

The $n \times n \times n$ Dots Problem: An Improved "Outside the Box" Upper Bound

Marco Ripà¹, Valerio Bencini²

¹ Economics - Institutions and Finance - Roma Tre University, Rome, Italy. e-mail: marcokrt1984@yahoo.it

² Scientific High School G. Galilei, Erba, Italy. e-mail: valerio.bencini@gmail.com

Abstract: In this paper we describe two new patterns, in order to improve the upper bound for the Ripà's $n \times n \times n$ points problem, saving a few lines for many values of n . The new upper bound, for any $n \geq 6$, becomes $h_u(n) = \text{int}((3/2 * n^2) + \text{int}(n/4) - \text{int}((n-1)/4) + \text{int}((n+1)/4) - \text{int}((n+2)/4) + n - 2$, where $\text{int}(x) = \text{floor}(x)$.

Keywords: topology, inside the box, nine dots, straight line, outside the box, upper bound, graph theory, three-dimensional, segment, point.

AMS Classification: Primary 91A44; Secondary 37F20, 91A46.

1. Presentazione del problema

Il problema $n \times n \times n$ è una estensione del noto *Nine Dots Puzzle* risalente al 1914 [1], formalizzata da Ripà e Ramirez nel 2013 [2].

Ci si chiede qual è il minimo numero di segmenti di una spezzata che sono necessari per unire $n \times n \times n$ punti (adimensionali), disposti in una griglia regolare tridimensionale. I punti sono equidistanti tra loro e sono allineati secondo le tre dimensioni spaziali, in modo tale da essere racchiudibili in un cubo di dimensione $(n-1) \times (n-1) \times (n-1)$, ponendo come unitaria la distanza minima fra due punti.

Gli schemi risolutivi presentati in questo articolo non si propongono di evitare di travalicare i confini del cubo immaginario summenzionato, bensì hanno il solo fine di abbassare, per molti $n \geq 6$, il limite massimo dimostrato in precedenza [3].

2. Descrizione dello schema risolutivo

Immaginando di dividere la griglia cubica $n \times n \times n$ in n piani identici, aiutiamoci visivamente con il disegno mostrato in *Figura 1* e l'ausilio dei quattro colori rosso, blu, verde e giallo per distinguere gli altrettanti gruppi di linee implicati.

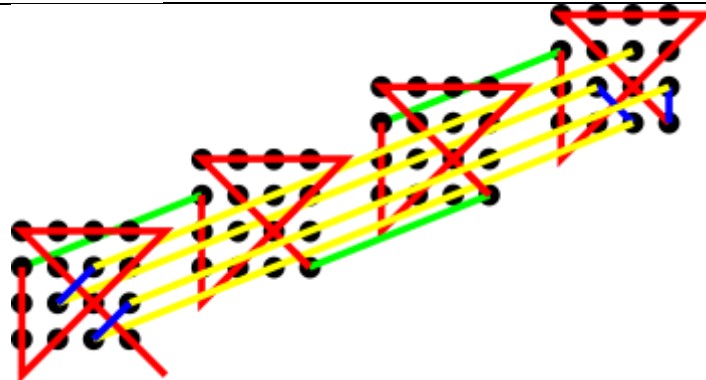
2.1 - Andiamo a tracciare sul primo piano (esterno) q **segmenti rossi** come riportato nei due schemi fissi mostrati in *Figura 6* e in *Figura 7*: quale schema usare nello specifico verrà chiarito più avanti.

Raggiungiamo quindi il piano seguente tramite il primo **segmento verde** mostrato in *Figura 1* e tracciamo altri q **segmenti rossi** come indicato in *Figura 2*, ma questa volta al contrario (procedendo a ritroso rispetto al percorso seguito nel caso del piano di partenza). Ripetiamo iterativamente la stessa procedura fino al completamento del pattern nell' n -esimo piano (opposto al piano di partenza).

Indicando con p il numero di punti collegati per mezzo dei q **segmenti rossi** su un dato piano, notiamo che rimangono ancora da unire $n^2 - p$ punti per ciascuno degli n piani (il perché siano proprio di $n^2 - p$ punti appare lapalissiano, essendo n^2 i punti che compongono ciascuna griglia prima di eliminarne p tramite i q segmenti rossi); le *Figure 3, 4 e 5* sottolineano visivamente quanto poc'anzi osservato. Il numero dei punti residui è dunque lo stesso per ogni piano e si tratta di punti "allineati" tra loro, come mostrato in *Figura 1* e in *Figura 5*.

