

Франц Герман

Теорема о поляре трёхвершинника

franz.h-n@yandex.ru

Теорема: *Если дан произвольный трёхвершинник и произвольная коника, то точки пересечения сторон трёхвершинника и поляр противоположных вершин лежат на одной прямой.*

Эту прямую мы и будем называть полярной данного трёхвершинника относительно данной коники.

Итак, рассмотрим произвольный трёхвершинник $A_1A_2A_3$ и произвольную конику G (Рис. 1).

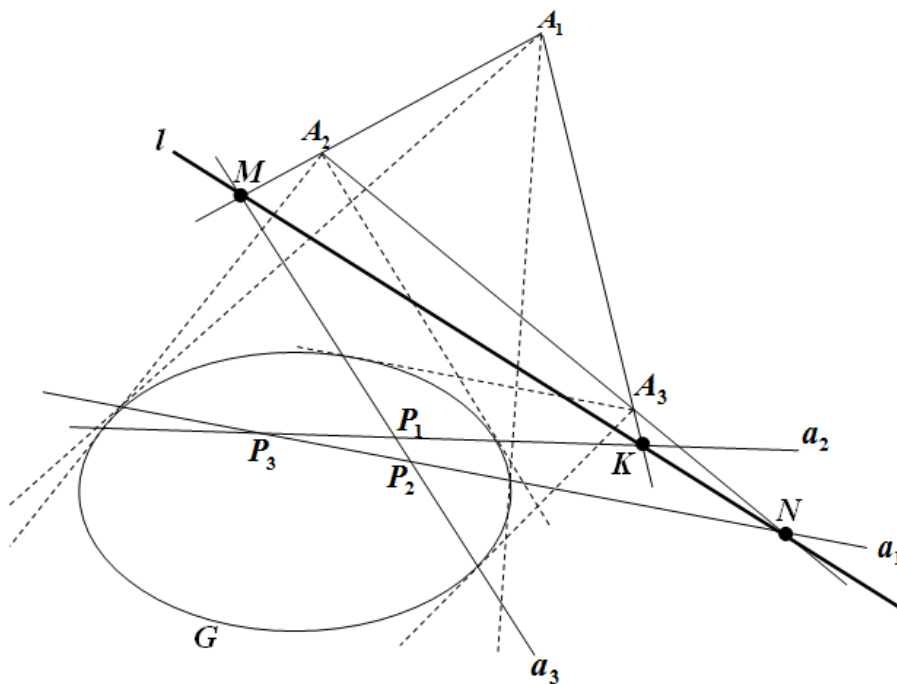


Рис. 1

Пунктирными линиями показано построение поляр.

a_1 - поляр вершины A_1 , $N \equiv (A_2A_3 \cap a_1)$.

a_2 - поляр вершины A_2 , $K \equiv (A_1A_3 \cap a_2)$.

a_3 - поляр вершины A_3 , $M \equiv (A_1A_2 \cap a_3)$.

Докажем, что точки N , K , M лежат на одной прямой l - полярной трёхвершинника.

Автор не ставил своей целью найти короткое и красивое доказательство. Задача стояла – доказать теорему.

Доказательство:

Как известно произвольная коника имеет в общем виде такое уравнение:

$$G: \sum_{i=1}^3 g_{ij} x_i x_j = 0 \text{ или } g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0.$$

Пусть трёхвершинник $A_1A_2A_3$ определяет проективный репер $\{A_1, A_2, A_3, E\}$, т. е. $A_1(1:0:0)$; $A_2(0:1:0)$; $A_3(0:0:1)$; $E(1:1:1)$. Тогда уравнение поляры точки A_3 будет иметь вид:

$$g_{11} \cdot 0 \cdot x_1 + g_{22} \cdot 0 \cdot x_2 + g_{33} \cdot 1 \cdot x_3 + g_{12}(x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0) + g_{13}(x_1 \cdot 1 + x_3 \cdot 0) + g_{23}(x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0) = \\ = g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_2 в данном репере будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x_3 = 0.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ g_{33}x_3 + g_{13}x_1 + g_{23}x_2 = 0 \end{cases}$$

найдем координаты точки $M(g_{23} : -g_{13} : 0)$.

Аналогично находятся координаты точек $K(g_{23} : 0 : -g_{12})$ и $N(0 : g_{13} : -g_{12})$.

