springer (2002), pp. 257–270.
 [AV] Albert, D. Z., Vaidman, L., Phys. Lett. A 139, No. 1,2 (1989), 1-4.

Наша благодарность **Eileen Olszewski**, за печать и **Frank Swenton** за графику.

Принстонский университет, кафедра математики, Принстон, Нью-Джерси 08544-1000

E-mail address: conway@math.princeton.edu, kochen@math.princeton.edu

Для связи:

quadrica-m@mail.ru

<http://orcid.org/0000-0002-1435-9220>

Авторский семинар

<http://my.mail.ru/community/physiks.princips/?ref=cat>

<http://quadrica.ucoz.net/>

<https://independent.academia.edu/KasimovVladimir>

<https://vk.com/public128913510>

<https://www.facebook.com/quadrica.m>