Формула силы

Дм. Ватолин

В работе исследуется согласованность обычного релятивистского определения электромагнитной силы с простым механическим движением тел. Формулируются «парадоксы лоренцевой силы». Находится «формула силы», устраняющая парадоксы и приводящая к тем же кинематическим уравнениям для одиночной частицы, что и «старая теория». Находится, что и новая формула не может быть окончательной. Изменение формулы силы сказывается и на определении тензора энергии-импульса электромагнитного поля, и на определении релятивистского импульса тела.

§1. Что правильно понимать под «силой» в принятой релятивистской теории

«Лоренцев закон» изменения импульса частицы под действием электромагнитного поля имеет две эквивалентных формы (скорость света далее везде принята единичной): $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{H}$ и $\frac{d\mathbf{P}}{ds} = \Gamma q\mathbf{E} + \Gamma q\mathbf{V} \times \mathbf{H}$, где q – заряд частицы, $\mathbf{V}$ – скорость частицы, Γ – гамма-фактор частицы, $\mathbf{P}$ – импульс частицы, $\frac{d\mathbf{P}}{ds}$ – производная по пространственно-временному интервалу, $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ – производная по времени, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – напряжённости электрического и магнитного полей. В нынешней релятивистской электродинамике термин «сила» правильно применять к величине, приравниваемой к производной по времени от импульса тела в какой-нибудь фиксированной системе отсчёта, т.к. сумма производных по времени от импульсов частиц есть производная от суммы их импульсов в один момент времени, к которому привязаны частицы. Этим обосновано суммирование сил в один момент времени по разным пространственным точкам, выражение для пространственной плотности силы, и закон сохранения импульса именно «при перемене времени». Термин «сила» бесполезно применять к «пространственной части» набора четырёх чисел, именуемого «4-силой», т.к. отсутствует смысл сложения 4-сил в разных пространственных точках.

§2. Парадокс продольной силы

Рассмотрим покоящуюся в некоторой системе отсчёта плиту. Пусть вдоль неё действуют две противоположно направленных силы. Сила $F_{Л}$ пусть направлена «влево» и имеет покоящуюся точку приложения. Сила $F_{П}$, направленная «вправо», пусть имеет точку приложения, движущуюся вдоль поверхности плиты со скоростью β также вправо. Пусть силы «уравновешивают» друг друга. Это означает, что плита не ускоряется, импульс плиты с течением времени остаётся нулевым. Та сила, точка приложения которой движется, пусть выделяет в тело энергию трения. Тем самым, считаем, в плиту переходит некоторая инертная масса. Можно считать, что обе силы равномерно распределены по плите, по многим точкам приложения сил и, поэтому такое выделение массы в плиту происходит равномерно по всему объёму плиты. Тогда же, импульс плиты нулевой, т.к. средняя макроскопическая скорость всех частей плиты нулевая.

Предположим, что в точках приложения сил находятся заряженные частицы, которые перетаскиваются электрическим полем. Тогда, по закону преобразования электрических сил, при переходе в «штрихованную систему отсчёта», движущуюся со скоростью β вправо относительно первоначальной системы отсчёта, получаем, что составляющие сил вдоль направления такого движения не меняются. В самом деле, в преобразованиях Лоренца не меняется величина qE, где E – составляющая электрического поля по направлению движения «штрихованной системы отсчёта». Соответственно такой же закон преобразования обязан соблюдаться для всех уже не электрических сил. Т.е. $F_Л = F'_Л$, $F_П = F'_П$, где $F'_Л$ и $F'_П$ – силы, измеряемые в «штрихованной системе отсчёта», «производимые теми же источниками».

Из релятивистского закона, связывающего импульс и силу, извлекаем, что $\frac{dP}{dt} = F_Л + F_П = 0$. Тем самым, получаем, что для равновесия плиты необходимо строгое равенство сил. Очевидно, что это не очевидный факт принятой релятивистской теории сил.

В «штрихованной системе отсчёта», с одной стороны, равенство сил должно также соблюдаться как следствие лоренцевых преобразований, и потому $\frac{dP'}{dt'} = F'_Л + F'_П = 0$, а с другой, $\frac{dP'}{dt'} \neq 0$, так как масса плиты увеличивается из-за тепловой передачи, и скорость плиты не равна нулю и направлена влево. В итоге получаем противоречие для принятой релятивистской формулы силы.