Убедимся, что точки N , K , M лежат на одной прямой, т. е. определитель, составленный из координат этих точек должен быть равен нулю. Действительно:

$$\begin{vmatrix} g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \\ 0 & g_{13} & -g_{12} \end{vmatrix} = g_{23}g_{12}g_{13} - g_{23}g_{12}g_{13} = 0.$$

Найдем уравнение поляры треугольника.

$$l: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ g_{23} & -g_{13} & 0 \\ g_{23} & 0 & -g_{12} \end{vmatrix} = x_1g_{12}g_{13} + x_2g_{12}g_{23} + x_3g_{13}g_{23} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{x_1}{g_{23}} + \frac{x_2}{g_{13}} + \frac{x_3}{g_{12}} = 0 \text{ при } g_{12} \neq g_{13} \neq g_{23} \neq 0$$

Как и для всякой теоремы проективной геометрии справедлива двойственная ей

Теорема: *Если дан произвольный трёхвершинник и произвольная коника, то прямые, проходящие через вершины трёхвершинника и полюсы противоположных сторон, пересекаются в одной точке.*

Мы будем называть эту точку полюсом данного трёхвершинника относительно данной коники.

Доказательство:

Введём обозначения:

$$P_1 \equiv (a_2 \cap a_3) - \text{полюс } A_2A_3$$

$$P_2 \equiv (a_1 \cap a_3) - \text{полюс } A_1A_3$$

$$P_3 \equiv (a_1 \cap a_2) - \text{полюс } A_1A_2$$

Рассмотрим трёхвершинники $A_1A_2A_3$ и $P_1P_2P_3$. $(P_1P_2 \cap A_1A_2) \equiv M$; $(P_1P_3 \cap A_1A_3) \equiv K$; $(P_2P_3 \cap A_2A_3) \equiv N$, но точки N, K, M лежат на одной прямой, следовательно, по теореме Дезарга, прямые A_1P_1 , A_2P_2 и A_3P_3 пересекаются в одной точке S . Что и требовалось доказать.

Следствие: точка S является полюсом прямой l относительно данной коники.

Доказательство:

Точка $K \in A_1A_3$, точка P_2 является полюсом прямой A_1A_3 , следовательно точка K сопряжена с точкой P_2 . Также точка $K \in a_2$, следовательно K сопряжена с точкой A_2 . Следовательно точка K является полюсом прямой A_2P_2 . Рассуждая аналогично, можно показать, что точка M является полюсом прямой A_3P_3 . Но $S \equiv (A_2P_2 \cap A_3P_3)$, следовательно S сопряжена с точкой K и с точкой M , а т.к. $K \in l$ и $M \in l$, то точка S является полюсом прямой l . Что и требовалось доказать.

Примеры задач, при решении которых используется теорема «о поляре трёхвершинника»

Предполагается, что задачи на построение могут быть использованы не только для работы со студентами, и для факультативных работ со школьниками. Поэтому в рамках этой темы мы будем пользоваться школьной терминологией, используя иногда вместо слов «коника» и «трёхвершинник» привычные в школе термины: «окружность» и «треугольник».

Задача 1. Дана прямая AC , точка C и точка B и поляры точек A, B, C относительно некоторой коники.
Построить точку A .

Решение :

Обозначим на рисунке (Рис. 2) прямую AC – (ac) , поляры точек A, B, C буквами a, b, c соответственно.