2.2 - Dal punto terminale dell'ultimo segmento tracciato sul piano opposto a quello di partenza, si traccia quindi il **segmento blu** verso il primo di questi $n^2 - p$ punti dello stesso piano (*Figura 4*) e poi se ne traccia uno **giallo** a collegare altri $n - 1$ punti residui; ci si sposta nuovamente sul piano come mostrato in *Figura 5* e si ripete la procedura fino a completamento, rimbalzando tra i due piani esterni con i **segmenti gialli** e posizionandosi opportunamente sul medesimo piano con i **segmenti blu** (*Figura 5*).

FIGURA 1. ESEMPIO ($n=4$, pattern 2, $q=4$, $p=12$)



numero *segmenti rossi*: q segmenti del *pattern 2* \times n piani

numero *segmenti verdi*: $n - 1$ segmenti per collegare n piani

numero *segmenti blu*: $n^2 - p$ segmenti per collegare $n^2 - p$ punti a due a due

numero *segmenti gialli*: $n^2 - p$ segmenti per collegare $n^2 - p$ punti del primo piano con $n^2 - p$ punti dell' n -esimo piano, passando per n punti con ogni segmento

Segmenti utilizzati:

$$h = q \times n + n - 1 + n^2 - p + n^2 - p = 4 \times 4 + 4 - 1 + 4^2 - 12 + 4^2 - 12 = 27$$

FIGURA 2. Caso $6 \times 6 \times 6$, schema base del primo piano secondo il pattern 1 (riportato in *Figura 6*):

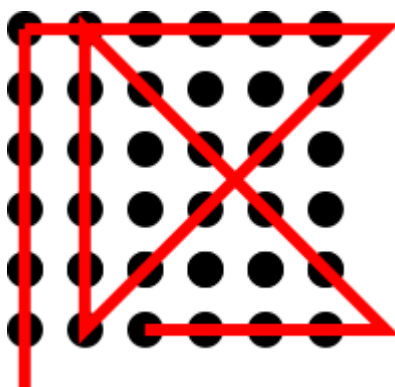


FIGURA 3. Segmenti rossi e $n-1$ segmenti verdi di collegamento su ogni piano:

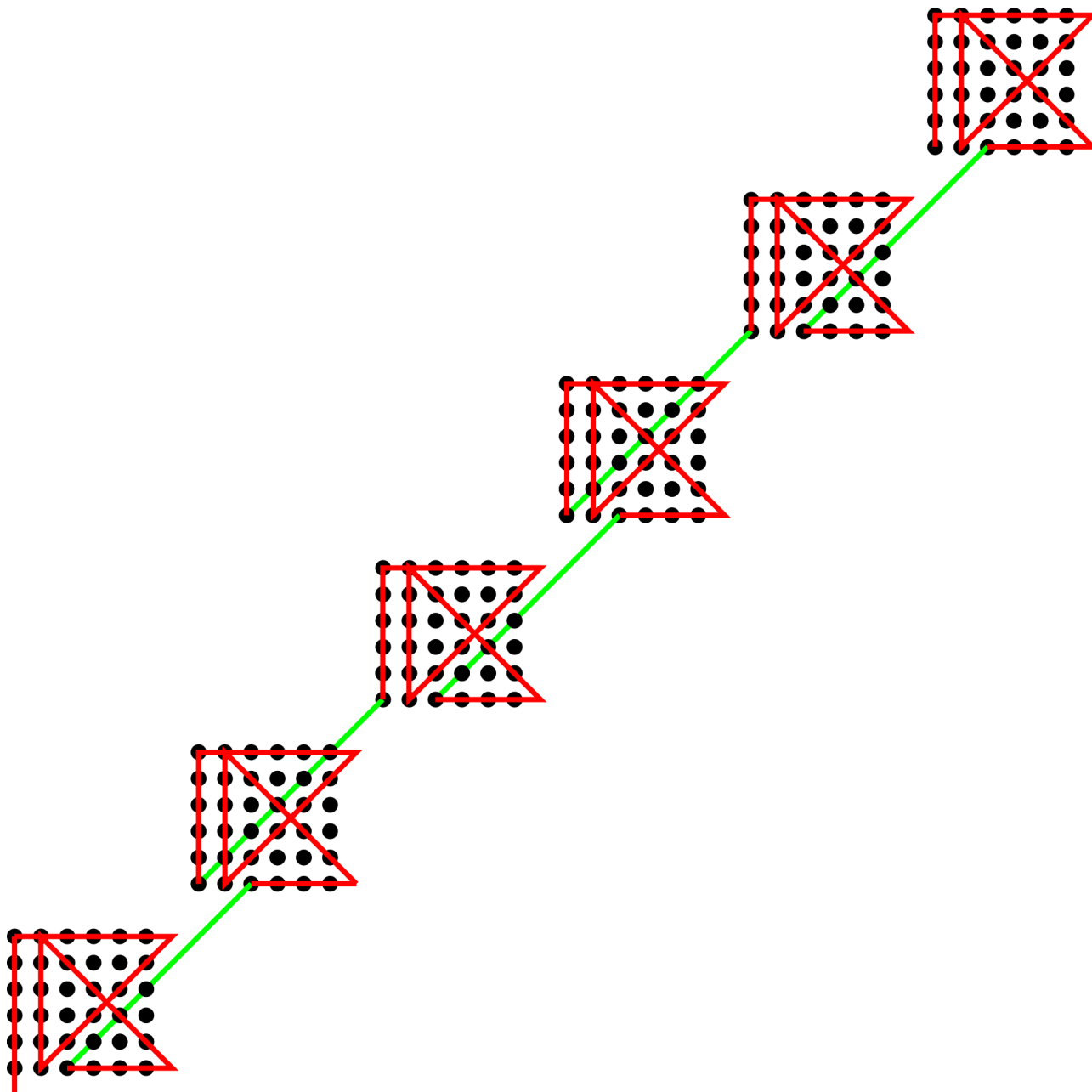


FIGURA 4. Segmento blu di collegamento, giacente sul piano opposto a quello di partenza:

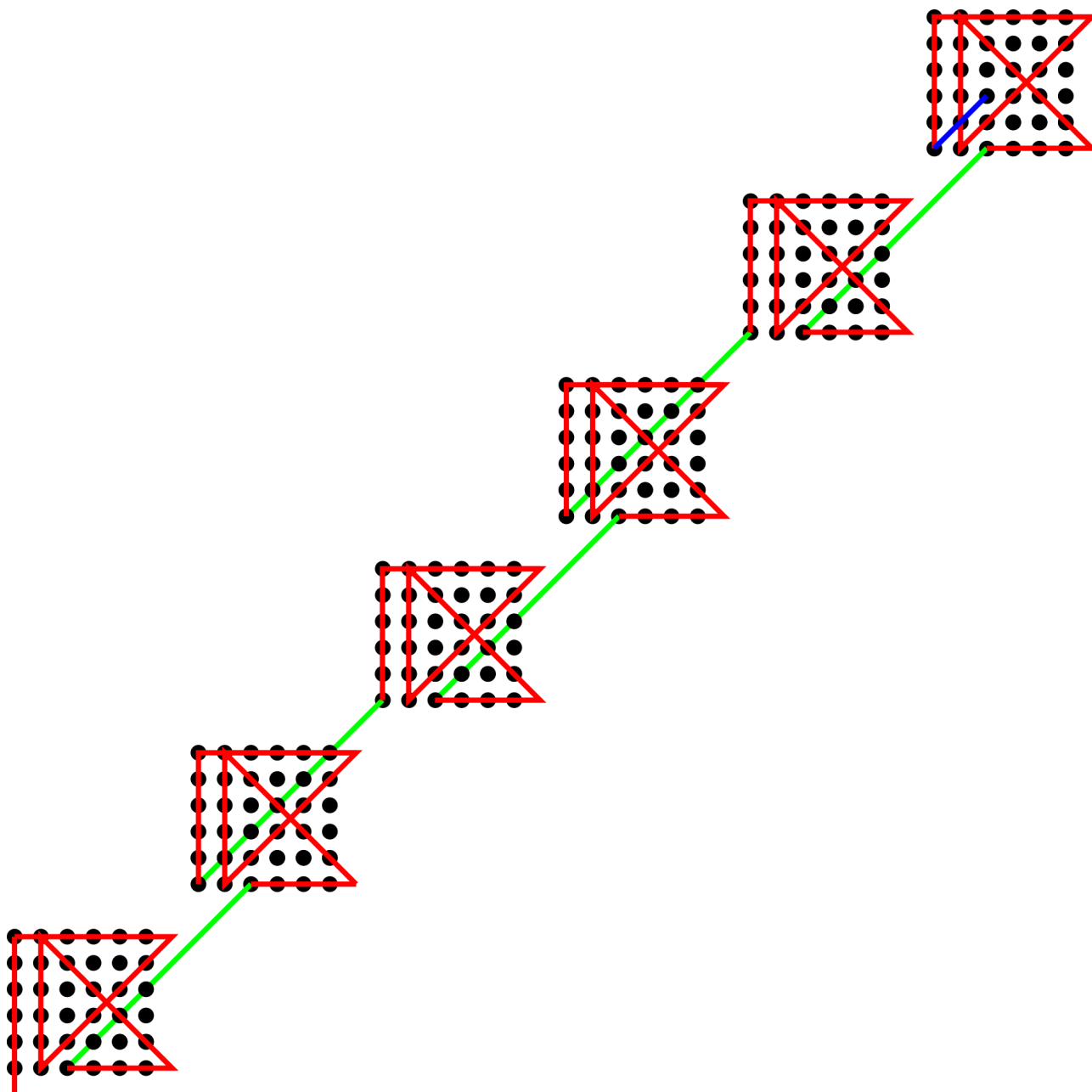
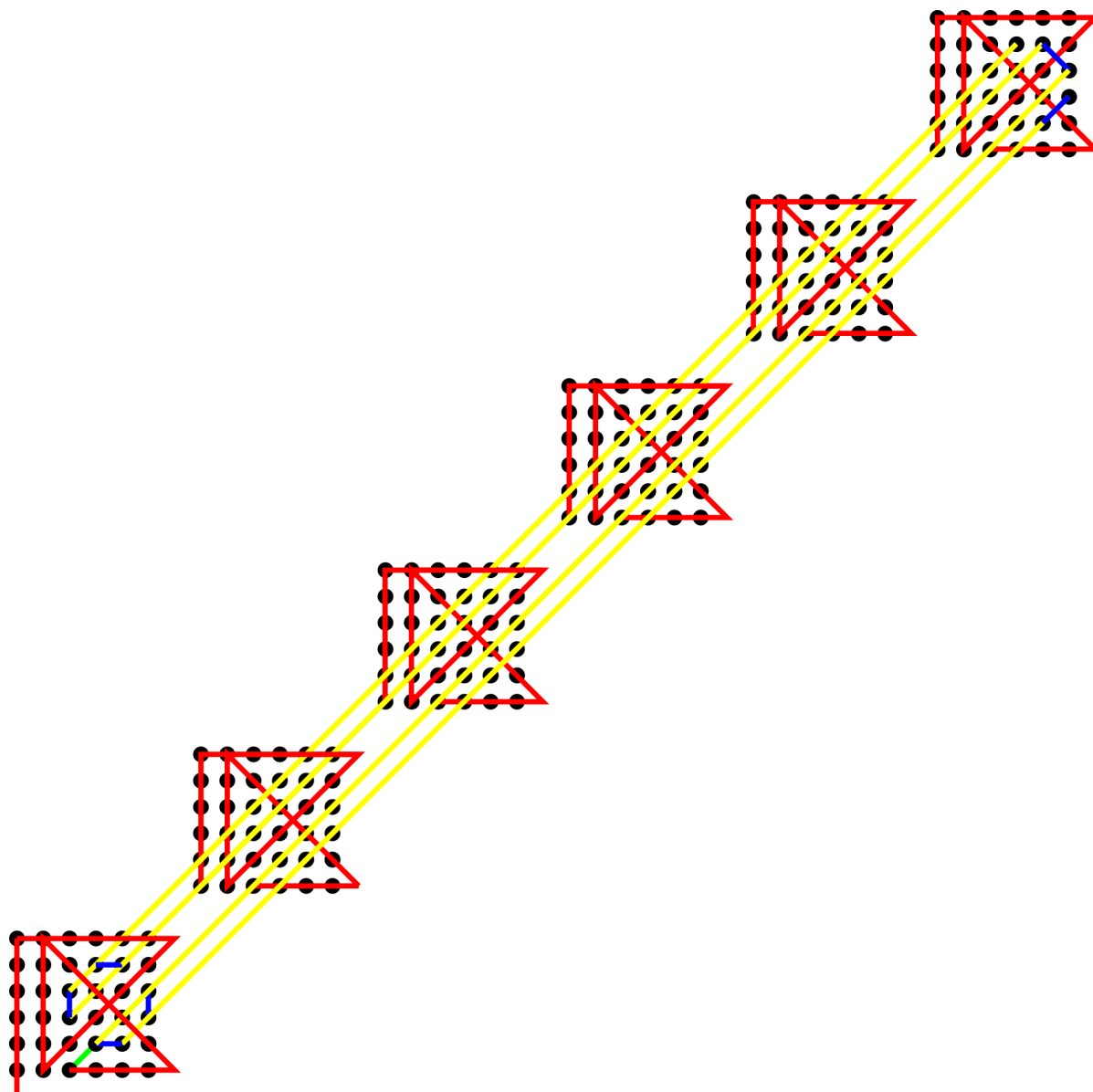
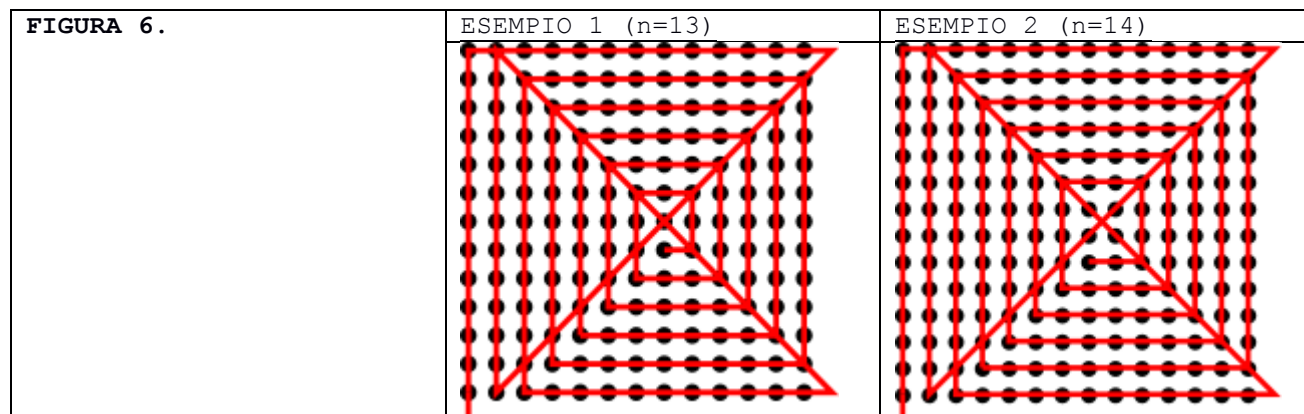