§3. Парадокс поперечной силы

Пусть в системе отсчёта S, без трения, по покоящейся плите массой M движутся заряды $+q$ и $-q$. Скорость заряда $+q$ пусть равна V, направлена «вправо» и «положительна», а скорость заряда $-q$ пусть по абсолютной величине равна U, и может быть направлена «вправо» или «влево» по нашему произволу. Пусть в S включено постоянное во времени, однородное в пространстве электрическое поле **E**, перпендикулярное направлению движения зарядов, а магнитное поле **H** везде равно нулю. Пусть электрические силы, действующие на заряды, передаются на плиту уже в виде «механических сил».

Перейдём в систему отсчёта S', движущуюся «вправо» со скоростью V. По измерениям в системе отсчёта S', плита движется «влево», т.е. со скоростью $= -V$, заряд $+q$ неподвижен, заряд $-q$ движется с некоторой скоростью U', электрическое поле имеет ненулевое значение $\mathbf{E}'$ и перпендикулярно движению плиты.

По лоренцеву закону, действующие на заряды электрические силы не зависят от скоростей частиц и уравновешены в системе отсчёта S. Тогда и в системе отсчёта S' электрические силы также не зависят от скоростей зарядов и уравновешены. Но в S' существует магнитное поле $\mathbf{H}' \neq \mathbf{0}$. Магнитная и полная сила, действующая на заряд $-q$, поэтому, будет зависеть от скорости U', которую выставим произвольно, выставляя произвольно U. Отсюда, задавая через разные значения U разный «ток заряда», можно добиться ненулевого ускорения плиты в системе отсчёта S'. Но в системе отсчёта S ускорение будет нулевым. Это противоречие.

В других вариантах вывода это противоречие также не устранимо. Так, если заряд уменьшать «быстрее» размера занимаемой им области, ростом E сохраняя величину магнитной силы $qU'H'$, то влияние электромагнитной массы оказывается пренебрежимо малым, т.к. тогда изчезающе мало поле излучения, пропорциональное ускорению заряда.

В конечном итоге, можно убрать заряды, движущиеся по плите, и приложить к плите «обычные механические силы». Тогда, если принять «лоренцеву связь силы и импульса», выводим, что в окрестности некоторого момента времени плита не будет менять импульс даже от очень большой силы.

§4. Нахождение некой точной формулы связи «между силой и импульсом», и для «электромагнитной силы»

Рассмотрим классическое движение твёрдого тела T при малой по отношению к скорости света, постоянной во времени скорости $\mathbf{V}$. Пусть к T присоединяются другие твёрдые тела так, что они имеют составляющую скорости по направлению движения тела T равную $\mathbf{V}$, и не вынуждают T поменять свою скорость. Быстрота роста массы тела T во времени из-за такого присоединения есть величина $\dot{M} \neq 0$. Сила, действующая на T, определима через конкретный способ измерения, например, через измерение сжатия пружин или через реакцию пъезоэлемента. Тогда получаем, что даже в этом классическом случае, для объёма, на который действуют силы, закон $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$ не выполнен. В самом деле, компонента силы в направлении движения тела T в каждом элементе тела и в каждом присоединяемом элементе в классическом способе измерения сил даёт нуль. Но приращение импульса в объёме тела T не нулевое. Переопределение «силы для объёма тела T» непоследовательно и противоречит измерениям, так как тогда «предназначенные для измерения силы» приборы в принципе не могут дать значение «силы», и окончательно необходимо знать присоединяется ли к T дополнительная масса. Потребуется каскад переопределений, так как «масса» также определяется похожим измерением. В итоге, равенство $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$ можно применять лишь с полным понимаем того, что же оно означает в каждом конкретном случае.

В классической теории вышеописанное ещё можно достаточно естественно истолковать. Если же мы привлекаем релятивистское описание сил для данного случая, то уже невозможно отделить «силу, действующую на объём» и «силу, действующую на тело». Кроме того, даже для малых скоростей, отождествляя присоединение массы и присоединение энергии, в релятивистской теории необходимо признать «действие некоторой силы», поскольку, закон $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$ обязан быть верен уже для такой теории. Отсюда находим, что принятая релятивиская теория силы отчётливо не согласована с классическими измерениями посредством приборов.

Попытаемся найти другую «формулу силы». Примем в качестве «настоящего релятивистского импульса» величину $\mathbf{P} = \Gamma^2 m\mathbf{V}$, где Γ – гамма-фактор частицы с массой покоя m, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$. Пусть $\Gamma^2 m = M$. Тогда:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{dM}{dt}\mathbf{V} = \Gamma^2 m\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\Gamma^4 m\langle\frac{d\mathbf{V}}{dt}\mathbf{V}\rangle\mathbf{V}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{f} + \langle\mathbf{fV}\rangle\mathbf{V}, \text{ где}$$

$$\mathbf{f} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}\mathbf{V}$$

Величины $\mathbf{f}$ и $w = \langle\mathbf{fV}\rangle$ составляют лоренц-вектор, т.е. при переходах между системами отсчёта подчиняются правилам преобразования:

$$f'_{\parallel} = \gamma(f_{\parallel} - w\beta),\ w' = \gamma(w - f_{\parallel}\beta),\ f'_{\perp} = f_{\perp},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ где:}$$