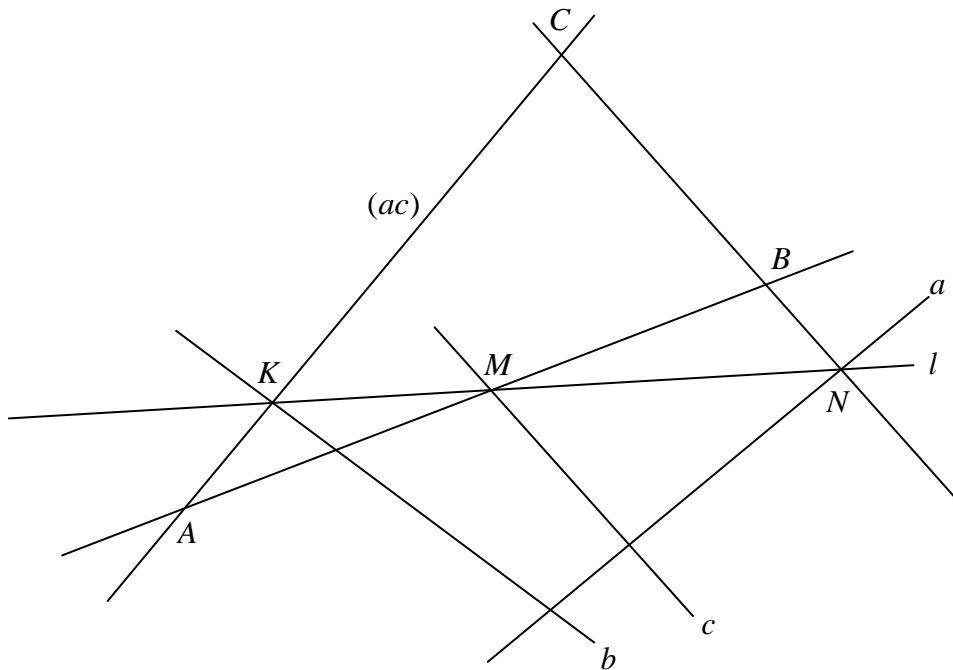


Рис. 2

Построим полярю треугольника ABC . Обозначим её - l . Для этого найдём точку пересечения $N \equiv (CB \cap a)$ и точку пересечения $K \equiv ((ac) \cap b)$. Прямая l пройдёт через эти точки.

В силу теоремы «о поляре треугольника», прямая AB должна пересекать полярю c в точке $M \in l$, т.е. $M \in AB$. Проведём MB до пересечения с прямой (ac) . Это и будет искомая точка A .

Задача 2. Даны точки A, B, C и поляры точек A и B . И также одна точка, принадлежащая поляре точки C (все полярные отношения заданы относительно одной и той же некоторой коники).
Построить полярю точки C .

Решение:

Обозначим поляры точек A и B через a и b соответственно (Рис. 3). Построим полярю l треугольника ABC .

$$(a \cap BC) \equiv M; (b \cap AC) \equiv K; l \equiv MK.$$

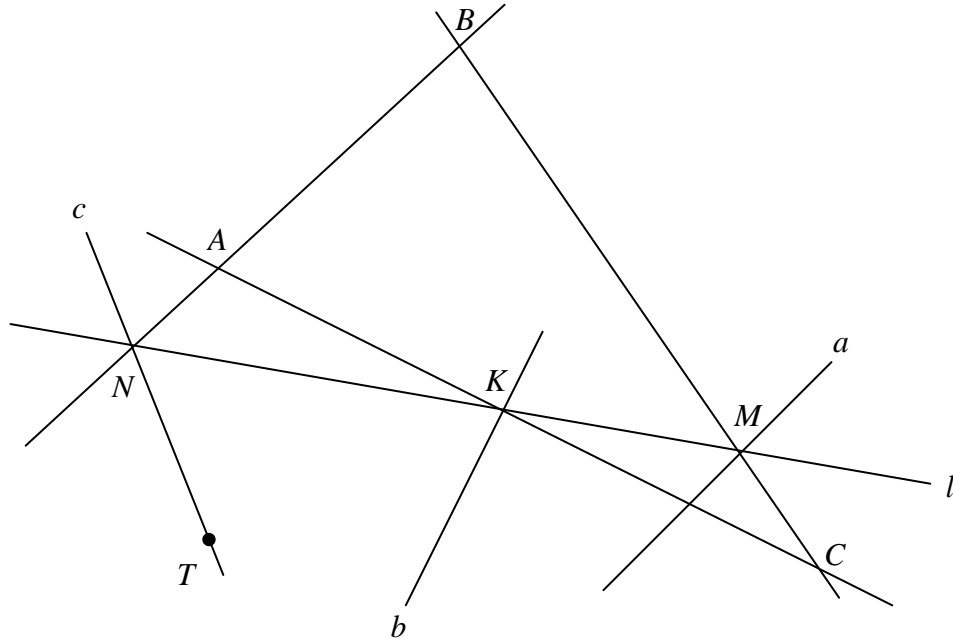


Рис. 3

Обозначим точку, принадлежащую поляре точки C , через T . $(AB \cap l) \equiv N$, тогда, в силу теоремы «о поляре треугольника», поляр $c \equiv TN$.

Задача 3. Даны две прямые и точка, принадлежащая третьей, а также – три поляры точек пересечения этих трёх прямых, относительно некоторой коники. Построить третью прямую.

Решение:

Обозначим точку пересечения данных прямых через A , а полярю, ей соответствующую, через a . Данные прямые обозначим через (ac) и (ab) .

Будем считать, что точка C принадлежит прямой (ac) , а точка B - прямой (ab) соответственно, и CB является искомой прямой. Тогда данные поляры, соответствующие точкам C и B , обозначим соответственно через c и b (Рис. 4).