FIGURA 5. Segmenti gialli che attraversano n punti ciascuno e segmenti blu di collegamento sui due piani esterni e opposti:



3. Pattern

Pattern 1:



Per disegnare il *Pattern 1*, si parte dal punto in basso a sinistra, si sale fino al punto in alto a sinistra, si oltrepassa di un'unità il punto all'estrema destra, si scende in diagonale fino a raggiungere il punto in basso a sinistra e così via, seguendo lo schema in alto.

Raggruppiamo ora i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli che sono già stati attraversati dai segmenti precedenti:

Numero segmento (q)	Numero punti (se $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	Numero punti (se $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
1	n	n
2	$n-1$	$n-1$
3	$n-1$	$n-1$
4	$n-2$	$n-2$
5	$n-3$	$n-2$
6	$n-2$	$n-2$
7	$n-4$	$n-4$
8	$n-4$	$n-4$
9	$n-4$	$n-4$
10	$n-4$	$n-4$
11	$n-6$	$n-6$
12	$n-6$	$n-6$
13	$n-6$	$n-6$
14	$n-6$	$n-6$
15	$n-8$	$n-8$
16	$n-8$	$n-8$
17	$n-8$	$n-8$
18	$n-8$	$n-8$
...

Sommando progressivamente (a cascata) i valori della variabile "numero punti", di cui sopra, si ottiene:

p (se $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	p (se $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
n	n
$2n-1$	$2n-1$
$3n-2$	$3n-2$
$4n-4$	$4n-4$
$5n-7$	$5n-6$
$6n-9$	$6n-8$
$7n-13$	$7n-12$
$8n-17$	$8n-16$
$9n-21$	$9n-20$
$10n-25$	$10n-24$
$11n-31$	$11n-30$
$12n-37$	$12n-36$
$13n-43$	$13n-42$
$14n-49$	$14n-48$
$15n-57$	$15n-56$
$16n-65$	$16n-64$
$17n-73$	$17n-72$
$18n-81$	$18n-80$
...	...