β – скорость «штрихованной системы отсчёта» S' относительно системы отсчёта S (скорость света принимается единичной), $f_{\parallel}$ и $f'_{\parallel}$ – составляющие векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{f'}$ в направлении движения системы отсчёта, $f_{\perp}$ и $f'_{\perp}$ – в направлении, перпендикулярном движению S'. Соответственно штрихи означают, что величины измеряются в S', отсутствие штрихов – измеряются в S. Отсюда находим, что если «настоящая сила» $\mathbf{F}$ и «настоящая мощность» N подчиняются лоренцеву закону преобразования

$$F'_{\parallel} = \gamma(F_{\parallel} - N\beta),\ N' = \gamma(N - F_{\parallel}\beta),\ F'_{\perp} = F_{\perp},$$

и $\langle\mathbf{FV}\rangle = N$, то обе части равенства $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} + N\mathbf{V}$ преобразуются одинаково при переходах между системами отсчёта. При том, $\frac{dM}{dt} = 2N$.

Проверим, что если принять закон для связи между силой и импульсом в виде $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} + N\mathbf{V}$, и постулировать равновесие для плиты как «нулевую интенсивность передачи импульса в сумме», то оба «парадокса силы» устраняются.

Рассмотрим сначала «парадокс продольной силы». В отличие от принятого релятивистского закона преобразования сил, т.е. когда $F_Л = F'_Л = -F_П = -F'_П$, по нашему закону получаем: $F'_П = \gamma(F_П - N\beta) = \gamma F_П(1 - \beta^2) = \frac{1}{\gamma}F_П$, $F'_Л = \gamma F_Л$, где $F_П\beta = N > 0$. $N' = -\gamma F_Л\beta = \gamma F_П\beta = \gamma N > 0$, $F_П > 0$. Скорость плиты в изначальной системе отсчёта равна нулю, $NV = 0$, изменение импульса плиты в той же системе отсчёта равно нулю (берём «импульс» P как одну скалярную компоненту), и по предполагаемому закону $\frac{dP}{dt} = F_Л + F_П + NV = 0$. Отсюда $F_Л = -F_П$. В «штрихованной» же системе отсчёта, т.к. $V' = -\beta$,

$$\frac{dP'}{dt'} = F'_Л + F'_П + N'V' = -F_П\gamma(\frac{1}{\gamma^2} - 1 - \beta^2) = -2N'\beta = \frac{dM'}{dt'}V'$$

так как $\frac{dM'}{dt'} = 2N'$ и плита движется с постоянной скоростью V', т.е. $M'\frac{dV'}{dt'} = 0$.

Рассмотренная формула для силы немедленно устраняет и «парадос поперечной силы». В самом деле, так как $\mathbf{F}$ – пространственная часть лоренц-вектора, то поперечная компонента силы не меняется от перехода между системами отсчёта.

Теперь в явном виде отметим подходящую формулу для электромагнитной силы, вернее для связи между силой и производной по импульсу:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{dt}} = \Gamma q\mathbf{E} + \Gamma q\mathbf{V} \times \mathbf{H} + \Gamma q\langle\mathbf{EV}\rangle\mathbf{V}$$

где $\mathbf{V}$, Г, q – скорость, гамма-фактор и заряд частицы, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – электрическое и магнитное поле. Непосредственно проверяется, что векторная величина $\mathbf{F} = \Gamma q\mathbf{E} + \Gamma q\mathbf{V} \times \mathbf{H}$ и скаляр $\mathrm{N} = \Gamma q\langle\mathbf{EV}\rangle$ образуют лоренц-вектор. Тем самым, поперечная составляющая $\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{dt}}$ (перпендикулярная скорости частицы) не меняется от перехода между системами отсчёта. И если она была равна нулю в одной, то будет нулевой и в другой системе отсчёта.