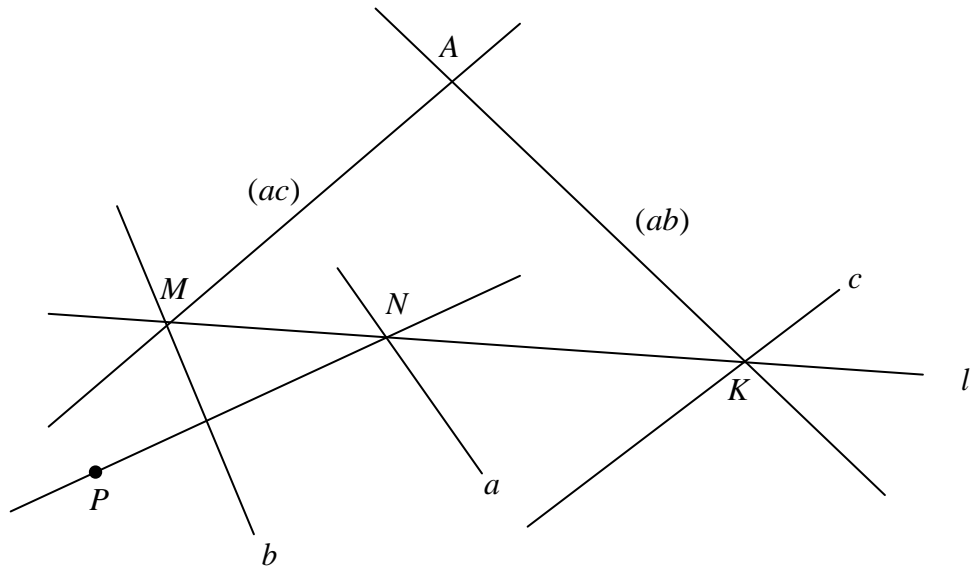


Рис. 4

$((ac) \cap l) \equiv M$, $((ab) \cap l) \equiv K$, тогда $l \equiv MK$ - поляр треугольника ABC . В силу теоремы «о поляре треугольника» $(a \cap l) \equiv N$ и $N \in BC$, но по условию задачи точка P также принадлежит прямой BC . Следовательно прямая PN и является искомой прямой.

Задача 4. Даны три точки A, B, C ; прямая b является полярной точки B , точка K принадлежит полярной точки A , точка D принадлежит полярной треугольника ABC . Все полярные отношения рассматриваются относительно одной и той же некоторой коники.
Построить полярную точки A .

Решение:

Обозначим через l полярную треугольника ABC , а через a полярную точки A . Проведём прямую AC до пересечения с полярной b . Полученную точку обозначим через M . Тогда $MD \equiv l$. Проведём BC до пересечения с полярной l . Обозначим полученную точку через N . В силу теоремы «о поляре треугольника» $N \in a$, но по условию задачи точка $K \in a$. Следовательно искомая полярная $a \equiv KN$ (Рис.5).

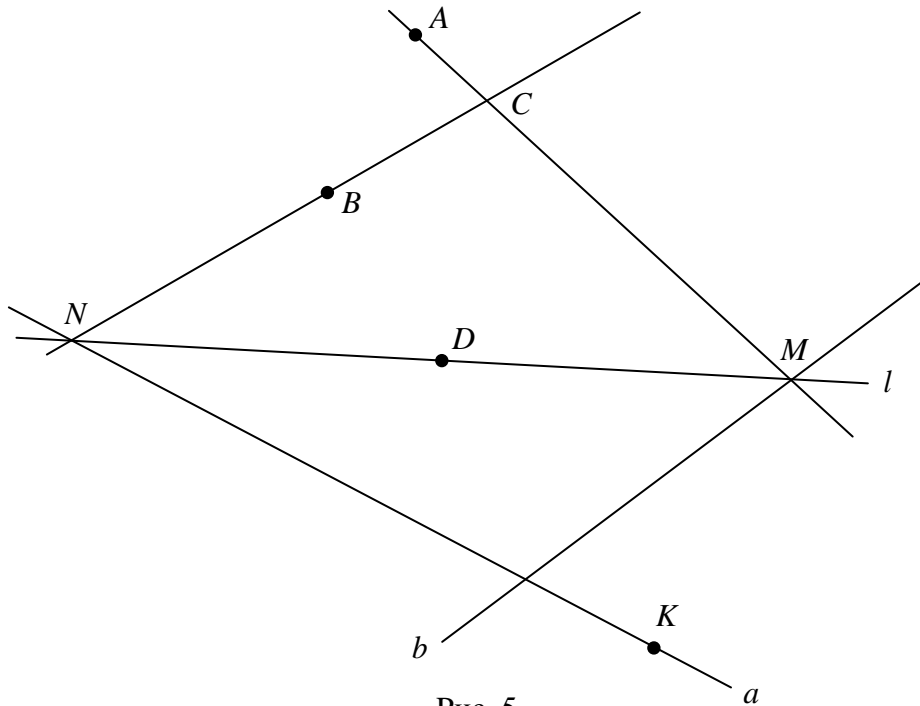


Рис. 5

Задача 5. Даны точки A, B, C . Точка A принадлежит некоторой окружности. Дана также поляр точки C и поляр треугольника ABC относительно этой окружности (назовём такую окружность – окружностью поляры данного треугольника).
Построить окружность поляры треугольника ABC .