Raggruppiamo i valori di p in maniera tale da metterne in risalto la progressione:

p (se $n=2m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	p (se $n=2m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
n	n $3n-2$ $5n-6$ $7n-12$ $9n-20$ $11n-30$ $13n-42$ $15n-56$ $17n-72$...
$2n-1$	$2n-1$
$3n-2$	$4n-4$ $8n-16$ $12n-36$ $16n-64$...
$4n-4$	$6n-8$ $10n-24$ $14n-48$ $18n-80$...
$5n-7$ $7n-13$ $9n-21$ $11n-31$ $13n-43$ $15n-57$ $17n-73$...	-
$6n-9$ $10n-25$ $14n-49$ $18n-81$...	-
$8n-17$ $12n-37$ $16n-65$...	-

Si nota che p è scritto nella forma $q \times n - a, \forall a \in \mathbb{N}$. Troviamo I valori di a sulla base della precedente tabella:

Se $n=2m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che:

- Se $q=1, h = n$
- Se $q=2, h = 2n-1$
- Se $q=3, h = 3n-2$
- Se $q=4, h = 4n-4$
- Se $q=2r-1, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}, h = q \times n - (q^2+3)/4$
- Se $q=4r+2, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - q^2/4$
- Se $q=4r, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, h = q \times n - (q^2+4)/4$

Se $n=2m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che:

- Se $q=2r-1, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - (q^2-1)/4$
- Se $q=2, h = 2n-1$
- Se $q=4r, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - q^2/4$
- Se $q=4r+2, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - (q^2-4)/4$

Sapendo che n^2-p corrisponde al numero di punti di un *pattern* che restano ancora da congiungere dopo aver tracciato q linee, definiamo $h=h(q,n)$ come $q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-p)$, al variare di q e n nei naturali.

Posto $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta che:

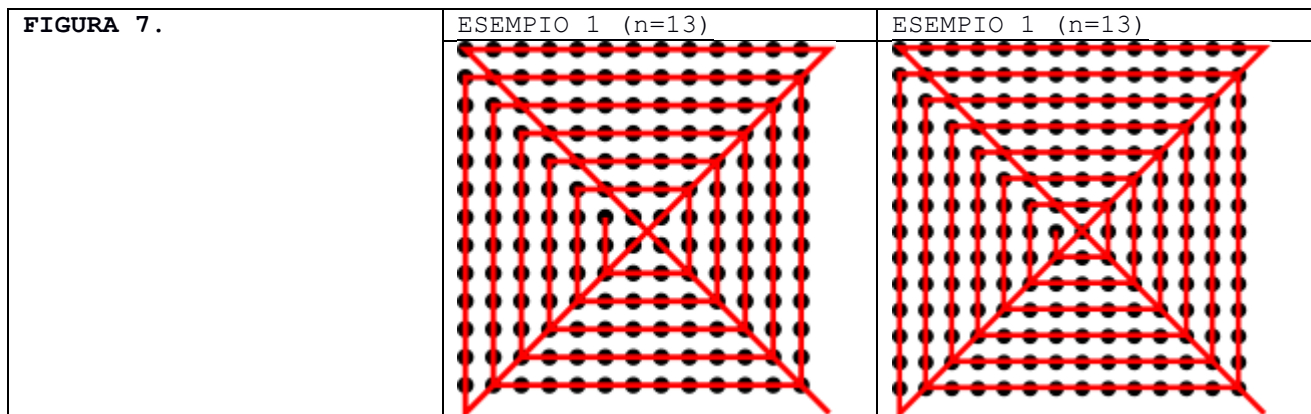
- Se $q=1$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-n)$
- Se $q=2$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2-(2n-1)]$
- Se $q=3$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2-(3n-2)]$
- Se $q=4$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2-(4n-4)]$
- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2+3)/4]\}$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2-(q \times n-q^2/4)]$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2+4)/4]\}$

Posto $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta che:

- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2-1)/4]\}$
- Se $q=2$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2-(2n-1)]$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2-(q \times n-q^2/4)]$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2-[q \times n-(q^2-4)/4]\}$

Ripetiamo dunque le medesime considerazioni con riferimento al *Pattern 2*, mostarto di seguito.

Pattern 2:



Per disegnare il *Pattern 2*, si parte dal punto in basso a destra, si sale in diagonale fino al punto in alto a sinistra, si procede verso destra fino a oltrepassare di un'unità il punto più estremo della griglia, si scende in diagonale in basso a sinistra e si continua così, seguendo lo schema riportato sopra.

Raggruppiamo i punti per cui passa ciascun segmento, escludendo quelli che sono già stati attraversati dai segmenti precedenti, in perfetta analogia al caso speculare descritto prima.

Numero segmento (q)	Numero punti (se $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	Numero punti (se $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
1	n	n
2	n-1	n-1
3	n-1	n-2
4	n-1	n-1
5	n-3	n-3
6	n-3	n-3
7	n-3	n-3
8	n-3	n-3
9	n-5	n-5
10	n-5	n-5
11	n-5	n-5
12	n-5	n-5
13	n-7	n-7
14	n-7	n-7
15	n-7	n-7
16	n-7	n-7
...