Проверим, что последняя формула «для электромагнитной силы» приводит к тем же кинематическим уравнениям для одиночной частицы во внешних электромагнитных полях, что и в принятой релятивистской теории. Действительно, по принятой в настоящее время теории мы должны записать:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma m\mathbf{V}}{\mathrm{dt}} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{H}$$

Для составляющей силы, параллельной скорости $V_\parallel = V$, т.к. $V_\perp = 0$, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma mV_\parallel}{\mathrm{dt}} = \Gamma m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}} + \Gamma^3 m\left(\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}}V_\parallel + \frac{\mathrm{d}V_\perp}{\mathrm{dt}}V_\perp\right)V_\parallel =$$
$$= \Gamma m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}} + \Gamma^3 m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}}V^2 = \Gamma m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}}(1 + \Gamma^2V^2) = \Gamma^3 m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}} = qE_\parallel$$

Новая же формула даёт следующую цепочку равенств:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma^2 mV_\parallel}{\mathrm{dt}} = \Gamma^2 m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}} + 2\Gamma^4 m\left(\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}}V_\parallel + \frac{\mathrm{d}V_\perp}{\mathrm{dt}}V_\perp\right)V_\parallel =$$

$$= \Gamma qE_\parallel + \Gamma q\langle E_\parallel V_\parallel\rangle V_\parallel = \Gamma qE_\parallel(1 + V^2) =$$

$$= \Gamma^2 m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}}(1 + 2\Gamma^2V^2) = \Gamma^4 m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}}(1 + V^2)$$

Отсюда снова получаем $\Gamma^3 m\frac{\mathrm{d}V_\parallel}{\mathrm{dt}} = qE_\parallel$.

Для поперечной силы, по старой теории:

$$\frac{d\Gamma m\mathbf{V}_\perp}{dt} = \Gamma m\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} + \Gamma^3 m(\frac{dV_\parallel}{dt}V_\parallel + \frac{dV_\perp}{dt}V_\perp)\mathbf{V}_\perp =$$
$$= \Gamma m\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} = q\mathbf{E}_\perp + q\mathbf{V}\times\mathbf{H}$$

По рассматриваемой же теории получаем:

$$\frac{d\Gamma^2 m\mathbf{V}_\perp}{dt} = \Gamma^2 m\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} + 2\Gamma^4 m(\frac{dV_\parallel}{dt}V_\parallel + \frac{dV_\perp}{dt}V_\perp)\mathbf{V}_\perp =$$
$$= \Gamma^2 m\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} = \Gamma(q\mathbf{E}_\perp + q\mathbf{V}\times\mathbf{H})$$

– так как вектор $\Gamma q\langle\mathbf{EV}\rangle\mathbf{V} = \Gamma q\langle\mathbf{EV}\rangle\mathbf{V}_\parallel$ ортогонален вектору $\Gamma^2 m\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt}$. Т.е. в итоге также имеем $\Gamma m\frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} = q\mathbf{E}_\perp + q\mathbf{V}\times\mathbf{H}$.

Тем не менее, введённую векторную величину $\mathbf{F}$ не будем пока рассматривать в качестве «полноценной силы» из-за того, что для примера с присоединяемыми телами мы снова получаем отсутствие «склейки» с классическим измерением сил. Действительно, если $\mathbf{P}$ – «импульс» и М – «масса» тела Т, то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{dM}{dt}\mathbf{V} = \mathbf{F} + N\mathbf{V}$$

и так как $\frac{dM}{dt} = 2N$, и $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0$, то $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, что противоречит обычно применяемому способу измерения. Даже если предложить способ измерения, уже соответствующий рассмотренному определению «силы», необходимы подробности, обоснующие корректность применения определения, которые пока отсутствуют. Равенство $\frac{dM}{dt} = 2N$ ставит под сомнение известную связь между «энергией покоя» и «массой», что требует разбирательств, вероятно также ведущих к отказу от данного определения. В итоге, при всей полезности рассмотренного, окончательная формула силы пока не известна. Также находим, что «формулу электромагнитной силы для произвольной СО» не возможно вывести «только из электрической силы в системе отсчёта частицы», т.е. для «вывода силы» требуются дополнительные постулаты.

В качестве «новой силы» можно было бы взять векторную величину $\mathfrak{F} = \mathbf{F} - N\mathbf{V}$, когда $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathfrak{F} + \frac{dM}{dt}\mathbf{V}$. Нетрудно проверить, что такое новое определение также устраняет оба рассмотренных парадокса, и $\mathfrak{F}$ может быть нулевой, когда $\frac{dM}{dt} \neq 0$, т.е. уже существует «склейка» с классическим измерением сил. Но тогда же находится снова, что $\frac{dM}{dt} = 2N$, и кроме того, вознкает много других вопросов.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля находится только через аксиому для электромагнитной силы. Без знания «формулы силы», нельзя определить в теоретической формуле импульсы и энергии для полей и частиц. Требование же «нового определения силы» несёт радикальные последствия для релятивистских теорий. В частности, в квантовой электродинамике необходима новая формула для импульса частицы.

Литература

1. Фок. В.А. Теория пространства, времени и тяготения. Москва 1961.