Решение:

Обозначим полярю точки C и полярю треугольника ABC соответственно через c и l .

В силу теоремы «о поляре треугольника» прямые AB, c и l пересекаются в одной точке.

Покажем, что центр искомой окружности лежит на прямой, перпендикулярной прямой c и проходящей через точку C .

Возможны три случая.

1. Пусть точка C лежит вне искомой окружности. Построим полярю точки C (Рис. 6).

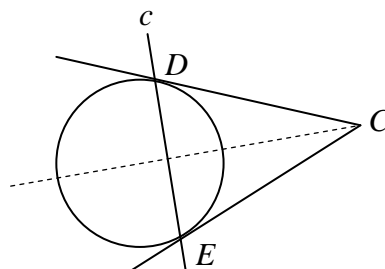


Рис. 6

DC и CE - касательные к окружности, следовательно треугольник DCE - равнобедренный, следовательно перпендикуляр, проведённый через точку C к DE , пройдёт через центр окружности.

2. Пусть точка C лежит на окружности (Рис. 7).

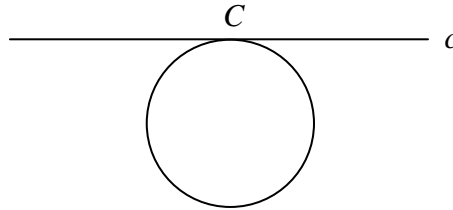


Рис. 7

Поляра точки C будет касательной к окружности в этой точке, т.е. перпендикуляр, восставленный в точке C к прямой c , пройдёт через центр окружности.

3. Пусть точка C лежит внутри окружности (Рис. 8).

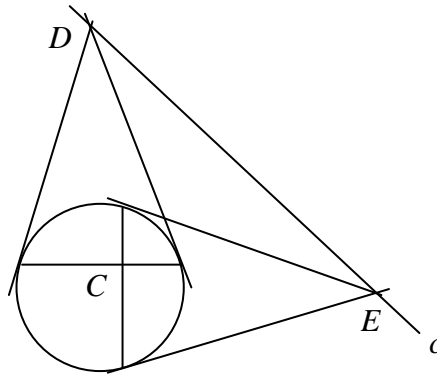


Рис. 8

Проведём через C две хорды одинаковой длины (это всегда можно сделать). На этих хордах, как на основаниях, построим равнобедренные треугольники, боковые стороны которых являются касательными к этой окружности. Тогда прямая, проходящая через вершины D и E полученных, будет полярной точки C . Из Рис. 8 очевидно следует, что прямая, перпендикулярная DE и проходящая через точку C , проходит через центр окружности.

Теперь вернёмся к нашей задаче. Мы имеем точку C и её полярную. Следовательно прямая, перпендикулярная c и проходящая через точку C , будет проходить через центр искомой окружности.

Построим прямую m , перпендикулярную c и проходящую через точку C (Рис. 9).

AN - касательная к искомой окружности и точка A принадлежит этой окружности по условию.