Effettuando le somme progressive dei valori della tabella precedente, calcoliamo p:

p (se $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	p (se $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
n	n
2n-1	2n-1
3n-2	3n-3
4n-3	4n-4
5n-6	5n-7
6n-9	6n-10
7n-12	7n-13
8n-15	8n-16
9n-20	9n-21
10n-25	10n-26
11n-30	11n-31
12n-35	12n-36
13n-42	13n-43
14n-49	14n-50
15n-56	15n-57
16n-63	16n-64
...	...

Raggruppiamo i valori di p in maniera opportuna:

p (se $n=2m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)	p (se $n=2m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
n $3n-2$ $5n-6$ $7n-12$ $9n-20$ $11n-30$ $13n-42$ $15n-56$...	n
$2n-1$ $6n-9$ $10n-25$ $14n-49$...	$2n-1$
$4n-3$ $8n-15$ $12n-35$ $16n-63$...	$3n-3$ $5n-7$ $7n-13$ $9n-21$ $11n-31$ $13n-43$ $15n-57$...
-	$4n-4$ $8n-16$ $12n-36$ $16n-64$...
-	$6n-10$ $10n-26$ $14n-50$...

Si nota che p è scritto nella forma $q \times n - a, \forall a \in \mathbb{N}$, e troviamo i valori di a sulla base della precedente tabella:

Se $n=2m-1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che:

- Se $q=2r-1, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - (q^2 - 1) / 4$
- Se $q=4r+2, \forall r \in \mathbb{N}, h = q \times n - q^2 / 4$
- Se $q=4r, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - (q^2 - 4) / 4$

Se $n=2m, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si ha che:

- Se $q=1, h = n$
- Se $q=2, h = 2n-1$
- Se $q=2r-1, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, h = q \times n - (q^2 + 3) / 4$
- Se $q=4r, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - q^2 / 4$
- Se $q=4r+2, \forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, h = q \times n - (q^2 + 4) / 4$

Esprimiamo h nella forma $q \times n + n - 1 + 2 \times (n^2 - p)$.

Si calcola, quindi, h come $q \times n + n - 1 + 2 \times (n^2 - p)$, al variare di q , al variare di n .

Posto $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta che:

- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2-1)/4]\}$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2/4)]$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2-4)/4]\}$

Posto $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, risulta che:

- Se $q=1$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-n)$
- Se $q=2$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (2n-1)]$
- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2+3)/4]\}$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2/4)]$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2+4)/4]\}$

4. Formalizzazione del nuovo upper bound

Richiamando i valori di h ottenuti in precedenza per il *Pattern 1* e per il *Pattern 2*, proponiamoci di condensare i vari casi in un'unica formula compatta.

Pattern 1:

Ponendo $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sappiamo che:

- Se $q=1$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-n)$
- Se $q=2$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (2n-1)]$
- Se $q=3$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (3n-2)]$
- Se $q=4$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (4n-4)]$
- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2+3)/4]\}$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2/4)]$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2+4)/4]\}$

Ponendo $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sappiamo che:

- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2-1)/4]\}$
- Se $q=2$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (2n-1)]$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2/4)]$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2-4)/4]\}$

Pattern 2:

Ponendo $n=2m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sappiamo che:

- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2-1)/4]\}$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2/4)]$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2-4)/4]\}$

Ponendo $n=2m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sappiamo che:

- Se $q=1$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times (n^2-n)$
- Se $q=2$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (2n-1)]$
- Se $q=2r-1$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2+3)/4]\}$
- Se $q=4r$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2/4)]$
- Se $q=4r+2$, $\forall r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h = q \times n + n-1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2+4)/4]\}$

Definiamo a questo punto $q_{ottimale}$ come il miglior valore di q tale che h abbia il minor valore possibile.

Per trovare $q_{ottimale}$, calcoliamo h al variare di q , sia nel caso del *Pattern 1* che in quello del *Pattern 2*:

n	q	h con il Pattern 1	h con il Pattern 2
1	1	1	1
2	1	7	7
	2	7	7
	3	7	7
	4	-	7
3	1	17	17
	2	16	16
	3	15	15
	4	16	14
	5	19	-
	6	20	-
4	1	31	31
	2	29	29
	3	27	29
	4	27	27
	5	27	29
	6	27	31
	7	-	33
	8	-	35
5	1	49	49
	2	46	46
	3	43	43
	4	42	40
	5	43	41
	6	42	42
	7	45	43
	8	48	44
	9	51	-
	10	54	-
6	1	71	71
	2	67	67
	3	63	65
	4	61	61
	5	59	61
	6	57	61
	7	59	61
	8	61	61
	9	63	65
	10	65	69
	11	-	73
	12	-	77
...