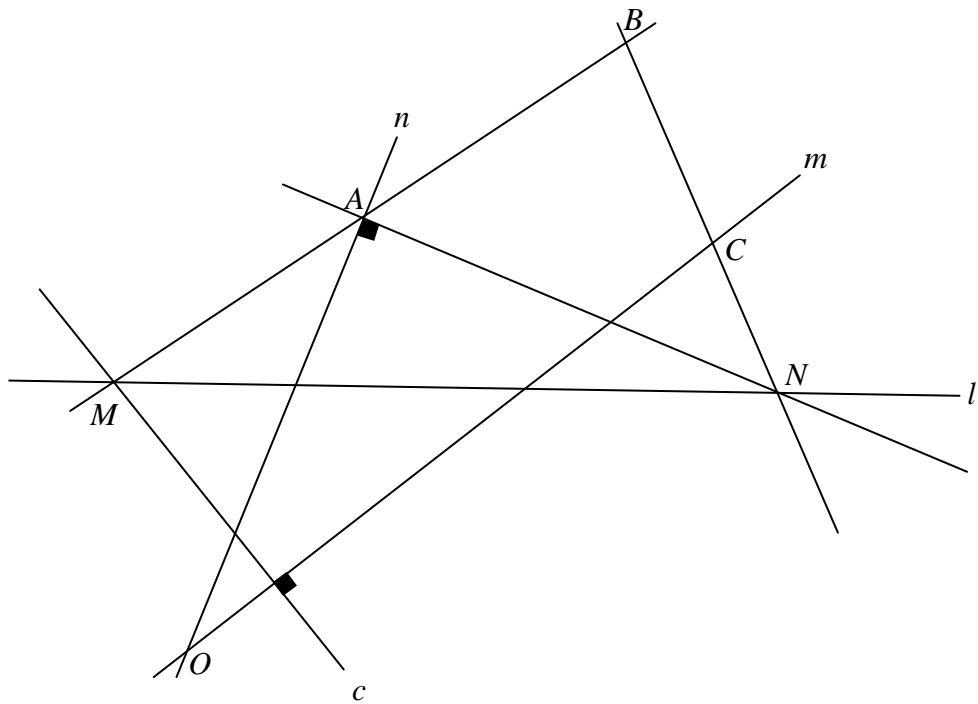


Рис. 9

Построим прямую n , перпендикулярную AN и проходящую через точку A , тогда центр искомой окружности - $O \equiv (n \cap m)$.

Строим искомую окружность с центром в точке O и радиусом OA .

Задача 6. Треугольник ABC описан около данной окружности. Доказать, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания окружности и противоположной стороны, пересекаются в одной точке (частный случай теоремы Брианшона).

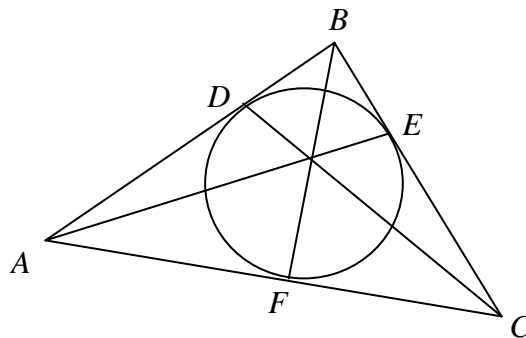


Рис. 10

Решение:

Точка D является полюсом поляры AB , точка E - полюс BC , F - полюс AC . Тогда в силу двойственной теоремы «о поляре треугольника», прямые CD , AE и BE будут пересекаться в одной точке.

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Треугольник ABC вписан в окружность. Доказать, что касательные, проходящие через вершины треугольника, пересекаются со сторонами, противоположными данным вершинам, в точках, лежащих на одной прямой (частный случай теоремы Паскаля, Рис. 11).

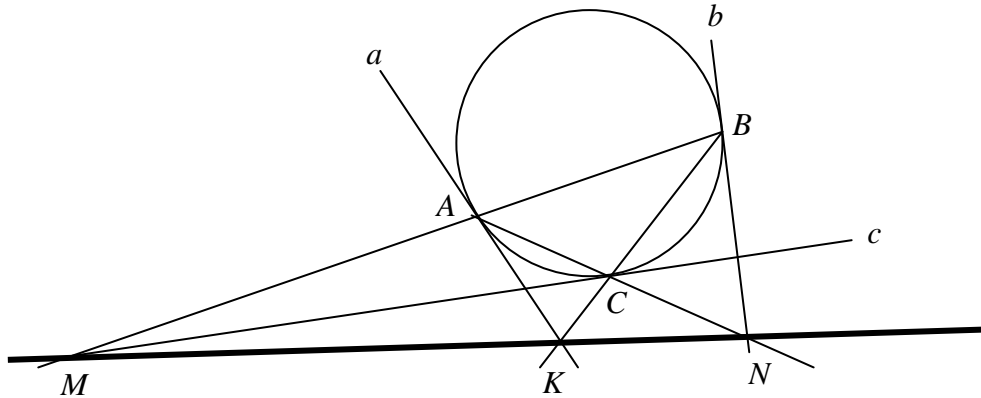


Рис. 11

Решение:

Прямая a является полярной вершины A данного треугольника. Прямые b и c являются полярными точек B и C соответственно. Тогда в силу теоремы «о поляре треугольника» точки $M \equiv (AB \cap c)$, $K \equiv (BC \cap a)$ и $N \equiv (AC \cap b)$ будут лежать на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Задача 8: Дана окружность, вершины A и B и полярная l треугольника ABC . Построить точку C .

Решение:

Сделаем чертёж (Рис. 12).

Построим полярную точки A - a . $(a \cap l) \equiv K$.

Построим полярную точки B - b . $(b \cap l) \equiv M$.

В силу теоремы «о поляре треугольника», прямая AC должна проходить через точку M , а прямая BC должна проходить через точку K .

Построим AC и BC , тогда $C \equiv (AM \cap BK)$.

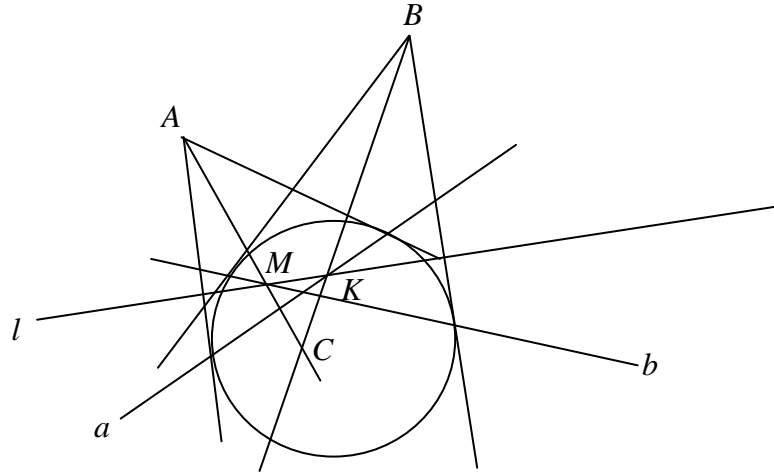


Рис. 12

Задача 9 (Теорема о бесконечно удалённой поляре треугольника):

Если центр окружности поляры треугольника ABC является ортоцентром данного треугольника, то его полярка будет бесконечно удалённой прямой.

Решение:

Обозначим полярку треугольника ABC через l , а поляры вершин A, B, C через a, b и c соответственно. Тогда $M \equiv (AB \cap c)$, $K \equiv (BC \cap a)$ и $N \equiv (AC \cap b)$ где M, K и N принадлежат прямой l .

Если две из точек M, K и N будут бесконечно удалёнными, то и прямая l будет бесконечно удалённой прямой.

Пусть для определённости – это будут точки M и K . Тогда $AB \parallel c$ и $BC \parallel a$ (Рис. 13).

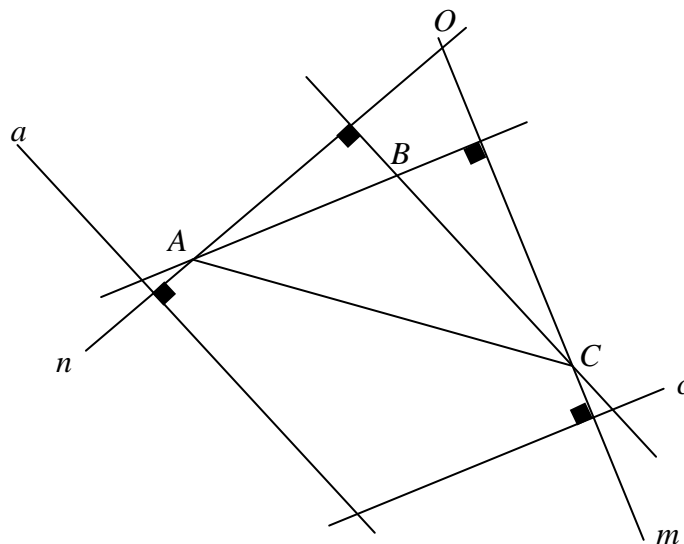


Рис. 13

Построим центр окружности поляры данного треугольника.

Для этого проведём прямую m перпендикулярно прямой c через точку C , а прямую n - перпендикулярно прямой a через точку A . Тогда искомым центром

окружности - $O \equiv (m \cap n)$. Но т.к. $AB \parallel c$ и $BC \parallel a$, то точка O будет одновременно и ортоцентром данного треугольника.

Что и требовалось доказать.

Задача 10: Дана окружность и две вершины A и B невырожденного треугольника ABC , не принадлежащие данной окружности. Известно, что одна из сторон треугольника ABC является его полярной относительно данной окружности. Построить треугольник ABC .

Решение:

Предположим, что сторона AB является полярной треугольника ABC - l . Построим полярную точки A - a (Рис. 14).