I valori di $q_{ottimale}$ risultano, dunque, i seguenti:

Pattern 1:

- Se $n=1$, $q_{ott} = 1$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 1 \vee q_{ott} = 2 \vee q_{ott} = 3$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n - 1 \vee q_{ott} = n \vee q_{ott} = n + 1 \vee q_{ott} = n + 2$
- Se $n=4m+2$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n$

Pattern 2:

- Se $n=1$, $q_{ott} = 1$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 1 \vee q_{ott} = 2 \vee q_{ott} = 3 \vee q_{ott} = 4$
- Se $n=4m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n + 1$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n$
- Se $n=4m+1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n - 1$

Pertanto, i valori di h con **$q_{ottimale}$** sono di seguito determinati.

Pattern 1:

- Se $n=1$, $q_{ott} = 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times (n^2 - n) = \underline{1}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 1) / 4]\} = \underline{7}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 2$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times [n^2 - (2n - 1)] = \underline{7}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 3$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 1) / 4]\} = \underline{7}$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n - 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 1) / 4]\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 1}}$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - (q_{ott} \times n - q_{ott}^2 / 4)\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 1}}$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} - \{0\}$:
 $q_{ott} = n + 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 1) / 4]\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 1}}$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} - \{0\}$:
 $q_{ott} = n + 2$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 4) / 4]\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 1}}$
- Se $n=4m+2$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 4) / 4]\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 3}}$

Pattern 2:

- Se $n=1$, $q_{ott} = 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 1) / 4]\} = \underline{1}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 1$
 $h = q \times n + n - 1 + 2 \times (n^2 - n) = \underline{7}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 2$
 $h = q \times n + n - 1 + 2 \times [n^2 - (2n - 1)] = \underline{7}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 3$
 $h = q \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q \times n - (q^2 + 3) / 4]\} = \underline{7}$
- Se $n=2$, $q_{ott} = 4$
 $h = q \times n + n - 1 + 2 \times [n^2 - (q \times n - q^2 / 4)] = \underline{7}$
- Se $n=4m-1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n + 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 4) / 4]\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 5/2}}$
- Se $n=4m$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times [n^2 - (q_{ott} \times n - q_{ott}^2 / 4)] = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 1}}$
- Se $n=4m+1$, $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $q_{ott} = n - 1$
 $h = q_{ott} \times n + n - 1 + 2 \times \{n^2 - [q_{ott} \times n - (q_{ott}^2 - 4) / 4]\} = \underline{\underline{3/2 \times n^2 + n - 5/2}}$

Notiamo a questo punto che è possibile esprimere sinteticamente i risultati di cui sopra utilizzando la funzione floor(x), avente la funzione di sostituire x con il più grande intero positivo $\leq x$.

Nel caso in questione, è evidente che floor(x) corrisponderà alla parte intera degli addendi che andranno a comporre la somma algebrica che ci fornirà il valore di h al variare di n.

Nello specifico,

$$h(q_{ott}) := h_u(n) = \left\lfloor \frac{3}{2} \cdot n^2 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n - 2$$

Tabella che esprime $h_u(n)$, il limite superiore corrente del problema $n \times n \times n$. I valori $h(4)=27$ e $h(5)=40$ non corrispondono al corrente "upper bound" del problema.

n	$h_u(n)$
1	1
2	7
3	14
4	27
5	40
6	57
7	78
8	103
9	128
10	157
11	190
12	227
13	264
14	305
15	350
16	399
17	448
18	501
19	558
20	619
...	...
42	2.685
...	...

Risultati migliori di quelli proposti, trovati da Marco Ripà:

$h(4) = \underline{25}$ (<http://vixra.org/pdf/1707.0298v1.pdf>)

$h(5) = \underline{39}$ (<https://www.youtube.com/watch?v=xtL28RCCbTY>)

Bibliografia

- [1] Loyd, S., *Cyclopedia of Puzzles*. *The Lamb Publishing Company*, 1914, p. 301.
- [2] Ripà, M., Ramirez, P., *The Nine Dots Puzzle Extended $n \times n \times n \dots n$ Points*, viXra, 5 Sept. 2013, <http://vixra.org/pdf/1307.0021v4.pdf>.
- [3] Ripà, M., *The $n \times n \times n$ Dots Problem Optimal Solution*, viXra, 5 July 2017, <http://vixra.org/pdf/1707.0298v1.pdf>.