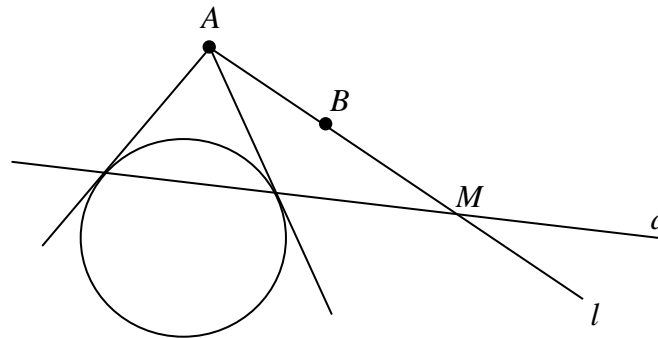


Рис. 14

$M \equiv (AB \cap a)$, но прямая BC также должна пересекать прямую l в точке M , и т.к. $B \in l$, по нашему предположению, то и точка C должна принадлежать прямой l . Следовательно треугольник ABC будет вырожденным, что противоречит условию задачи. Следовательно прямая AB не может являться полярной нашего треугольника.

Пусть прямая AC является полярной треугольника ABC . Пусть полярная точки A пересекает прямую BC в некоторой точке K . Следовательно точка K лежит на полярной треугольника AC . Т.е. прямая AC проходит через точку K и прямая BC также проходит через точку K . Отсюда заключаем, что $K \equiv C$.

Т. о. получаем, что геометрическим местом для точек C будет полярная точки A . Получаем бесконечное множество треугольников ABC , у которых одна из сторон (AC или BC) является полярной треугольника.

Задача 11 Дан треугольник ABC и его полярная, относительно некоторой окружности. Известно, что точки A и B принадлежат этой окружности. Построить окружность полярной данного треугольника.

Решение:

Обозначим полярную треугольника ABC через l .

Пусть $M \equiv (BC \cap l)$, (Рис. 15).

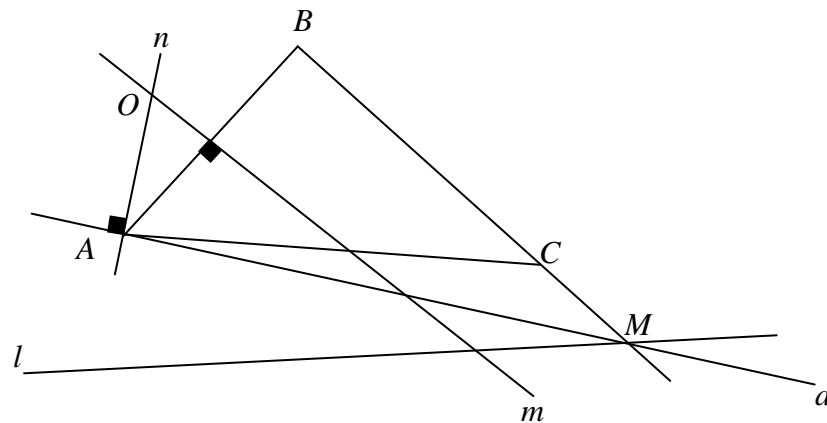


Рис. 15

Поляра точки A - a также должна проходить через точку M . Но т.к. A принадлежит окружности, то $AM \equiv a$.

Проведём прямую n через точку A и перпендикулярно прямой a . Проведём прямую m перпендикулярно стороне AB и проходящую через середину отрезка AB . Тогда точка $O \equiv (m \cap n)$ будет центром искомой окружности. Искомая окружность строится радиусом OA из центра O .

Задача 12 Дан треугольник ABC , его поляр, относительно некоторой окружности и точка D , принадлежащая поляре точки A . Известно также, что точка B принадлежит окружности поляры данного треугольника. Построить окружность поляры треугольника.

Решение:

Обозначим полярю треугольника ABC через l .

Пусть точка $M \equiv (AC \cap l)$. Поляра точки B также должна проходить через точку M и т.к. точка B лежит на искомой окружности по условию задачи, то $BM \equiv b$ - является полярю точки B (Рис. 16).

Проведём прямую n через точку B и перпендикулярно прямой BM .

Пусть $N \equiv (BC \cap l)$. Следовательно точка N принадлежит поляре точки A . Точка D также принадлежит поляре точки A по условию задачи, следовательно полярю точки A - $a \equiv DN$.

Проведём прямую m через точку A и перпендикулярно прямой a . Тогда точка $O \equiv (m \cap n)$ будет центром искомой окружности.

Строим окружность с центром в точке O и радиусом OB .

